



SYSTEMTHEORIE

Theorie linearer Regelsysteme

Wintersemester 2012/2013

Prof. Dr.-Ing. Knut Graichen

Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik
Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik
Universität Ulm

“Eines der Erfolgskonzepte von Lebewesen: Sie geizen mit der Energie und erzielen mit möglichst wenig Energie einen möglichst großen Erfolg. Womit sie nicht geizen, das ist die Regelungstechnik. Da leisten sie sich aufwendige Sensoren und Schaltungen. [...]”

Quelle: W. Nachtigall, G. Blüchel. *Bionik*, DVA Verlag, 2003.

Inhaltsverzeichnis

1	Dynamische Systeme	1
1.1	Das Zustandskonzept	2
1.2	Physikalische Beispiele	4
1.2.1	Elektrisches System	4
1.2.2	Mechanisches System	6
1.2.3	Hydraulisches System	8
1.2.4	Biologisches System	9
1.3	Systemeigenschaften	10
1.3.1	Linearität und Zeitinvarianz	11
1.3.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	14
1.3.3	Begriff der Ruhelage	15
1.4	Linearisierung nichtlinearer Systeme	17
1.4.1	Linearisierung um eine Ruhelage	17
1.4.2	Linearisierung um eine Trajektorie	21
1.5	Literatur	24
2	Beschreibung und Eigenschaften linearer Systeme	25
2.1	Beschreibung im Zustandsraum	25
2.1.1	Transitionsmatrix	25
2.1.2	Laplace-Transformation der Transitionsmatrix	28
2.1.3	Sprung- und Impulsantwort	29
2.2	Zustandstransformation	30
2.2.1	Transformation auf Diagonalform	31
2.2.2	Nichtdiagonalähnliche Systemmatrizen	34
2.2.3	Behandlung konjugiert komplexer Eigenwerte	35
2.2.4	Reelle Jordansche Normalform	36
2.3	Stabilität linearer Systeme	38
2.3.1	Bedeutung der Eigenvektoren	38
2.3.2	Asymptotische Stabilität	40

2.4	Eingangs-/Ausgangsverhalten	43
2.4.1	Übertragungsfunktion und Übertragungsmatrix	43
2.4.2	Realisierungsproblem	45
2.4.3	BIBO-Stabilität	49
2.4.4	Interpretation der Nullstellen	50
2.5	Steuerbarkeit	53
2.5.1	Steuerbarkeit nach KALMAN	54
2.5.2	Steuerbarkeit nach HAUTUS	56
2.5.3	Regelungsnormalform (Eingrößenfall)	57
2.6	Beobachtbarkeit	59
2.6.1	Beobachtbarkeit nach KALMAN	59
2.6.2	Beobachtbarkeit nach HAUTUS	62
2.6.3	Beobachtungsnormalform (Eingrößenfall)	63
2.7	Dualitätsprinzip	64
2.8	Literatur	64
3	Zustandsregler	66
3.1	Stationäres Vorfilter	67
3.2	Direkte Eigenwertvorgabe im Eingrößenfall	68
3.3	Reglerentwurf in Regelungsnormalform	70
3.3.1	Ackermann-Formel (Eingrößenfall)	70
3.3.2	Steuerbarkeitsindizes (Mehrgrößenfall)	73
3.3.3	Regelungsnormalform (Mehrgrößenfall)	75
3.3.4	Entkopplung und Eigenwertvorgabe	77
3.4	Reglerentwurf durch Ein-/Ausgangsentkopplung	80
3.4.1	Relativer Grad	81
3.4.2	Ein-/Ausgangsnormalform	82
3.4.3	Entkopplung und Eigenwertvorgabe	84
3.4.4	Interpretation der Nulldynamik	88
3.5	Optimale Regelung (LQ-Regler)	89
3.5.1	Einführung in die dynamische Programmierung	90
3.5.2	RICCATI-Differenzialgleichung	93
3.5.3	Algebraische RICCATI-Gleichung	94
3.5.4	Vergleich zwischen Eigenwertvorgabe und LQR-Entwurf	97
3.6	Behandlung von Störgrößen	98
3.6.1	Störgrößenaufschaltung	99
3.6.2	PI-Zustandsregler	99
3.7	Literatur	102

4	Beobachterentwurf	103
4.1	Trivialer Beobachter	103
4.2	Vollständiger Luenberger-Beobachter	104
4.3	Separationsprinzip	107
4.4	Behandlung von Störgrößen (Störbeobachter)	109
4.5	Reduzierter Beobachter	110
4.6	Literatur	113
5	Folgeregelung	114
5.1	Folgeregelung für den Ausgang	115
5.1.1	Fehlerdynamik und Regelgesetz	115
5.1.2	Folgeregelung mit Integralanteil	117
5.2	Zwei-Freiheitsgrade-Regelung	118
5.2.1	Definition des flachen Ausgangs	119
5.2.2	Flacher Ausgang bei linearen Systemen	121
5.2.3	Flachheitsbasierte Vorsteuerung	123
5.2.4	Polynomiale Solltrajektorien	124
5.2.5	Stabilisierende Regelung um die Trajektorie	127
5.3	Literatur	128

Kapitel 1

Dynamische Systeme

Der Begriff des *Systems* wird in vielen Bereichen der Wissenschaft und des täglichen Lebens verwendet, wobei im Detail häufig unterschiedliche Dinge darunter verstanden werden. Wenn ein System zunächst als eine *Black Box* betrachtet wird, so wird die Wechselwirkung mit der Umgebung durch sogenannte *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen* beschrieben (siehe Abbildung 1.1):

- *Eingangsgrößen* $u_1, u_2, \dots, u_m$ wirken von der Umgebung auf das System ein. Beeinflussbare Eingangsgrößen dienen in der Regelungstechnik als *Stellgrößen* (im Gegensatz zu nicht beeinflussbaren *Störgrößen*).
- *Ausgangsgrößen* $y_1, y_2, \dots, y_p$ werden vom System erzeugt und beeinflussen die Umgebung. Ausgangsgrößen, die über Sensoren gemessen werden können, bezeichnet man als *Messgrößen*.

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns hauptsächlich mit *zeitkontinuierlichen Systemen*, d.h. die Ein- und Ausgangsgrößen werden als Zeitfunktionen betrachtet (siehe Abbildung 1.1). Wenn man nun ein Zeitintervall $[t_0, t_1]$ betrachtet, so stellt sich die Frage, ob und in welcher Weise sich das Ausgangsverhalten in diesem Zeitraum (eindeutig) durch die Eingangsverläufe beschreiben lässt. Diese Frage führt auf die Unterscheidung zwischen *statischen* und *dynamischen Systemen*.

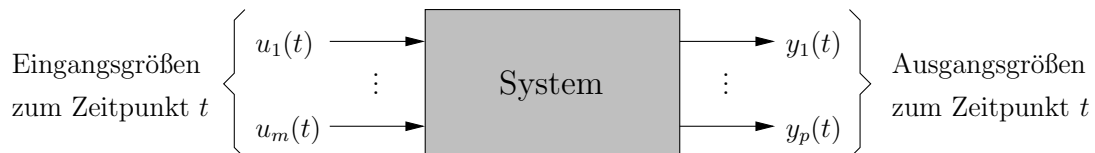


Abbildung 1.1: Systemdarstellung mit Ein- und Ausgangsgrößen.

Beispiel 1.1 In Abbildung 1.2 a) und b) sind zwei einfache elektrische Systeme mit einem Widerstand bzw. einem idealen Kondensator sowie der Eingangsgröße $i(t)$ (Strom) und der Ausgangsgröße $v(t)$ (Spannung) dargestellt.

Im Fall a) gilt für den Widerstand R der Zusammenhang

$$v(t) = R i(t). \quad (1.1)$$

Die Ausgangsgröße $v(t)$ ist zu jedem Zeitpunkt t eindeutig durch die Eingangsgröße $i(t)$ bestimmt. Statt dessen gilt im Fall b) für die Spannung $v(t)$ über dem Kondensator C

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Im Gegensatz zu (1.1) ist die Ausgangsgröße $v(t)$ also abhängig von der Spannung $v_0 = v(t_0)$ zum Startzeitpunkt t_0 sowie vom Verlauf des Eingangsstroms $i(\tau)$ für $t_0 \leq \tau < t$.

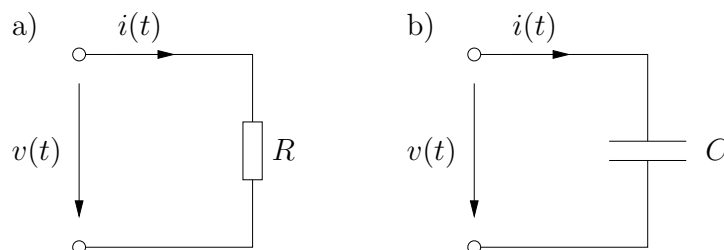


Abbildung 1.2: Beispiel zu statischen und dynamischen Systemen (Beispiel 1.1).

Anhand von Beispiel 1.1 lässt sich der Unterschied zwischen einem statischen und dynamischen System wie folgt beschreiben:

- *Statisches System*: die Ausgangsgrößen $y_1(t), \dots, y_p(t)$ zum Zeitpunkt t hängen lediglich von den momentanen Eingangsgrößen $u_1(t), \dots, u_m(t)$ ab,
- *Dynamisches System*: die Ausgangsgrößen $y_1(t), \dots, y_p(t)$ zum Zeitpunkt t hängen von der Anfangssituation und der Historie der Eingangsgrößen $u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)$ für $\tau \leq t$ ab. Man spricht in diesem Fall auch von einem *kausalen* dynamischen System.

1.1 Das Zustandskonzept

Der oben genannte Begriff der “Anfangssituation” ist eng verknüpft mit der Definition der *Zustandsgrößen* eines dynamischen Systems:

Definition 1.1 (Zustand) Die Größen $x_1, \dots, x_n$ heißen Zustandsgrößen eines dynamischen Systems, wenn sich die Ausgangsgrößen $y_1(t), \dots, y_p(t)$ zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \geq t_0$ durch die Historie der Eingangsgrößen $u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$ und die Anfangszustände $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ beschreiben lassen.

In der Vorlesung werden dynamische Systeme mit endlichem Zustand ($n < \infty$) betrachtet, die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen in expliziter Form beschreiben lassen:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad x_1(t_0) = x_{1,0} \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad x_2(t_0) = x_{2,0} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad x_n(t_0) = x_{n,0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zustandsdgl. mit} \\ \text{Anfangsbedingung} \end{array} \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ y_2 = h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ y_p = h_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \end{array} \right\} \text{Ausgangsgleichungen}$$

wobei $\dot{x}_i = \frac{d}{dt}x_i(t)$ als Abkürzung der Zeitableitung verwendet wird. Es ist gebräuchlich, die einzelnen Größen in Vektorform anzugeben

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Mit dem *Eingang* $\mathbf{u}$, dem *Ausgang* $\mathbf{y}$ und dem *Zustand* $\mathbf{x}$ lassen sich auch die Differenzialgleichungen (1.3) in der kompakten Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.6)$$

schreiben. Der Zustand $\mathbf{x}(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t lässt sich als Element eines n -dimensionalen Vektorraumes interpretieren, weshalb man auch vom *Zustandsraum* spricht. Die Kurve aller Punkte $\mathbf{x}(t)$ in einem Zeitintervall stellt eine *Trajektorie* im Zustandsraum dar, siehe Abbildung 1.3.

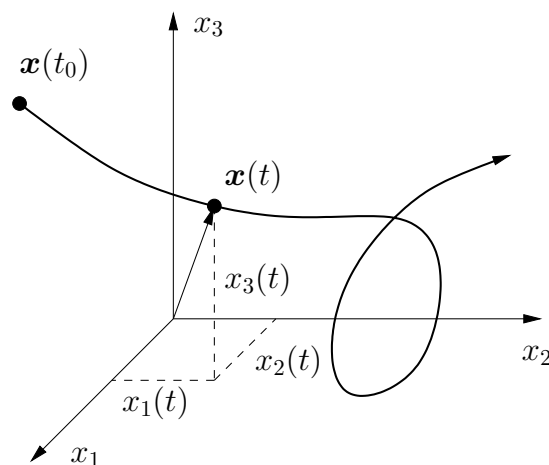


Abbildung 1.3: Veranschaulichung einer Trajektorie im Zustandsraum ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$).

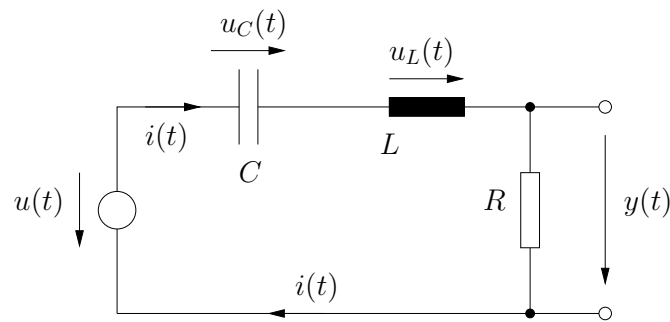


Abbildung 1.4: Einfaches elektrisches System.

1.2 Physikalische Beispiele

In den folgenden Abschnitten werden einige Beispiele aus verschiedenen physikalischen Bereichen betrachtet und deren mathematische Modellierung als dynamische Systeme diskutiert.

1.2.1 Elektrisches System

Serienschwingkreis: Abbildung 1.4 zeigt einen Serienschwingkreis mit der Eingangsspannung $u(t)$ und der Ausgangsspannung $y(t)$. Das mathematische Modell kann unmittelbar aus der Maschenregel (Kirchhoffsche Gesetze)

$$0 = -u(t) + u_C(t) + u_L(t) + y(t) \quad (1.7)$$

und den Bauelementgleichungen

$$\begin{aligned} C \frac{d}{dt} u_C(t) &= i(t) & \text{mit } u_C(0) &= u_{C,0} \\ L \frac{d}{dt} i(t) &= u_L(t) & \text{mit } i(0) &= i_0 \\ R i(t) &= y(t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

für den Kondensator C , die Induktivität L und den Widerstand R hergeleitet werden. Eine geeignete Wahl für die Zustandsgrößen ist der Strom $i(t)$ durch die Induktivität und die Spannung $u_C(t)$ am Kondensator. Damit ergibt sich die Systembeschreibung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \quad (1.9)$$

und die Ausgangsgleichung

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Tabelle 1.1 stellt die Lösung von (1.9) für $u(t) = 0$ dar, wobei

$$\tau = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

gilt. Offensichtlich unterscheidet sich das Schwingverhalten in Abhängigkeit der Fälle a) bis c). In Abbildung 1.5 sind die Trajektorien für die Fälle a), b), c) mit den Parametern $L = C = 1$ und $R \in \{1, 2, 3\}$ sowie den Anfangsbedingungen $u_{C,0} = 2$, $i_0 = 1$ für das Zeitintervall $0 \leq t \leq 10$ dargestellt.

Fall a) $\frac{1}{\sqrt{CL}} > \frac{R}{2L}$	$u_C(t) = \exp(-\tau t) \left(\left(\frac{\tau}{\omega} u_{C,0} + \frac{1}{\omega C} i_0 \right) \sin(\omega t) + u_{C,0} \cos(\omega t) \right)$ $i(t) = -\exp(-\tau t) \left(\left(\frac{\tau}{\omega} i_0 + \frac{1}{\omega L} u_{C,0} \right) \sin(\omega t) - i_0 \cos(\omega t) \right)$	(1.11)
Fall b) $\frac{1}{\sqrt{CL}} < \frac{R}{2L}$	$u_C(t) = \exp(-\tau t) \left(\left(\frac{\tau}{\omega} u_{C,0} + \frac{1}{\omega C} i_0 \right) \sinh(\omega t) + u_{C,0} \cosh(\omega t) \right)$ $i(t) = -\exp(-\tau t) \left(\left(\frac{\tau}{\omega} i_0 + \frac{1}{\omega L} u_{C,0} \right) \sinh(\omega t) - i_0 \cosh(\omega t) \right)$	(1.12)
Fall c) $\frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{R}{2L}$	$u_C(t) = \exp\left(-\frac{2}{RC}t\right) \left(\left(\frac{1}{C} i_0 + \frac{2}{RC} u_{C,0} \right) t + u_{C,0} \right)$ $i(t) = -\exp\left(-\frac{2}{RC}t\right) \left(\left(\frac{2}{RC} i_0 + \frac{4}{R^2 C} u_{C,0} \right) t - i_0 \right)$	(1.13)

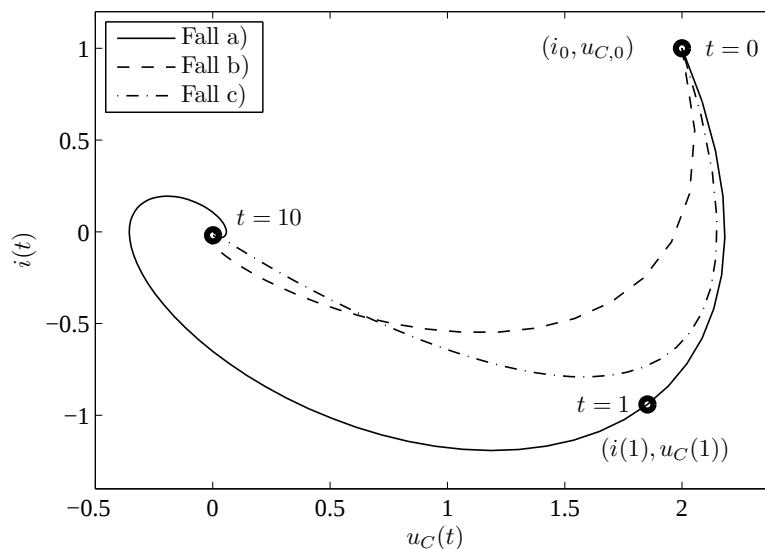
Tabelle 1.1: Analytische Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen (1.9) für $u(t) = 0$.

Abbildung 1.5: Trajektorien des Serienschwingkreises.

Aufgabe 1.1 Berechnen Sie zum elektrischen Kreis nach Abbildung 1.6 die Zustandsdgl. und die Ausgangsgleichung für $y = i_2$. Wählen Sie dazu geeignete Zustandsgrößen und verwenden Sie die Kirchhoffschen Gesetze.

Lösung: Wenn i_1 und u_C als Zustandsgrößen gewählt werden, ergibt sich

$$\text{Zustandsdgl.} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\text{Ausgangsgl.} \quad y(t) = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}$$

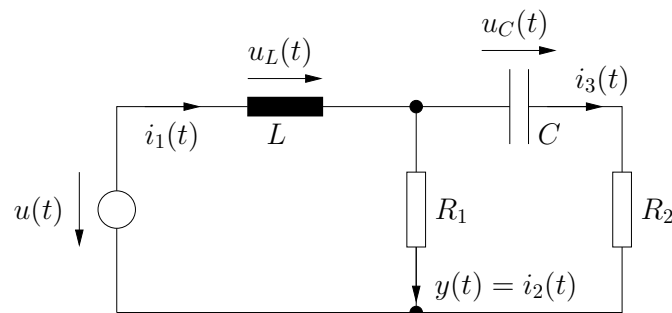


Abbildung 1.6: Elektrischer Kreis zu Aufgabe 1.1.

1.2.2 Mechanisches System

Feder-Masse-Dämpfer-System: Ein einfaches Feder-Masse-Dämpfer-System mit der Masse m und der externen Kraft $F(t)$ ist in Abbildung 1.7 dargestellt. Für die Rückstellkraft der Feder und die Dämpferkraft gelten die Beziehungen

$$F_c(t) = cx(t), \quad F_d(t) = d\dot{x}(t). \quad (1.14)$$

mit $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$. Das mathematische Modell des Feder-Masse-Dämpfer-Systems ergibt sich durch Anwendung des *Impulserhaltungssatzes*, der aussagt, dass die Summe der angreifenden Kräfte gleich der zeitlichen Änderungen des Impulses ist:

$$\frac{d}{dt}(mv(t)) = m\ddot{x}(t) = -cx(t) - d\dot{x}(t) + F(t). \quad (1.15)$$

Mit der Kraft $F(t)$ als Eingangsgröße des Systems und der Position $x(t)$ und Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ der Masse m als Zustandsgrößen erhält man die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t). \quad (1.16)$$

Zwischen mechanischen und elektrischen Größen existiert eine Analogie, die auch in der gleichen Struktur des mechanischen Systems (1.16) und des elektrischen Systems (1.9)

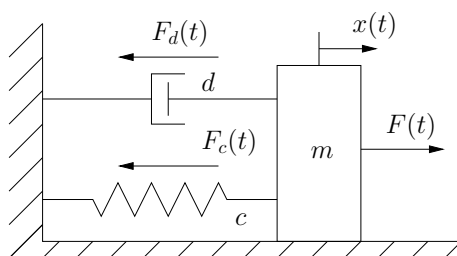


Abbildung 1.7: Feder-Masse-Dämpfer-System.

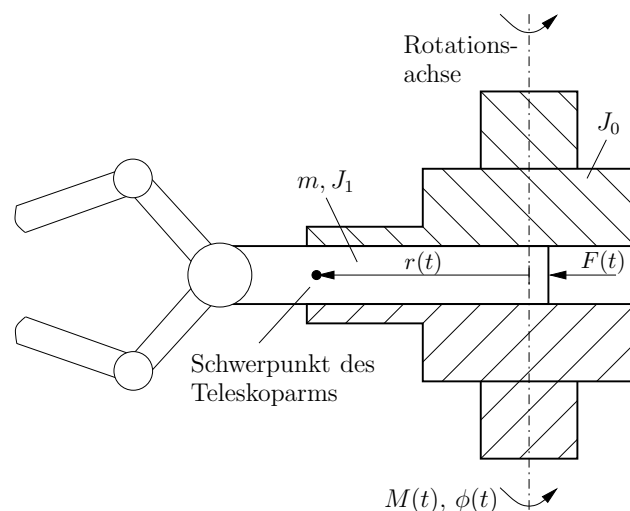


Abbildung 1.8: Roboterarm mit zwei Freiheitsgraden.

erkennbar ist. Die Korrespondenzen von mechanischen und elektrischen Größen sind in Tabelle 1.2 dargestellt.

Mechanische Größen		Elektrische Größen	
Weg:	$x(t)$	Ladung:	$q_C(t) = Cu_C(t)$
Geschwindigkeit:	$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$	Strom:	$i_C(t) = \frac{d}{dt}q_C(t) = C\frac{d}{dt}u_C(t)$
Kraft:	$F(t)$	Spannung:	$u(t)$
Masse:	m	Spule	L
Federkonstante:	c	Kondensator:	$1/C$
Dämpfungskonstante:	d	Widerstand:	R

Tabelle 1.2: Korrespondenzen zwischen mechanischen und elektrischen Größen.

Aufgabe 1.2 Zeigen Sie, dass das Ersetzen der mechanischen Größen in (1.16) durch die korrespondierenden elektrischen Größen (Tabelle 1.2) direkt auf (1.9) führt.

Roboterarm: Als weiteres mechanisches Beispiel wird der Roboterarm in Abbildung 1.8 betrachtet. Der Roboterarm besitzt einen rotatorischen und einen translatorischen Freiheitsgrad (Teleskoparm), die mit $\phi(t)$ und $r(t)$ bezeichnet werden. Zur Aufstellung des mathematischen Modells des Roboterarms wird der *Drehimpuls* bzw. der *Drall* des Roboterarms betrachtet, der abhängig vom Trägheitsmoment J und der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ ist:

$$D(t) = J(t)\omega(t) \quad \text{mit} \quad J(t) = J_0 + J_1 + mr^2(t).$$

Das Gesamtträgheitsmoment J besteht aus den Einzelträgheitsmomenten J_0 und J_1 des Drehgestells und des Teleskoparms um die Rotationsachse ($r = 0$) sowie dem zusätzlichen sogenannte *Steiner-Anteil* mr^2 , der den Schwerpunktsabstand des Teleskoparms relativ zur Rotationsachse berücksichtigt.

Der *Drallsatz* sagt aus, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich der Summe der angreifenden Momente ist. Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(J(t)\omega(t)) &= \dot{J}(t)\omega(t) + J(t)\dot{\omega}(t) \\
 &= \frac{\partial J}{\partial r}\dot{r}(t)\omega(t) + J(t)\dot{\omega}(t) \\
 &= 2mr\dot{r}\omega + (J_0 + J_1 + mr^2)\dot{\omega} = M(t)
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

mit dem *Coriolis-Moment* $2mr\dot{r}\omega$ und unter Vernachlässigung der Argumente (t) .

Zusätzlich wird zur Beschreibung der radialen Bewegung des Teleskoparms der bereits erwähnte *Impulserhaltungssatz* angewendet

$$\frac{d}{dt}(mv(t)) = m\dot{v} = F(t) + mr\omega^2, \tag{1.18}$$

wobei $F(t)$ die angreifende Kraft (siehe Abbildung 1.8) und $mr\omega^2$ die *Zentrifugalkraft* darstellt. Mit den Zusammenhängen

$$\omega(t) = \dot{\phi}(t) \quad \text{und} \quad v(t) = \dot{r}(t)$$

erhält man die Zustandsdifferenzialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{-2mr\dot{v}\omega + M(t)}{J_0 + J_1 + mr^2} \\ \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= r\omega^2 + \frac{1}{m}F(t). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Mit dem Zustand $\mathbf{x} = [\phi, \omega, r, v]^T$ und dem Eingang $\mathbf{u} = [M, F]^T$ lässt sich das dynamische Modell des Roboterarms also in der Form (1.3)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

angeben.

1.2.3 Hydraulisches System

Drei-Tank-System: Abbildung 1.9 stellt ein Tanksystem aus drei Behältern dar, die miteinander verbunden sind. Zwei Speiserohre fördern die Volumenströme q_1 und q_2 in die Behälter 1 und 3. Die Füllstände in den einzelnen Tanks werden mit h_i , $i = 1, 2, 3$ bezeichnet. Am dritten Behälter befindet sich ein Abflussrohr auf der Höhe H , durch das der Volumenstrom q_3 aus dem Tanksystem entnommen wird. Das Drei-Tank-System kann als ein vereinfachtes Modell eines Wasserversorgungsnetzes oder einer mehrstufigen Talsperre angesehen werden.

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Querschnittsflächen A und der Durchflussquerschnitt a für alle Behälter gleich ist. Die Eingangsgrößen des Systems sind die Volumenströme q_1 und q_2 . Die Ausgangsgröße sei der Abfluss q_3 aus dem dritten Behälter. Wenn angenommen wird, dass h_3 größer als die Installationshöhe H des Ablaufrohres ist, so kann der Abfluss q_3 in guter Näherung durch die *Ausflussformel von Torricelli*

$$q_3 = a\sqrt{2g(h_3 - H)}, \quad h_3 \geq H \tag{1.20}$$

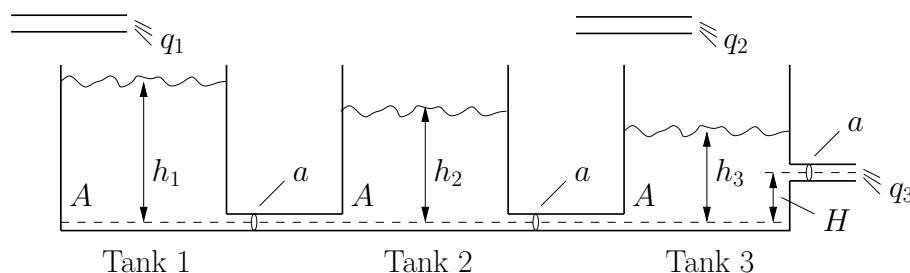


Abbildung 1.9: Drei-Tank-System.

beschrieben werden, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Des Weiteren lauten die Volumenbilanzgleichungen für die drei Behälter

$$A \frac{d}{dt} h_1 = q_1 - a v_{12}, \quad A \frac{d}{dt} h_2 = a(v_{12} - v_{23}) \quad A \frac{d}{dt} h_3 = a v_{23} + q_2 - q_3 \quad (1.21)$$

Für die Strömungsgeschwindigkeiten v_{12} und v_{23} zwischen den einzelnen Tanks gilt der Zusammenhang

$$v_{ij} = F(h_i, h_j) = \text{sign}(h_i - h_j) \sqrt{2g|h_i - h_j|} \quad (1.22)$$

in Abhängigkeit der Differenzhöhe der jeweiligen Tanks, siehe Abbildung 1.10. Damit errechnen sich die Zustandsdifferentialgleichungen des Drei-Tank-Systems zu

$$\begin{aligned} A \dot{h}_1 &= q_1 - aF(h_1, h_2) & h_1 &\geq 0 \\ A \dot{h}_2 &= aF(h_1, h_2) - aF(h_2, h_3) & h_2 &\geq 0 \\ A \dot{h}_3 &= aF(h_2, h_3) - a\sqrt{2g(h_3 - H)} + q_2 & h_3 &\geq H \end{aligned} \quad (1.23)$$

mit der Ausgangsgleichung (1.20).

Aufgabe 1.3 Im Gegensatz zum gerade betrachteten Drei-Tank-System (Abbildung 1.9) besteht bei dem Zwei-Tank-System in Abbildung 1.11 keine direkte Verbindung zwischen den Tanks. Geben Sie das Modell des Zwei-Tank-Systems in Abbildung 1.11 an, wenn q die Eingangsgröße und q_2 die Ausgangsgröße ist.

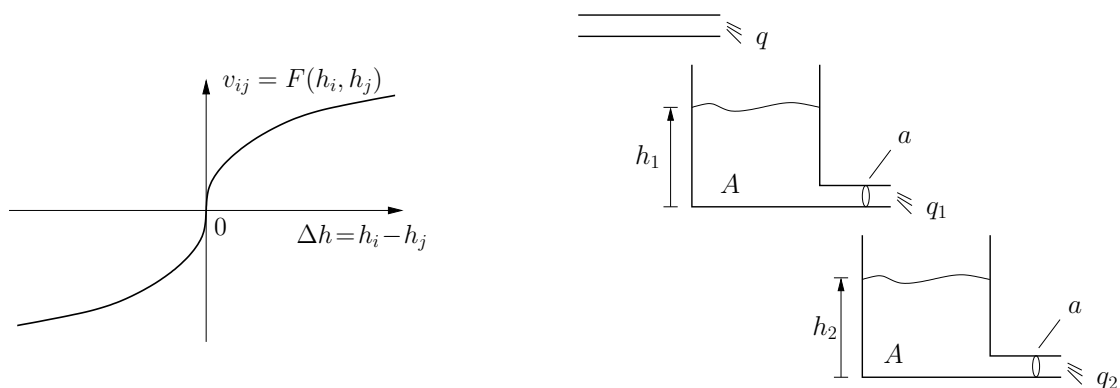


Abbildung 1.10: Kennlinie (1.22). Abbildung 1.11: Zwei-Tank-System (Aufgabe 1.3).

1.2.4 Biologisches System

Räuber-Beute-Modell: Das Konzept der Zustandsvariablen ist nicht nur auf technische Systeme beschränkt. Ein klassisches Beispiel aus der Ökologie ist das *Räuber-Beute-Beziehung* zweier Populationen. Im Folgenden wird die Anzahl der Tiere einer Beutepopulation in einem abgegrenzten Gebiet (kein Zuzug, keine Abwanderung) zum Zeitpunkt t mit $x_1(t)$ bezeichnet. Im gleichen abgeschlossenen Gebiet lebt eine Räuberpopulation, die sich ausschließlich von der Beutepopulation ernährt und deren Anzahl mit $x_2(t)$ ausgedrückt wird. Für die beiden Populationen werden nun die folgenden Modellierungsansätze getroffen:

- Der Zuwachs an Beutetieren durch Geburten ist proportional zur momentanen Anzahl an Beutetieren mit einer Geburtenrate $a_1 > 0$:

$$m_{\text{Beute}}^+ = a_1 x_1$$

- Eine Abnahme an Beutetieren entsteht durch natürliche Todesursachen mit einer Sterberate $a_2 > 0$. Die Existenz der Räuberpopulation zu einer weiteren Verringerung (“feindliche” Begegnungen), die als proportional zur Anzahl der Beute- und Räubertiere angesetzt wird (Proportionalitätskonstante $b > 0$):

$$m_{\text{Beute}}^- = a_2 x_1 + b x_1 x_2$$

- Die Räuberpopulation verringert sich ebenfalls durch natürliche Todesursachen mit einer Sterberate $c > 0$:

$$m_{\text{Räuber}}^- = c x_2$$

- Für den Zuwachs an Räubertieren wird angenommen, dass dieser jeweils proportional zur eigenen Anzahl und zur Anzahl an Beutetieren ist (Proportionalitätskonstante $d > 0$):

$$m_{\text{Räuber}}^+ = d x_1 x_2$$

Mit diesen Überlegungen ergibt sich das folgende mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1 &= \overbrace{(a_1 - a_2)}^a x_1 - b x_1 x_2, & x_1(0) &= x_{1,0} \\ \frac{d}{dt} x_2 &= -c x_2 + d x_1 x_2, & x_2(0) &= x_{2,0}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

mit den Anfangswerten $x_{1,0}$ und $x_{2,0}$ der Beute- und Räuberpopulationen. Diese Gleichungen zur Beschreibung der dynamische Populationsentwicklung werden auch *Lotka-Volterra-Differentialgleichungen* bezeichnet.

Abbildung 1.12 zeigt das Verhalten der Populationen in der (x_1, x_2) -Ebene beispielhaft für die Werte $a = b = d = 1$ und $c = 1$ (Fall a) bzw. $c = 2$ (Fall b). Die Anfangsbedingungen in (1.24) sind $x_{1,0} = x_{2,0} = 2$. Wie man erkennt, weist das Räuber-Beute-Modell eine *geschlossene Trajektorie* auf, die in der Systemtheorie auch als *Grenzzyklus* gezeichnet wird. Im Fall b) profitiert die Beutepopulation offensichtlich von dem schnelleren Ableben der Räuber (Sterberate $c = 2$).

1.3 Systemeigenschaften

Dynamische Systeme lassen sich nach unterschiedlichen Eigenschaften klassifizieren, von denen einige in diesem Kapitel vorgestellt werden. Dabei wird lediglich auf die wichtigsten Begriffe eingegangen, die in der Vorlesung benötigt werden. Für weitergehende Betrachtungen sei auf die am Kapitelende angegebene Literatur verwiesen.

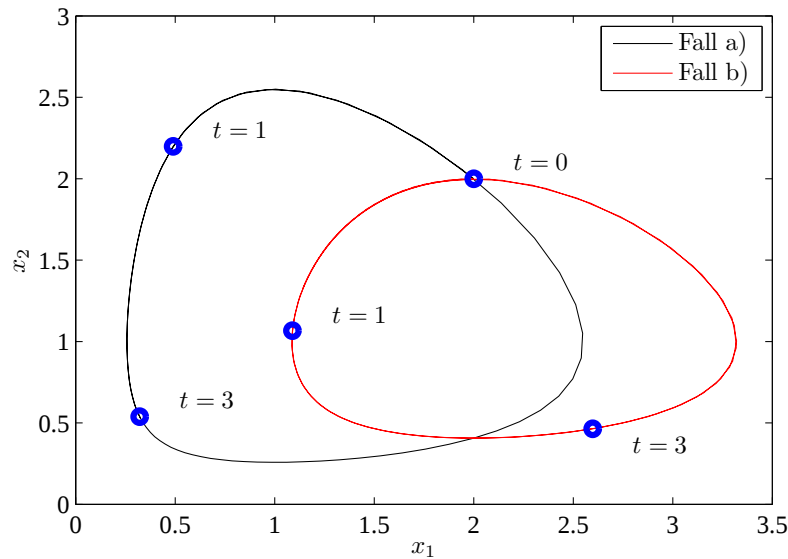


Abbildung 1.12: Trajektorien des Räuber-Beute-Systems mit $x_{1,0} = x_{2,0} = 2$ sowie den Parametern $a = b = d = 1$ und $c = 1$ (Fall a) bzw. $c = 2$ (Fall b).

1.3.1 Linearität und Zeitinvarianz

In der Systemtheorie muss unterschieden werden, ob ein System linear oder nichtlinear ist bzw. zeitvariant oder zeitinvariant ist. Insbesondere die Unterscheidung zwischen linearen und nichtlinearen Systemen ist maßgeblich für die Systemtheorie und Regelungstechnik. Daher soll zunächst mathematisch klassifiziert werden, wann ein System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}\tag{1.25}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ linear ist.

Es sei daran erinnert, dass eine Funktion $\psi(x)$ linear heißt, wenn sowohl das *Verstärkungsprinzip* $\psi(cx) = c\psi(x)$ als auch das *Additionsprinzip* $\psi(x_1 + x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2)$ erfüllt ist. Diese Eigenschaften lassen sich kompakt mit Hilfe des *Superpositionsprinzips* zusammenfassen:

Definition 1.2 (Lineare Funktion) Eine Funktion $\psi(x)$ heißt linear, wenn das *Superpositionsprinzip*

$$\psi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \psi(x_1) + \alpha_2 \psi(x_2)\tag{1.26}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Die Definition der Linearität lässt sich auf das dynamische System (1.25) übertragen, wenn man bedenkt, dass der Zustand $\mathbf{x}(t)$ und Ausgang $\mathbf{y}(t)$ Funktionen der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \boldsymbol{\psi}(t; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\end{aligned}\tag{1.27}$$

darstellen.

Definition 1.3 (Lineares System) Das System (1.25) heißt linear, wenn zu jedem Startzeitpunkt $t_0 > 0$ und für alle (zulässigen) Anfangszustände $\mathbf{x}_0$ und Eingangstrajektorien $\mathbf{u}(t)$ die folgenden Bedingungen für $t \geq t_0$ und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt sind:

$$\psi(t; \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2, \mathbf{0}, t_0) = \alpha_1 \psi(t; \mathbf{u}_1, \mathbf{0}, t_0) + \alpha_2 \psi(t; \mathbf{u}_2, \mathbf{0}, t_0) \quad (1.28)$$

$$\psi(t; \mathbf{0}, \beta_1 \mathbf{x}_{0,1} + \beta_2 \mathbf{x}_{0,2}, t_0) = \beta_1 \psi(t; \mathbf{0}, \mathbf{x}_{0,1}, t_0) + \beta_2 \psi(t; \mathbf{0}, \mathbf{x}_{0,2}, t_0) \quad (1.29)$$

$$\psi(t; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0, t_0) = \psi(t; \mathbf{0}, \mathbf{x}_0, t_0) + \psi(t; \mathbf{u}, \mathbf{0}, t_0). \quad (1.30)$$

Bei den drei Bedingungen handelt es sich um das Superpositionsprinzip bzgl. des Anfangszustandes $\mathbf{x}_0$, des Eingangs $\mathbf{u}$ sowie deren Kombination.

Aufgabe 1.4 Ist das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2 + u, & x(t_0) &= x_0 \\ y &= x \end{aligned} \quad (1.31)$$

mit dem Eingang u , dem Ausgang y und dem Zustand x linear?

Es lässt sich zeigen, dass nun folgender Satz gilt.

Satz 1.1 (Lineares System) Das System (1.25) ist genau dann linear, wenn es sich in die Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.32)$$

überführen lässt.

Dabei bezeichnet die Matrix $\mathbf{A}(t)$ eine $(n \times n)$ -Matrix, $\mathbf{B}(t)$ eine $(n \times m)$ -Matrix, $\mathbf{C}(t)$ eine $(p \times n)$ -Matrix und $\mathbf{D}(t)$ eine $(p \times m)$ -Matrix, deren Einträge lediglich von der Zeit t abhängen dürfen.

Aufgabe 1.5 Sind die Systeme der Abschnitte 1.2.1–1.2.4 linear oder nichtlinear?

Eine weitere wichtige Eigenschaft dynamischer Systeme betrifft die *Zeitinvarianz*. Bevor dieser Begriff erläutert wird, sei festgehalten, dass mit $f(t - T)$, $T > 0$ im Folgenden die um die Zeit T nach rechts verschobene Zeitfunktion $f(t)$ gemeint ist, siehe dazu Abbildung 1.13.

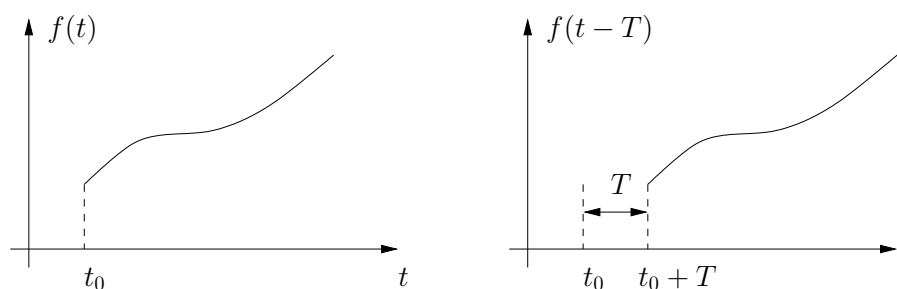


Abbildung 1.13: Verschiebung einer Zeitfunktion.

Definition 1.4 (Zeitinvariantes System) Das System (1.25) ist zeitinvariant, wenn für jede (zulässige) Eingangstrajektorie $\mathbf{u}(t)$, jeden Startzeitpunkt t_0 und $T \geq 0$ der Ausgang $\mathbf{y}(t) = \psi(t; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0, t_0)$ folgende Bedingung mit $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}(t - T)$ erfüllt:

$$\psi(t; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0, t_0) = \psi(t + T; \mathbf{u}', \mathbf{x}_0, t_0 + T). \quad (1.33)$$

Aufgabe 1.6 Ist das System (1.31) zeitinvariant?

Es gilt nun nachstehender Satz:

Satz 1.2 (Lineares, zeitinvariantes System) Das System (1.25) ist genau dann linear und zeitinvariant, wenn es sich in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.34)$$

schreiben lässt.

Aufgabe 1.7 Sind die Systeme der Abschnitte 1.2.1-1.2.4 zeitvariant oder zeitinvariant?

Aufgabe 1.8 Bei einem Förderband wird die Materialmenge, die am Bandanfang auf das Band fällt, durch u bezeichnet. Für den Materialtransport bis ans Ende des Bandes benötigt das Material die Zeit t_T (Totzeit). Wie lässt sich das System (vereinfacht) mathematisch beschreiben? Ist das System linear und zeitinvariant?

Abschließend seien noch einige Begrifflichkeiten für das allgemeine nichtlineare System (1.25) erwähnt. Abhängig davon, welche Größen $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ und t in der System- und Ausgangsfunktion auftauchen, unterscheidet man folgende Systemklassen:

- Ist das System (1.25) nicht von der Zeit t abhängig, spricht man von einem *zeitinvarianten, nichtlinearen* System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.35)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (1.36)$$

- Ist das System (1.25) unabhängig vom Eingang $\mathbf{u}$ bzw. ist der zeitliche Verlauf von $\mathbf{u}(t)$ festgelegt, handelt es sich um ein *freies, nichtlineares* System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.37)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t). \quad (1.38)$$

- Ist das System (1.25) frei und zeitinvariant, spricht man von einem *autonomen, nichtlinearen* System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.39)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (1.40)$$

1.3.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Im Allgemeinen ist die Lösbarkeit bzw. Eindeutigkeit der Lösung eines Differentialgleichungssystems nicht selbstverständlich, was das folgende Beispiel veranschaulicht.

Beispiel 1.2 *Betrachtet wird das einfache nichtlineare System*

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = x_0 = 0. \quad (1.41)$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die beiden Trajektorien

$$x(t) = t^3 \quad \text{und} \quad x(t) = 0 \quad (1.42)$$

Lösungen des Systems (1.41) sind.

Im Folgenden wird das freie, nichtlineare System (1.37) betrachtet. Der nächste Satz liefert eine hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Satz 1.3 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit) *Die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ sei stückweise stetig in t und es existieren Konstanten $0 < L < \infty$ und $r, T > 0$, so dass die Lipschitz-Bedingung*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (1.43)$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ und alle $t \in [t_0, t_0 + T]$ erfüllt ist. Dann besitzt das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.44)$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ für ein (hinreichend kleines) $\delta > 0$.

Die Konstante L in (1.43) wird auch als *Lipschitz-Konstante* bezeichnet. Prinzipiell bedeutet die Lipschitz-Bedingung (1.43), dass eine obere lineare Abschätzung für die Systemfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ existieren muss. Dies wird insbesondere deutlich, wenn man den skalaren Fall $f(x, t)$ mit $x \in \mathbb{R}$ betrachtet, für den (1.43) einer Steigungsabschätzung entspricht:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L. \quad (1.45)$$

Beispiel 1.3 *Die Systemfunktion $f(x) = 3x^{2/3}$ aus Beispiel 1.2 ist zwar stetig, besitzt aber an der Stelle $x_0 = 0$ eine unendliche Steigung. Es existiert also keine Lipschitz-Konstante $L < \infty$ in der Umgebung des Startpunktes $x(0) = x_0 = 0$. Somit kann – wie in Beispiel 1.2 ersichtlich wurde – die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $x(t)$ nicht garantiert werden.*

Satz 1.4 (Globale Existenz und Eindeutigkeit) *Die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ sei stückweise stetig in t und es existiere ein $0 < L < \infty$, so dass die Lipschitz-Bedingung*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (1.46)$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in [t_0, t_0 + T]$ mit $T < \infty$ erfüllt ist. Dann besitzt das System (1.44) genau eine Lösung auf dem Intervall $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Die globale Lipschitz-Eigenschaft (1.46) ist eine sehr starke Forderung, da die obere lineare Abschätzung in (1.46) für alle Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gelten muss. Anders sieht es allerdings bei linearen (autonomen) Systemen aus, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.4 *Betrachtet wird der autonome Fall des linearen Systems (1.34)*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (1.47)$$

In diesem Fall gilt für die linke Seite der Lipschitz-Bedingung (1.43) die Abschätzung

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (1.48)$$

mit der induzierten Matrixnorm $\|\mathbf{A}\|$.¹ Die globale Lipschitz-Bedingung (1.46) ist somit für die Lipschitz-Konstante $L = \|\mathbf{A}\|$ erfüllt. Offensichtlich ist also die Existenz einer eindeutigen Lösung eines linearen autonomen Systems (1.47) stets gewährleistet!

1.3.3 Begriff der Ruhelage

Die Stabilisierung einer Ruhelage (Arbeitspunktstabilisierung) ist ein wichtiges Aufgabenstellung in der Regelungstechnik. Daher soll zunächst für ein freies nichtlineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (1.49)$$

der Begriff der Ruhelage geklärt werden.

Definition 1.5 (Ruhelage) *Der Punkt $\mathbf{x}_R$ ist eine Ruhelage des Systems (1.49), wenn die Bedingung*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, t) = \mathbf{0} \quad (1.50)$$

für alle Zeiten $t \geq 0$ erfüllt ist.

Startet ein System in einer Ruhelage $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_R$, so verbleibt das System für alle Zeiten in diesem Zustand, d.h. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R$. Nichtlineare Systeme zeichnen sich nun dadurch aus, dass sie eine beliebige Anzahl von Ruhelagen besitzen können.

Beispiel 1.5 *Die folgenden drei Beispiele nichtlinearer Systeme besitzen eine unterschiedliche Anzahl an Ruhelagen:*

- | | | | |
|----|---|---------------|---|
| 1) | $\dot{x} = x^2 - 1$ | $\Rightarrow$ | $x_{R,1} = -1, x_{R,2} = 1$ |
| 2) | $\dot{x} = x^2 + 1$ | $\Rightarrow$ | keine Ruhelage |
| 3) | $\dot{x} = \sin(x)$ | $\Rightarrow$ | $x_R = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| 4) | $\dot{x}_1 = x_2 e^{-x_1}$
$\dot{x}_2 = x_1 x_2$ | $\Rightarrow$ | $\mathbf{x}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \text{ und } x_1 \text{ beliebig}\}$ |

¹ Beispielsweise gilt bei Verwendung der Euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$ für die induzierte Matrixnorm $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ (Annahme: $\mathbf{A}$ reellwertig).

Aufgabe 1.9 Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des Räuber-Beute-Modells (1.24) in Abschnitt 1.2.4.

Eine Besonderheit von nichtlinearen Systemen ist, dass sie *endlich viele* Ruhelagen besitzen können. Im Gegensatz dazu gibt es bei linearen, zeitinvarianten, autonomen Systemen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.51)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und der $(n \times n)$ -Systemmatrix $\mathbf{A}$ entweder *genau eine* Ruhelage (Ursprung $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$) oder *unendlich viele* Ruhelagen:

- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$: einzige Ruhelage: $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$
- $\det(\mathbf{A}) = 0$: unendlich viele Ruhelagen

Aufgabe 1.10 Berechnen Sie die Ruhelagen des Feder-Masse-Dämpfer-Systems (1.16) (siehe auch Abbildung 1.7) für die verschwindende Eingangskraft $F(t) = 0$ und in Abhängigkeit der Parameter c und d .

Im Falle eines nichtlinearen Systems mit dem Eingang $\mathbf{u}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (1.52)$$

muss die stationäre Gleichung (1.50) zur Definition der Ruhelage $\mathbf{x}_R$ durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R, t) = \mathbf{0} \quad (1.53)$$

erweitert werden. In diesem Fall wird $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ als *Arbeitspunkt* bezeichnet. Dabei stellt (1.53) ein nichtlineares Gleichungssystem für $\mathbf{x}_R$ in Abhängigkeit des stationären Eingangs $\mathbf{u}_R$ dar.

Bei linearen, zeitinvarianten Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.54)$$

gelten zur Bestimmung der Ruhelagen für einen konstanten Eingang $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$ die folgenden Unterscheidungen:

- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$: einzige Ruhelage: $\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_R$
- $\det(\mathbf{A}) = 0$ und $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R)$: unendlich viele Ruhelagen
- $\det(\mathbf{A}) = 0$ und $\text{Rang}(\mathbf{A}) < \text{Rang}(\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R)$: keine Ruhelage

Aufgabe 1.11 Berechnen Sie die Ruhelagen des linearen, zeitinvarianten Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (1.55)$$

mit den (reellen) Parametern b_1, b_2 .

1.4 Linearisierung nichtlinearer Systeme

Die Steuerung bzw. Regelung linearer (zeitinvarianter) Systeme ist in der Regel wesentlich einfacher als im allgemeinen nichtlinearen Fall. Allerdings können auch nichtlineare Systeme näherungsweise durch ein lineares Modell dargestellt werden, wenn mit kleinen Abweichungen um eine Ruhelage (Arbeitspunkt-Stabilisierung) oder um eine Solltrajektorie (Folgeregelung) zu rechnen ist.

1.4.1 Linearisierung um eine Ruhelage

Für die Linearisierung eines nichtlinearen Systems werden verschiedene Ableitungsnotationen verwendet. Die partielle Ableitung einer skalaren Funktion $f(\mathbf{x})$ an einer Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ wird als Zeilenvektor (Gradient)

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} \quad (1.56)$$

definiert. Für eine vektorwertige Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$ ist die *Jacobi-Matrix* an einer Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ definiert durch

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} . \quad (1.57)$$

Analog dazu werden die Jacobi-Matrizen einer Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ mit mehreren Argumenten durch $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}$ und $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}$ dargestellt. Des Weiteren wird folgender Satz für die Linearisierung eines nichtlinearen Systems benötigt.

Satz 1.5 (Taylorformel zweiter Ordnung) Die Funktion $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei auf der offenen Teilmenge $\mathcal{D}$ des $\mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und es sei $\mathbf{x}_k + k\Delta\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $k \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R} \Delta\mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x}), \quad (1.58)$$

wobei das Restglied $\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})$ die folgende Abschätzung für ein $K > 0$ erfüllt:

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})\| \leq K \|\Delta\mathbf{x}\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\|\Delta\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})\|}{\|\Delta\mathbf{x}\|} = 0. \quad (1.59)$$

Im Folgenden wird ein zeitinvariantes, nichtlineares System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.60)$$

mit der Ruhelage bzw. dem Arbeitspunkt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_R = \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \quad (1.61)$$

betrachtet. Für kleine Abweichungen $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{y})$ um den Arbeitspunkt gilt

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_R + \Delta \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_R + \Delta \mathbf{y}(t). \quad (1.62)$$

Setzt man (1.62) in (1.60) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_R + \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta \mathbf{u}), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}_R + \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.63)$$

wobei $\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{0}$ gilt. Durch Anwendung der Taylor-Entwicklung (1.58) aus Satz 1.5 und Vernachlässigung der Restglieder (für hinreichend kleine Δ -Abweichungen) erhält man

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_0 + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}}_A \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}}_B \Delta \mathbf{u}, & \Delta \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R \\ \mathbf{y}_R + \Delta \mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{\mathbf{y}_R} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}}_C \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}}_D \Delta \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Satz 1.6 (Linearisierung um eine Ruhelage) Es sei $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ eine Ruhelage des Systems (1.60) mit dem zugehörigen stationären Ausgang $\mathbf{y}_R$. Die Abweichungen $\Delta \mathbf{x}(t)$, $\Delta \mathbf{y}(t)$ von $\mathbf{x}_R$ und $\mathbf{y}_R$ bei hinreichend kleinen Änderungen $\Delta \mathbf{u}(t)$, $\Delta \mathbf{x}_0$ von $\mathbf{u}_R$ und $\mathbf{x}_0$ werden durch das lineare, zeitinvariante System

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}, & \Delta \mathbf{x}(t_0) &= \Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.65)$$

mit

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R} \quad (1.66)$$

beschrieben. Das System (1.65) wird als Linearisierung von (1.60) um den Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ bezeichnet.

Beispiel 1.6 (Drei-Tank-System) Das Drei-Tank-System in Abbildung 1.9 wird durch das mathematische Modell (1.23) mit dem Zustand $\mathbf{x} = [h_1, h_2, h_3]^\top$ und dem Eingang $\mathbf{u} = [q_1, q_2]^\top$ sowie der nichtlinearen Kennlinie (1.22) beschrieben. Für die Ruhelagen des Drei-Tank-Systems wird der Fall

$$h_{R,1} > h_{R,2} > h_{R,3} > H > 0.$$

betrachtet (vgl. Abbildung 1.9). Aus den stationären Modellgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= q_{R,1} - a\sqrt{2g(h_{R,1} - h_{R,2})} \\ 0 &= a\sqrt{2g(h_{R,1} - h_{R,2})} - a\sqrt{2g(h_{R,2} - h_{R,3})} \\ 0 &= a\sqrt{2g(h_{R,2} - h_{R,3})} - a\sqrt{2g(h_{R,3} - H)} + q_{R,2} \end{aligned}$$

lassen sich $\mathbf{x}_R = [h_{R,1}, h_{R,2}, h_{R,3}]^T$ rekursiv in Abhängigkeit von $\mathbf{u}_R = [q_{1,R}, q_{2,R}]^T$ berechnen:

$$h_{R,3} = \frac{1}{2g} \left(\frac{q_{R,1} + q_{R,2}}{a} \right)^2 + H, \quad h_{R,2} = \frac{1}{2g} \left(\frac{q_{R,1}}{a} \right)^2 + h_{R,3}, \quad h_{R,1} = \frac{1}{2g} \left(\frac{q_{R,1}}{a} \right)^2 + h_{R,2}. \quad (1.67)$$

Für den stationären Ausgang $y_R = q_{R,3}$ gilt zudem

$$y_{R,3} = q_{R,3} = a \sqrt{2g(h_{R,3} - H)} \quad (1.68)$$

Für die Aufstellung des linearisierten Systems (1.65) werden die Jacobi-Matrizen (1.66) benötigt. Für $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R}$ ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R} &= \begin{bmatrix} \frac{-a}{\sqrt{2g(h_1-h_2)}} & \frac{a}{\sqrt{2g(h_1-h_2)}} & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2g(h_1-h_2)}} & \frac{-a}{\sqrt{2g(h_1-h_2)}} - \frac{a}{\sqrt{2g(h_2-h_3)}} & \frac{a}{\sqrt{2g(h_2-h_3)}} \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{2g(h_2-h_3)}} & \frac{-a}{\sqrt{2g(h_2-h_3)}} - \frac{a}{\sqrt{2g(h_3-H)}} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R} \\ &= \frac{a^2 g}{q_{R,1}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2q_{R,1}+q_{R,2}}{q_{R,1}+q_{R,2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Insgesamt lautet das um die Ruhelage (1.67), (1.68) linearisierte System

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix}}_{\Delta \dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\frac{a^2 g}{q_{R,1}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2q_{R,1}+q_{R,2}}{q_{R,1}+q_{R,2}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{u}} \\ \Delta \mathbf{y} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{a^2 g}{q_{R,1}+q_{R,2}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \Delta \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Aufgabe 1.12 (Mathematisches Pendel) Abbildung 1.14 zeigt ein mathematisches Einfachpendel mit der Stablänge l und der Punktmasse m . Als Ausgangsgröße dient die horizontale Auslenkung der Masse. Da die Punktmasse m kein Trägheitsmoment besitzt und der Stab der Länge l als masselos angenommen wird (deswegen “mathematisches” Pendel), reduziert sich das Trägheitsmoment des Pendels um den Aufhängepunkt auf den Steinerschen Anteil

$$J = ml^2.$$

Die angreifende Gewichtskraft mg bewirkt das rückstellende Moment

$$M = -mgl \sin \phi$$

in Abhängigkeit des Pendelwinkels ϕ . Mit Hilfe des Drallsatzes $J\dot{\omega} = M$ und der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\phi}$ ergibt sich das dynamische Modell des Pendels zu

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi, \quad y = l \sin \phi. \quad (1.70)$$

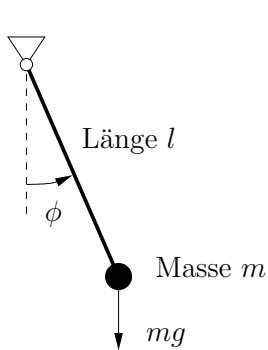


Abbildung 1.14: Einfachpendel.

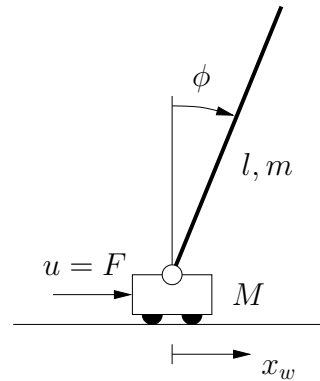


Abbildung 1.15: Wagen mit inversem Pendel.

Bringen Sie das System (1.70) auf die Zustandsraumdarstellung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit dem Zustand $\mathbf{x} = [\phi, \omega = \dot{\phi}]^T$. Bestimmen Sie sämtliche Ruhelagen $\mathbf{x}_R = [\phi_R, 0]^T$ des nichtlinearen Modells (1.16) für das mathematische Pendel (Abbildung 1.14). Berechnen Sie anschließend das linearisierte Modell um die untere Ruhelage $\mathbf{x}_{R,1} = [0, 0]^T$ und um die obere Ruhelage $\mathbf{x}_{R,2} = [\pi, 0]^T$.

Lösung: Die Ruhelagen lauten $\mathbf{x}_R = [k\pi, 0]^T$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Linearisierung um die untere Ruhelage $\mathbf{x}_{R,1} = [0, 0]^T$ lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\omega \end{bmatrix}, \quad \Delta y = \begin{bmatrix} l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\omega \end{bmatrix}. \quad (1.71)$$

Für die obere Ruhelage $\mathbf{x}_{R,2} = [\pi, 0]^T$ erhält man

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\omega \end{bmatrix}, \quad \Delta y = \begin{bmatrix} -l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\omega \end{bmatrix}. \quad (1.72)$$

Aufgabe 1.13 (Pendel-Wagen-System) Eine Erweiterung des mathematischen Pendels ist das Pendel-Wagen-System in Abbildung 1.15 mit den Massen M und m von Wagen und Pendel, der Stablänge l und der angreifenden Kraft $u = F$. Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus kann das folgende nichtlineare dynamische Modell hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{6g(m+M)\sin(\phi) - 3\cos(\phi)(2u + lm\dot{\phi}^2\sin(\phi))}{l(m+4M+3m\sin^2(\phi))} \\ \ddot{x}_w &= \frac{8u + 4lm\dot{\phi}^2\sin(\phi) - 3mg\sin(2\phi)}{5m+8M-3m\cos(2\phi)} \end{aligned} \quad (1.73)$$

Bringen Sie das System auf die Zustandsraumdarstellung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ mit dem Zustand $\mathbf{x} = [\phi, \dot{\phi}, x_w, \dot{x}_w]^T$. Linearisieren Sie anschließend das System um die obere Ruhelage $\mathbf{x}_R = [0, 0, x_{R,w}, 0]^T$ mit $x_{R,w}$ konstant aber beliebig.

Lösung: Das linearisierte System lautet

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3mg}{m+4M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{l(m+4M)} \\ 0 \\ \frac{4}{m+4M} \end{bmatrix} \Delta u. \quad (1.74)$$

1.4.2 Linearisierung um eine Trajektorie

Neben der Linearisierung um eine Ruhelage ist auch die Linearisierung um eine Trajektorie von Bedeutung. Als Lösungskurve bzw. Trajektorie eines nichtlinearen Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\quad (1.75)$$

wird eine Eingangstrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ und dazugehörige Zustands- und Ausgangstrajektorien $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{y}^*(t)$ bezeichnet, die durch Vorgabe von $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ exakt nachgefahren werden, d.h.

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)). \quad (1.76)$$

Für kleine Abweichungen $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{y})$ um die Lösungskurve gilt

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \Delta\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) + \Delta\mathbf{y}(t). \quad (1.77)$$

Setzt man (1.77) in (1.75) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^* + \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u}), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}^*(t_0) + \Delta\mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}^* + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u}).\end{aligned}\quad (1.78)$$

Durch Anwendung der Taylor-Entwicklung (1.58) aus Satz 1.5 und Vernachlässigung der Restglieder (für hinreichend kleine Δ -Abweichungen) erhält man

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^* + \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}_{\dot{\mathbf{x}}^*} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)}}_{\mathbf{A}(t)} \Delta\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)}}_{\mathbf{B}(t)} \Delta\mathbf{u}, & \Delta\mathbf{x}(t_0) &= \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^* \\ \mathbf{y}^* + \Delta\mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}_{\mathbf{y}^*} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)}}_{\mathbf{C}(t)} \Delta\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)}}_{\mathbf{D}(t)} \Delta\mathbf{u}.\end{aligned}\quad (1.79)$$

Satz 1.7 (Linearisierung um eine Trajektorie) *Es seien $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{y}^*(t)$ die Lösungskurve des Systems (1.75) für eine Eingangstrajektorie $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ und einen vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*$. Die Abweichungen $\Delta\mathbf{x}(t)$, $\Delta\mathbf{y}(t)$ von $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{y}^*(t)$ bei hinreichend kleinen Änderungen $\Delta\mathbf{u}(t)$ von $\mathbf{u}^*(t)$ und $\Delta\mathbf{x}_0$ von $\mathbf{x}_0^*$ werden durch das lineare, zeitvariante System*

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\Delta\mathbf{u}, & \Delta\mathbf{x}(t_0) &= \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^* \\ \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\Delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad (1.80)$$

mit

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)}, \quad \mathbf{B}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)}, \quad \mathbf{C}(t) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)}, \quad \mathbf{D}(t) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)} \quad (1.81)$$

beschrieben. Das System (1.80), (1.81) wird als Linearisierung von (1.75) um die Trajektorie $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ bezeichnet.

Man beachte, dass die Linearisierung eines *zeitinvarianten*, nichtlinearen Systems (1.75) *um eine Solltrajektorie* im Allgemeinen ein *zeitvariantes*, lineares System ergibt!

Beispiel 1.7 (Roboterarm) Betrachtet wird erneut der Roboterarm (Abbildung 1.8) mit dem Modell (1.19). Zur Aufnahme eines Werkstückes soll der Roboterarm von einer Anfangsruhelage $\mathbf{x}_{R,0} = [\phi_0^*, 0, r_0^*, 0]^\top$ in eine Zielruhelage $\mathbf{x}_{R,1} = [\phi_1^*, 0, r_1^*, 0]^\top$ überführt werden. Dazu werden die folgenden Zeitfunktionen angesetzt

$$\phi^*(t) = \phi_0^* + \frac{\phi_1^* - \phi_0^*}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right], \quad r^*(t) = r_0^* + \frac{r_1^* - r_0^*}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right]. \quad (1.82)$$

Mit $\omega = \dot{\phi}$ und $v = \dot{r}$ erhält man die Solltrajektorie für den Zustand

$$\mathbf{x}^*(t) = [\phi^*(t) \quad \omega^*(t) \quad r^*(t) \quad \dot{r}^*(t)]^\top. \quad (1.83)$$

Durch Auflösen der zweiten und vierten Differentialgleichung in (1.19) nach dem Moment $M(t)$ und der Kraft $F(t)$ erhält man direkt die Solltrajektorien für den Eingang²

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{bmatrix} M^*(t) \\ F^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2mr^*(t)v^*(t)\omega^*(t) + J^*(t)\dot{\omega}^*(t) \\ m[\dot{v}^*(t) - r^*(t)\omega^*(t)^2] \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

mit

$$J^*(t) = J_0 + J_1 + mr^*(t)^2.$$

In Abbildung 1.16 sind die Solltrajektorien beispielhaft für den Übergang

$$\begin{bmatrix} \phi_0^* \\ r_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^\circ \\ 0.1 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \phi_1^* \\ r_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90^\circ \\ 0.5 \text{ m} \end{bmatrix}$$

für die Übergangszeit $T = 2 \text{ s}$ dargestellt (Parameter: $J_0 = 0.05 \text{ kg m}^2$, $J_1 = 0.1 \text{ kg m}^2$, $m = 3 \text{ kg}$).

Die Linearisierung des nichtlinearen Systems (1.19) entlang der Solltrajektorien $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ liefert die zeitvarianten Systemmatrizen

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2mr^*(t)v^*(t)}{J^*(t)} & \frac{-2m[r^*(t)M^*(t) + [J^*(t) + 2mr^*(t)]v^*(t)\omega^*(t)]}{J^*(t)^2} & \frac{-2mr^*(t)\omega^*(t)}{J^*(t)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2r^*(t)\omega^*(t) & \omega^*(t)^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J^*(t)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

für das um die Solltrajektorien linearisierte Systemmodell

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\Delta \mathbf{u}, \quad \Delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*.$$

Eine wichtige Anwendung der Linearisierung um eine Trajektorie ist die *Zwei-Freiheits-grade-Regelung*, bei der ein Regelkreis bestehend aus Strecke und Regelung durch eine *Vorsteuerung* ergänzt wird, siehe Abbildung 1.17. Der Vorteil dieses Ansatzes besteht in der separaten Auslegung des Störverhaltens durch die Regelung und des Führungsverhaltens durch die Vorsteuerung.

Die Vorsteuerung stellt eine Steuertrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ zur Verfügung, so dass das nominelle System einer gewünschten Ausgangstrajektorie $\mathbf{y}^*(t)$ exakt nachfährt, siehe (1.76). Somit

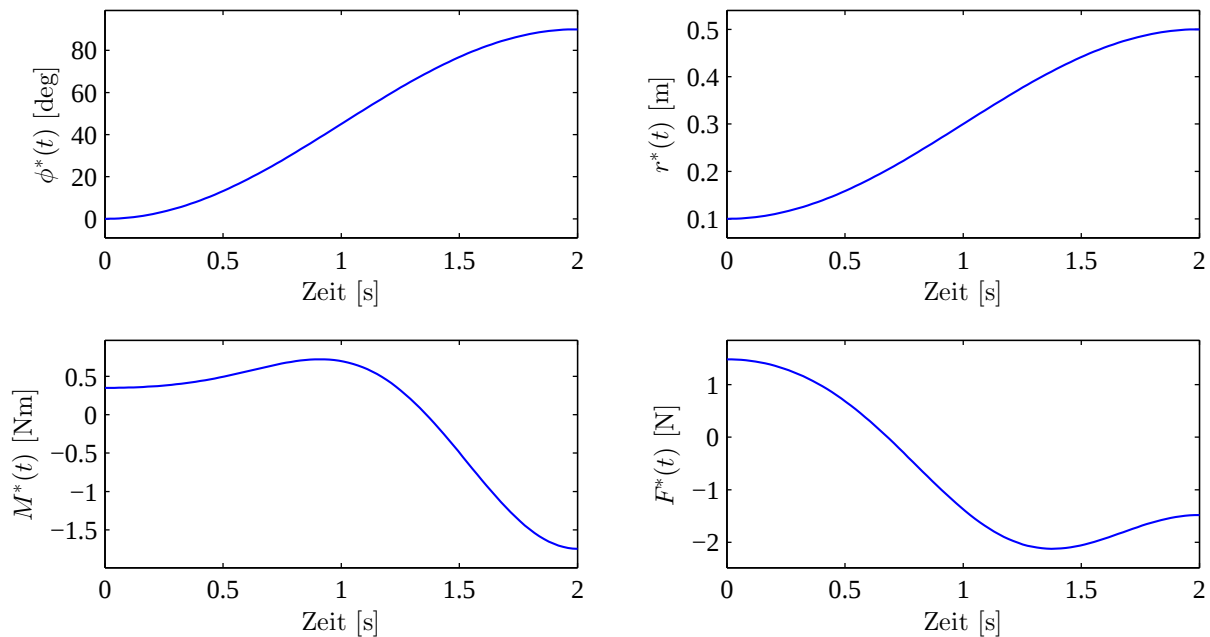


Abbildung 1.16: Solltrajektorien für den Lastwechsel des Roboterarms (Beispiel 1.7).

muss die unterlagerte Regelung lediglich die Abweichungen

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t)$$

von der Solltrajektorie $\mathbf{y}^*(t)$ ausregeln, die z.B. im Falle von Störungen oder Modellungenauigkeiten auftreten können. Die gesamte Stellgröße ergibt sich somit additiv aus den Steuer- und Regelanteilen zu

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \Delta \mathbf{u}(t) \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}(\Delta \mathbf{y}(t)).$$

Zur Auslegung des Regelgesetzes $\mathbf{u} = \mathbf{q}(\Delta \mathbf{y})$ kann das linearisierte zeitvariante Modell (1.80) verwendet werden. Dies ist in der Regel einfacher als das nichtlineare Modell $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ des Systems für den Reglerentwurf zu verwenden.

Ein Beispiel für diese Methodik wird in der Vorlesung “Methoden der Optimierung und Optimalsteuerung” behandelt. Auf die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung für *lineare* Systeme wird im späteren Teil dieser Vorlesung noch näher eingegangen.

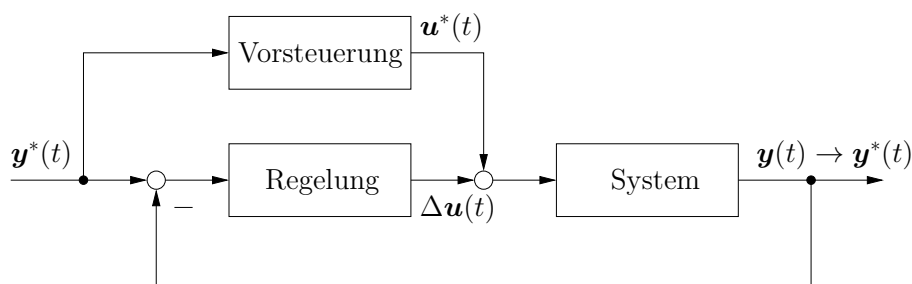


Abbildung 1.17: Zwei-Freiheitsgrade-Regelungsstruktur mit Ausgangsregelung.

1.5 Literatur

- [1] O. Föllinger und D. Franke. *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*. Oldenbourg, München, 1982.
- [2] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 3. Auflage, 2002.
- [3] G. Ludyk. *Theoretische Regelungstechnik 1*. Springer, Berlin, 1995.
- [4] L. Padulo und M.A. Arbib. *System Theory*. W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1974.
- [5] W.J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2. Auflage, 1996.

Kapitel 2

Beschreibung und Eigenschaften linearer Systeme

Für lineare dynamische Systeme existieren etablierte Methoden, um die Systemeigenschaften zu analysieren und lineare Regler zu entwerfen. In diesem Kapitel werden grundlegende Konzepte zur Beschreibung linearer dynamischer Systeme behandelt. Einige Punkte wurden bereits in den Vorlesungen “Einführung in die Regelungstechnik” und “Signale und Systeme” angesprochen und werden an dieser Stelle der Vollständigkeit halber wiederholt bzw. vertieft, z.B. im Hinblick auf lineare Mehrgößensysteme.

Im Folgenden wird von der Zustandsraumdarstellung eines linearen (zeitinvarianten) Mehrgößensystems der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ und den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ausgegangen.

2.1 Beschreibung im Zustandsraum

Lineare dynamische Systeme lassen sich im Zustandsraum mit Hilfe der *Transitionsmatrix* beschreiben. Im Folgenden wird diese Vorgehensweise erläutert und der Bezug zur Sprung- und Impulsantwort hergestellt.

2.1.1 Transitionsmatrix

Im Weiteren betrachte man zunächst das lineare, autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.\tag{2.2}$$

Da bei zeitinvarianten Systemen ist der Anfangszeitpunkt t_0 beliebig ist, wird er im Weiteren auf $t_0 = 0$ gesetzt.

Die Lösung von (2.2) kann mit Hilfe der sogenannten $(n \times n)$ -*Transitionsmatrix* $\Phi(t)$ dargestellt werden

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0} . \quad (2.3)$$

Wenn also die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ bekannt ist, kann die Lösung von (2.2) für jeden Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ direkt angegeben werden.

Um einen Ausdruck für $\Phi(t)$ zu erhalten, sei zunächst daran erinnert, dass in Beispiel 1.4 bereits die Existenz einer eindeutigen Lösung von (2.2) mit Hilfe der Lipschitz-Eigenschaft gezeigt wurde. Damit ist aber gewährleistet, dass $\mathbf{x}(t)$ – zumindest für hinreichend kleine Zeiten $t > 0$ – mit Hilfe einer *Picard-Iteration* sukzessive angenähert werden kann:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_0 d\tau = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t) \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A}\tau) \mathbf{x}_0 d\tau = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} \right) \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k(t) &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \right) \mathbf{x}_0 . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Da $\mathbf{x}_k(t)$ für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $\mathbf{x}(t)$ konvergiert, gilt für die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ in (2.3) offensichtlich die Beziehung

$$\boxed{\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \quad \text{bzw.} \quad \Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)} . \quad (2.5)$$

Aufgrund der Ähnlichkeit der Reihenentwicklung zur (skalaren) Exponentialfunktion wird $\Phi(t)$ häufig auch als Matrixexponentialfunktion $\exp(\mathbf{A}t)$ geschrieben.

Beispiel 2.1 Für das skalare System

$$\dot{x} = ax , \quad x(0) = x_0 \quad (2.6)$$

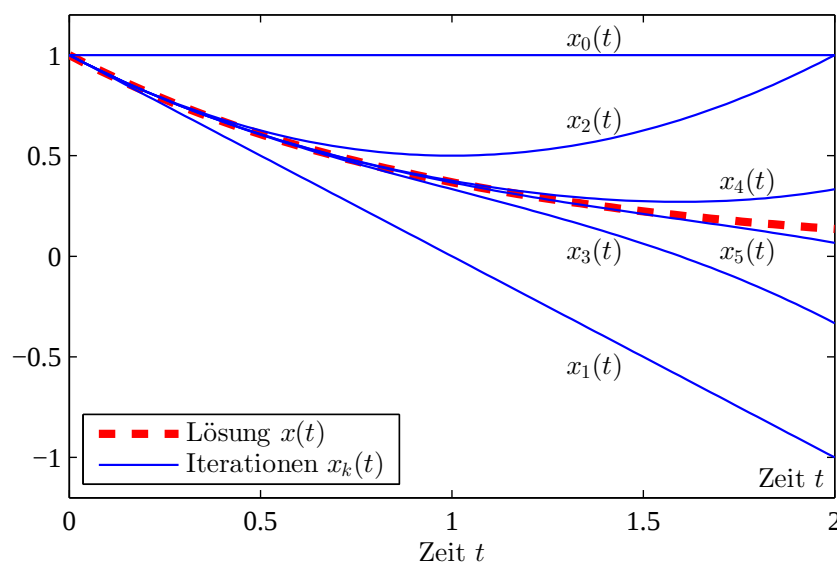
mit der (reellwertigen) Konstanten a liefert die Picard-Iteration (2.4) die Funktionenfolge

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0 d\tau = x_0(1 + at) \\ x_2(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0(1 + a\tau) d\tau = x_0 \left(1 + at + a^2 \frac{t^2}{2} \right) \\ &\vdots \\ x_k(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0 \left(1 + a\tau + \dots + a^{k-1} \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} \right) d\tau , \end{aligned} \quad (2.7)$$

woraus sich für $k \rightarrow \infty$ die Lösung

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^k}{k!} \right) = x_0 e^{at} \quad (2.8)$$

ergibt, siehe Abbildung 2.1.

Abbildung 2.1: Picard-Iterationen (2.7) für $a = -1$ und $x_0 = 1$ (Beispiel 2.1).

Aufgabe 2.1 Berechnen Sie die Transitionsmatrix der folgenden Systeme

$$\text{a) } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

Es kann gezeigt werden, dass die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ die folgenden Beziehungen erfüllt:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Anfangswert} & \quad \Phi(0) = I \\ 2) \text{ Produkteigenschaft} & \quad \Phi(t+s) = \Phi(t) \Phi(s) \\ 3) \text{ Invertierbarkeit} & \quad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \\ 4) \text{ Differenzierbarkeit} & \quad \frac{d}{dt} \Phi(t) = A \Phi(t) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Im nächsten Schritt soll nun ein allgemeines lineares, zeitinvariantes System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

betrachtet werden. Die Herleitung der allgemeinen Lösung von (2.10) erfolgt über die *Methode der Variation der Konstanten*. Zunächst wird die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems (2.2) mit der zeitvarianten Größe $\mathbf{x}_0(t)$ angesetzt, d.h. $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0(t)$, und in (2.10) eingesetzt

$$\dot{\Phi}(t)\mathbf{x}_0(t) + \Phi(t)\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (2.11)$$

Mit den Eigenschaften 3) und 4) aus (2.9) vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \Phi(-t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (2.12)$$

bzw.

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(0) + \int_0^t \Phi(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.13)$$

Mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und der Eigenschaft 2) aus (2.9) gilt offensichtlich

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.14)$$

Dieses wichtige Ergebnis ist im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 2.1 Die Lösung des Systems (2.10) errechnet sich mit Hilfe der Transitionsmatrix (2.5) zu

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}. \quad (2.15)$$

Sowohl die Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t)$ als auch der Ausgang $\mathbf{y}(t)$ setzen sich also aus zwei überlagerten Anteilen zusammen, die die freie Bewegung und die durch den Eingangsverlauf $\mathbf{u}(t)$ erzwungene Bewegung charakterisieren:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\Phi(t)\mathbf{x}_0}_{\text{homogene Lsg.}} + \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0}_{\text{freie Bewegung}} + \underbrace{\int_0^t \mathbf{C}\Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau}_{\text{erzwungene Bewegung}} + \underbrace{\mathbf{D}\mathbf{u}(t)}_{\text{Durchgriff}} \quad (2.17)$$

Für lineare, zeitvariante Systeme (1.32) lassen sich analoge Überlegungen anstellen. In diesem Fall hängt die Transitionsmatrix zusätzlich vom Startzeitpunkt $\Phi(t, t_0)$ ab. Der lineare, zeitvariante Fall soll aber an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden.

2.1.2 Laplace-Transformation der Transitionsmatrix

Eine erste Möglichkeit zur Berechnung von $\Phi(t)$ basiert auf der Laplace-Transformation, die aus der Vorlesung “Einführung in die Regelungstechnik” bekannt ist. Wendet man die Laplace-Transformation auf das System (2.10) an, so erhält man

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}\mathbf{U}(s).$$

bzw.

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (2.18)$$

mit den Laplace-transformierten Größen $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ und $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\}$. Des Weiteren ergibt die Laplace-Transformation von (2.15) unter Verwendung des Faltungssatzes

$$\mathbf{X}(s) = \hat{\Phi}(s)\mathbf{x}_0 + \hat{\Phi}(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s). \quad (2.19)$$

Der Vergleich von (2.18) und (2.19) zeigt, dass die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ durch

$$\hat{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (2.20)$$

gegeben ist.

Aufgabe 2.2 Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Es existieren eine Reihe von analytischen und numerischen Verfahren zur alternativen Berechnung der Transitionsmatrix $\Phi(t)$, z.B. das Entwicklungstheorem von *Sylvester*. Ein weiteres Verfahren basiert auf der Zustandstransformation in die *Diagonalform* – bzw. allgemeiner – in die *Jordansche Normalform*. Diese Transformation wird im Abschnitt 2.2 näher betrachtet.

2.1.3 Sprung- und Impulsantwort

Die allgemeine Darstellung (2.15) vereinfacht sich erheblich, wenn die Impuls- und Sprungantwort für das System (2.10) betrachtet wird. Es sei daran erinnert, dass der *Dirac-Impuls* bzw. die *Dirac Delta-Funktion* als der Grenzwert

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(t), \quad r_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.21)$$

mit den Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(a - \tau) d\tau = f(a) \quad (2.22)$$

definiert ist. Für den *Einheitssprung* gilt

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Die Impulsantwort $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t)$ für einen (vektoriellen) Dirac-Impuls $\mathbf{u}(t) = [\delta(t), \dots, \delta(t)]^T$ mit verschwindenden Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und ohne Durchgriff $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ergibt sich direkt aus (2.17) zu

$$\boxed{\mathbf{g}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}(t) = \mathbf{c}^T\Phi(t)\mathbf{b} \quad (m = p = 1)} \quad (2.24)$$

Die Funktion $\mathbf{g}(t)$ wird auch als *Gewichtsfunktion* bezeichnet. Mit Hilfe von $\mathbf{g}(t)$ ist auch ersichtlich, dass das Ausgangsverhalten $\mathbf{y}(t)$ in (2.17) durch das Faltungsintegral ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

beschrieben werden kann. Die Sprungantwort $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t)$ des Systems (2.10) auf einen Einheitssprung $\mathbf{u}(t) = [\sigma(t), \dots, \sigma(t)]^T$ kann aus der Integration der Impulsantwort $\mathbf{g}(t)$ gewonnen werden, d.h.

$$\mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{C}\Phi(\tau)\mathbf{B} d\tau \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T\Phi(\tau)\mathbf{b} d\tau \quad (m = p = 1). \quad (2.26)$$

Für $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ lässt sich dieses Integral in geschlossener Form darstellen:

$$\boxed{\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}(\Phi(t) - \mathbf{I})\mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{h}(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}(\Phi(t) - \mathbf{I})\mathbf{b} \quad (m=p=1)} \quad (2.27)$$

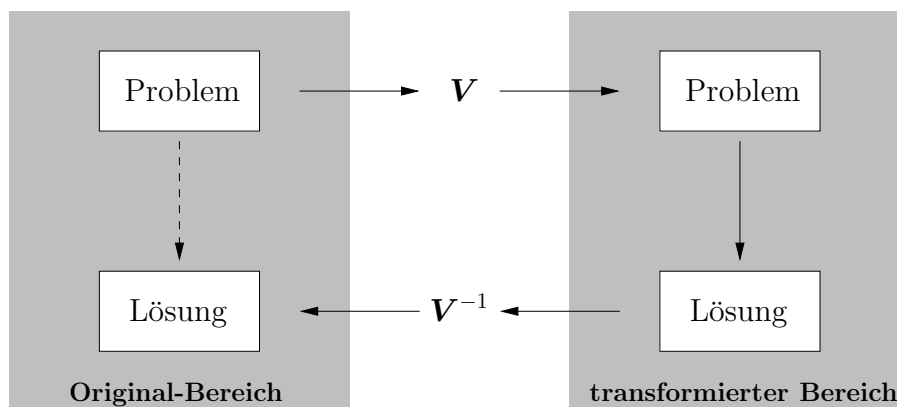


Abbildung 2.2: Zustandstransformation zur einfacheren Problemlösung.

2.2 Zustandstransformation

Die Wahl der Zustandsgrößen eines dynamischen Systems ist nicht eindeutig. So kann das lineare System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2.28)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ durch eine *reguläre Zustandstransformation*

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t)} \quad (2.29)$$

mit dem neuen Zustand $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ in die äquivalente Form

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}}\mathbf{u}, & \tilde{\mathbf{x}}(0) &= \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{C}}}\tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{D}}}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2.30)$$

gebracht werden. Von elementarer Bedeutung ist, dass die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$ bei einer regulären ($n \times n$)-Matrix $\mathbf{V}$ die gleichen Eigenwerte und die gleiche Determinante besitzen, d.h.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}), \\ \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}).\end{aligned}\quad (2.31)$$

Durch die geeignete Wahl von $\mathbf{V}$ kann das neue System auf eine bestimmte Form gebracht werden, in der z.B. die Berechnung der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ oder die Auslegung eines Reglers einfacher ist. In Abbildung 2.2 ist dieses prinzipielle Vorgehen veranschaulicht.

Die Lösung des transformierten Systems (2.30) lautet (siehe Satz 2.1)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(t) &= \tilde{\Phi}(t)\tilde{\mathbf{x}}_0 + \int_0^t \tilde{\Phi}(t-\tau)\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(\tau) \, d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t).\end{aligned}\quad (2.32)$$

Transformiert man (2.32) über die Vorschrift (2.29) in den Original-Zustand $\mathbf{x}$ zurück und verwendet dabei die Ausdrücke für $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ aus (2.30), so erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{V}\tilde{\Phi}(t)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{V}\tilde{\Phi}(t-\tau)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).\end{aligned}\quad (2.33)$$

Durch Vergleich mit der Original-Lösung (2.15) wird der Zusammenhang zwischen $\Phi(t)$ und $\tilde{\Phi}(t)$ ersichtlich:

$$\boxed{\Phi(t) = \mathbf{V}\tilde{\Phi}(t)\mathbf{V}^{-1}}. \quad (2.34)$$

Wie bereits oben erwähnt wurde, kann die Transformation (2.29) verwendet werden, um die Lösung des Original-Systems (2.28) nach Satz 2.1 zu vereinfachen. Dazu muss die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ so angesetzt werden, dass sich die Berechnung der Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ des transformierten Systems (2.30) einfach gestaltet. Im Folgenden werden dazu zwei Spezialfälle betrachtet, nämlich die Transformation auf *Diagonalform* bzw. auf *Jordan-Form*.

2.2.1 Transformation auf Diagonalform

Eine wichtige Ähnlichkeitstransformation ist die Transformation auf *Diagonalform*. Die Spalten der zugehörigen Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \quad (2.35)$$

setzen sich aus den Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ zusammen, die mit Hilfe der Eigenwerte λ_i , $i = 1, \dots, n$ durch

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

definiert sind. Damit die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ regulär ist, sei im Folgenden angenommen, dass die Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ linear unabhängig sind. Dies ist insbesondere dann gegeben, wenn die Eigenwerte λ_i einfach sind.

Dann gilt offensichtlich

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = [\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{v}_n] = \text{diag}(\lambda_i)\mathbf{V}$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \text{diag}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Das transformierte System in $\tilde{\mathbf{x}}$ -Koordinaten lässt sich also in der Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B} \quad (2.37)$$

darstellen, wobei die Dynamik jedes Zustandes $\tilde{x}_i$, $i = 1, \dots, n$ durch den entsprechenden Eigenwert λ_i bestimmt ist. Gemäß (2.5) ergibt sich die transformierte Transitionsmatrix

$$\tilde{\Phi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}^k \frac{t^k}{k!} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}}^k = \text{diag}(\lambda_i^k),$$

wobei die einzelnen Diagonalelemente durch die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ausgedrückt werden können (siehe auch (2.8) in Beispiel 2.1):

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Die Transitionsmatrix des Originalproblems erhält man aus (2.34). Es sei angemerkt, dass die vorher getroffene Annahme, nämlich dass alle Eigenwerte einfach sind, nur hinreichend, nicht aber notwendig ist, um ein lineares System in Diagonalform zu transformieren.

Algebraische und geometrische Vielfachheit: Um von der obigen Annahme der einfachen Eigenwerte abzurücken, sei in Erinnerung gerufen, was algebraische und geometrische Vielfachheit bedeutet. Das *charakteristische Polynom* $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ der Matrix $\mathbf{A}$ habe m verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ mit den entsprechenden Vielfachheiten $n_1, \dots, n_m$. Dann gelten folgende Bezeichnungen:

- n_i ist die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_i , also die Vielfachheit der Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.
- g_i ist die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_i , also die Dimension des Eigenraums von λ_i , d.h.

$$g_i = \dim(\text{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})) \quad \text{bzw.} \quad g_i = n - \text{Rang}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}). \quad (2.39)$$

Einfacher ausgedrückt stellt g_i die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}$ zum Eigenwert λ_i dar. Dabei gilt stets $1 \leq g_i \leq n_i$.

Mit Hilfe dieser Definitionen lässt sich zeigen, dass eine $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ genau dann durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform gebracht werden kann, wenn für jeden Eigenwert λ_i die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist, d.h. $n_i = g_i$, $i = 1, \dots, m$. In diesem Fall sind die insgesamt n Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ linear unabhängig und spannen somit den $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ auf.

Beispiel 2.2 Als Beispiel wird das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.40)$$

betrachtet. Die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ besitzt die folgenden Eigenwerte:

Eigenwert λ_i	algebr. Vielfachheit n_i	geom. Vielfachheit $g_i \leq n_i$
$\lambda_1 = 2$	2	2
$\lambda_2 = 1$	1	1

Die geometrische Vielfachheit lässt sich durch die Rangüberprüfung

$$\text{Rang}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = 1, \quad \text{Rang}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = 2$$

ermitteln. Da für beide Eigenwerte $n_i = g_i$ gilt, existiert eine Eigenbasis der Matrix $\mathbf{A}$. Für $\lambda_1 = 2$ erhält man aus

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2 \quad (2.41)$$

die Eigenvektoren $\mathbf{v}_1 = [0, 0, 1]^\top$ und $\mathbf{v}_2 = [0, 1, 0]^\top$. Für den zweiten Eigenwert führt

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

auf $\mathbf{v}_3 = [1, 1, -1]^\top$. Somit lautet die Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

und das zu (2.40) äquivalente System im transformierten Zustand $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t)$ ist

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0. \quad (2.44)$$

Damit erhält man direkt die Transitionsmatrix des transformierten Systems (2.44)

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

bzw. des Originalsystems (2.40)

$$\Phi(t) = \mathbf{V}\tilde{\Phi}(t)\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ -e^t + e^{2t} & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Man kann die soeben besprochene Methode der Diagonalisierung auch für Systeme mit konjugiert komplexen Eigenwerten anwenden. Wie man in der folgenden Aufgabe allerdings sieht, sind in diesem Fall sowohl die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ als auch die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ komplexwertige Matrizen.

Aufgabe 2.3 Transformieren Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x} \quad (2.47)$$

auf Diagonalform und berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ zu (2.47).

2.2.2 Nichtdiagonalähnliche Systemmatrizen

Im vorigen Abschnitt wurde für die Transformation auf Diagonalform angenommen, dass die Eigenwerte λ_i der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ die gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen, was vor allem bei einfachen Eigenwerten der Fall ist. Diese Annahme soll nun gelockert werden.

Im Folgenden wird angenommen, λ sei ein Eigenwert der $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit 1, so dass aus der Eigenwertgleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1 \quad (2.48)$$

lediglich ein Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ bestimmt werden kann. In diesem Fall können $(n-1)$ zusätzliche linear unabhängige *Hauptvektoren* $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ durch Lösung der Gleichungen

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.49)$$

bestimmt werden. Bildet man nun die Transformationsmatrix (2.35), so kann gezeigt werden, dass nach der Ähnlichkeitstransformation die neue Matrix

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{N}}. \quad (2.50)$$

entsteht. Zur Berechnung der Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t}$ ist es hilfreich, $\tilde{\mathbf{A}}$ in die Diagonalmatrix $\lambda\mathbf{I}$ und die Matrix $\mathbf{N}$ aufzuspalten. Somit erhält man¹

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t} = e^{\lambda\mathbf{I}t}e^{\mathbf{N}t}, \quad (2.51)$$

Zur Berechnung von $e^{\mathbf{N}t}$ kann die Reihendarstellung (2.5)

$$e^{\mathbf{N}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{N}^k \frac{t^k}{k!}$$

verwendet werden. Genauere Betrachtung von $\mathbf{N}$ zeigt dabei, dass die Nebendiagonalen bei $\mathbf{N}^k$ jeweils um eine Zeile nach oben wandern, z.B. $\mathbf{N}^2$ ergibt sich zu

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

¹ Die Aufspaltung (2.51) ist möglich, da die Matrizen $\mathbf{I}$ und $\mathbf{N}$ kommutieren, d.h. die Beziehung $\mathbf{I}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{I}$ erfüllt ist.

Somit kann die Transitionsmatrix (2.51) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Aufgabe 2.4 Transformieren Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

auf die Form von (2.50). Berechnen Sie anschließend die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$.

2.2.3 Behandlung konjugiert komplexer Eigenwerte

In Aufgabe 2.3 wurde ersichtlich, dass konjugiert komplexe Eigenwerte einer Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ bei der Transformation auf Diagonalform ebenfalls zu konjugiert komplexen Matrizen $\mathbf{V}$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ führen. In der Praxis ist man allerdings häufig daran interessiert, mit reellwertigen Matrizen zu rechnen.

Um diesen Fall näher zu untersuchen, wird eine Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ betrachtet, die $r = n/2$ paarweise verschiedene konjugiert komplexe Eigenwerte der Form

$$\lambda_i^+ = \alpha_i + j\beta_i, \quad \lambda_i^- = \alpha_i - j\beta_i, \quad i = 1, \dots, r$$

besitzt. Mit Hilfe der regulären Matrix

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -j \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ j & -j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & j & -j \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

und den konjugiert komplexen Eigenvektoren $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_i^-)$, $i = 1, \dots, r$ wird die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ wie folgt angesetzt

$$\mathbf{V} = \underbrace{[\mathbf{v}_1^+, \mathbf{v}_1^-, \dots, \mathbf{v}_r^+, \mathbf{v}_r^-]}_{\tilde{\mathbf{V}}} \mathbf{T} = \left[\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1^+ + \mathbf{v}_1^-)}_{\text{Re}(\mathbf{v}_1)}, \underbrace{\frac{j}{2}(\mathbf{v}_1^- - \mathbf{v}_1^+)}_{\text{Im}(\mathbf{v}_1)}, \dots, \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{v}_r^+ + \mathbf{v}_r^-)}_{\text{Re}(\mathbf{v}_r)}, \underbrace{\frac{j}{2}(\mathbf{v}_r^- - \mathbf{v}_r^+)}_{\text{Im}(\mathbf{v}_r)} \right].$$

Die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems besitzt dann die Form

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\tilde{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}}}_{=\mathbf{\Lambda}} \mathbf{T} \quad (2.54)$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 + j\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 - j\beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r + j\beta_r & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_r - j\beta_r \end{bmatrix}}_{=\mathbf{\Lambda}} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r & \beta_r \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_r & \alpha_r \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Für diese spezielle Struktur von $\tilde{\mathbf{A}}$ lässt sich zeigen, dass die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ des transformierten Systems die folgende Form besitzt:

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ -e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) \\ 0 & 0 & \cdots & -e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

2.2.4 Reelle Jordansche Normalform

Die Ergebnisse der vorherigen Abschnitte lassen sich nun wie folgt für ein allgemeines lineares, zeitinvariantes System (2.28) kombinieren.

Satz 2.2 (Reelle Jordansche Normalform [10]) Die $(n \times n)$ -Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des linearen, zeitinvarianten Systems (2.28) besitze k reelle und $(n-k)/2$ konjugiert komplexe Eigenwerte. Dann existiert eine reguläre Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_{k+1}), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_r), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_r)] \quad (2.57)$$

aus k reellen und $(n-k)/2$ komplexwertigen Eigen- und Hauptvektoren $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, r = (n+k)/2$, so dass die Zustandstransformation (2.29) das System (2.28) in die Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_l \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

transformiert. Für reellwertige Eigenwerte λ besitzen die entsprechenden Jordanblöcke $\mathbf{J}_i$ die Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Für konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda = \alpha \pm j\beta$ gilt

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{I}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{W} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Beispiel 2.3 Die Kombination der drei betrachteten Fälle in den Abschnitten 2.2.1-2.2.3 soll für das Beispiel

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & -6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.61)$$

gezeigt werden. Die Systemmatrix besitzt die folgenden Eigenwerte:

Eigenwert λ_i	algebr. Vielfachheit n_i	geom. Vielfachheit $g_i \leq n_i$
$\lambda_1 = 2$	1	1
$\lambda_2 = 3 \pm j$	2	1

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2^+ = 3 + j$ lauten

$$\mathbf{v}_1 = [-1, 1, 1, 1, 0]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [-2 - j2, -1 + j, 1 + j, 2j, 2]^T. \quad (2.62)$$

Da für λ_2 die algebraische und geometrische Vielfachheit nicht übereinstimmen, wird mit Hilfe der Beziehung (2.49) ein zusätzliche Hauptvektor

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_3^T = [1 - j3, -2 + j, -1 + j2, -3 + j, 2] \quad (2.63)$$

berechnet. Gemäß (2.57) ergibt sich die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ zu

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_2), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_2), \operatorname{Re}(\mathbf{v}_3), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_3)] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

womit sich die reelle Jordansche Normalform wie folgt errechnet:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_2) & \operatorname{Im}(\lambda_2) \\ -\operatorname{Im}(\lambda_2) & \operatorname{Re}(\lambda_2) \end{bmatrix}.$$

Die Struktur der Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ lässt sich anhand der Überlegungen der letzten Abschnitte herleiten

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} \cos(t) & e^{3t} \sin(t) & te^{3t} \cos(t) & te^{3t} \sin(t) \\ 0 & -e^{3t} \sin(t) & e^{3t} \cos(t) & -te^{3t} \sin(t) & te^{3t} \cos(t) \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \cos(t) & e^{3t} \sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{3t} \sin(t) & e^{3t} \cos(t) \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Für die Transitionsmatrix des Originalsystems (2.61) gilt nach (2.34)

$$\Phi(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} \quad (2.66)$$

mit der Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ aus (2.64).

Aufgabe 2.5 Transformieren Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

in die Jordansche Normalform und berechnen Sie die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$.

2.3 Stabilität linearer Systeme

Mit den bisherigen Erkenntnissen soll in diesem Abschnitt die Stabilität linearer dynamischer Systeme betrachtet werden. Da dieses Thema bereits Bestandteil der Vorlesung “Einführung in die Regelungstechnik” war, wird es im Folgenden nur kompakt dargestellt.

2.3.1 Bedeutung der Eigenvektoren

Die Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$, die bereits für die Transformation auf Diagonalform bzw. auf die Jordansche Normalform in Abschnitt 2.2 von Bedeutung waren, lassen sich anschaulich geometrisch interpretieren. Dazu wird von einem autonomen System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.67)$$

ausgegangen und ein beliebiger Eigenvektor $\mathbf{v}_i$ gemäß seiner Definition $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ betrachtet. Wenn nun angenommen wird, dass der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ des Systems (2.67) in Richtung von $\mathbf{v}_i$ liegt

$$\mathbf{x}_0 = c_0\mathbf{v}_i, \quad c_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.68)$$

so wird sich die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ entlang des Eigenvektors $\mathbf{v}_i$ bewegen:

$$\mathbf{x}(t) = c(t)\mathbf{v}_i. \quad (2.69)$$

Dies wird ersichtlich, wenn man (2.69) in die Systemgleichung (2.67) einsetzt

$$\dot{c}(t)\mathbf{v}_i = c(t)\mathbf{A}\mathbf{v}_i = c(t)\lambda_i\mathbf{v}_i. \quad (2.70)$$

Mit $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ erhält man somit die Differentialgleichung

$$\dot{c}(t) = c(t)\lambda_i \quad \text{bzw.} \quad c(t) = c_0 e^{\lambda_i t}. \quad (2.71)$$

Man erkennt, dass sich das ursprüngliche System (2.67) also entlang eines Eigenvektors $\mathbf{v}_i$ durch eine Differentialgleichung für den Verstärkungsfaktor $c(t)$ beschreiben lässt.

Die entsprechende Lösung $\mathbf{x}(t) = c_0 e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$ wird auch als (*i*-te) *Eigenbewegung* bzw. *Mode* des Systems (2.67) bezeichnet. Der Eigenwert λ_i gibt dabei die Bewegungsrichtung und -geschwindigkeit entlang des Eigenvektors $\mathbf{v}_i$ an.

Beispiel 2.4 Als Beispiel betrachte man folgendes System zweiter Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (2.72)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ errechnen sich zu

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0.414, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.414 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2.414 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Die Trajektorienschar des Systems (2.72) ist zusammen mit den Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in Abbildung 2.3 dargestellt. Man erkennt deutlich, dass Trajektorien, die in Richtung von $\mathbf{v}_1$ verlaufen, auf den Ursprung zulaufen ($\lambda_1 < 1$) und in Richtung von $\mathbf{v}_2$ vom Ursprung weglaufen ($\lambda_2 > 0$).

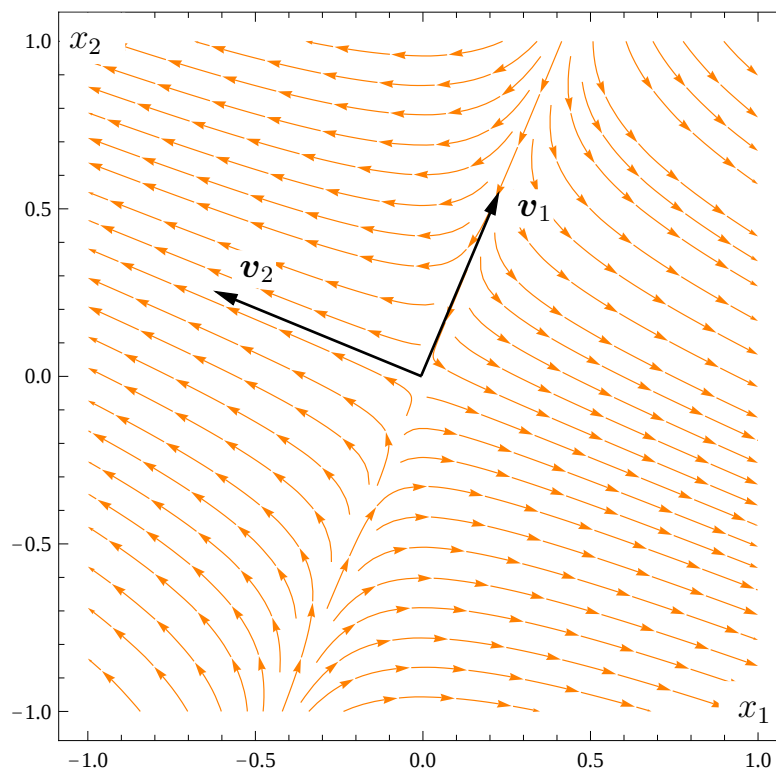


Abbildung 2.3: Trajektorien und Eigenvektoren zum System (2.72) (Beispiel 2.4).

2.3.2 Asymptotische Stabilität

Mit den bisherigen Untersuchungen lässt sich nun das Stabilitätsverhalten eines linearen, zeitinvarianten, autonomen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.74)$$

untersuchen. Die asymptotische Stabilität ist dabei wie folgt definiert:

Definition 2.1 (Asymptotische Stabilität) Das lineare System (2.74) heißt *asymptotisch stabil*, wenn für alle $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ gilt.

Die Lösung von (2.74) involviert die Transitionsmatrix $\Phi(t)$, siehe (2.3). In der Untersuchung der asymptotischen Stabilität

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\Phi(t)\mathbf{x}_0\| \leq \|\Phi(t)\| \cdot \|\mathbf{x}_0\| \quad (2.75)$$

spielt also die induzierte Matrixnorm $\|\Phi(t)\|$ der Transitionsmatrix eine wichtige Rolle (siehe Fußnote 1 auf Seite 15).

Zur Vereinfachung wird zunächst davon ausgegangen, dass das System (2.67) einfache Eigenwerte λ_i besitzt, so dass die Lösung $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$ über die Diagonalform

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{V}\tilde{\Phi}(t)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{V} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0$$

bestimmt ist. Offensichtlich gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\lambda_i t}| = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \\ 1 & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \end{cases}$$

Somit strebt $\|\mathbf{x}(t)\|$ genau dann gegen 0, wenn $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ gilt. Bei mehrfachen Eigenwerten folgt aus Abschnitt 2.2.2 und (2.52), dass für die Anteile der Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t^k e^{\lambda_i t}| = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \\ 1 & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \quad (\text{falls } \lambda_i \text{ einfach}) \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \quad (\text{falls } \lambda_i \text{ mehrfach}) \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \end{cases}$$

gelten muss. Somit ist die Bedingung $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für die asymptotische Stabilität von $\|\mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{V}\tilde{\Phi}(t)\mathbf{V}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{x}_0\|$ auch bei mehrfachen Eigenwerten gültig.

Diese Betrachtungen lassen sich auch auf konjugiert komplexe Eigenwerte übertragen, siehe (2.56). Allgemein gilt im Hinblick auf die Jordansche Normalform in (2.58)–(2.60) folgender Satz:

Satz 2.3 (Lösungsverhalten) Jede Komponente der Lösung $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^\top$ des Systems (2.74) ist eine Linearkombination von Funktionen der Form

$$t^k e^{\lambda t}, \quad t^k e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad t^k e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2.76)$$

in Abhängigkeit der reellen bzw. konjugiert komplexen Eigenwerte $\lambda = \alpha \pm j\beta$ und mit Konstanten $0 \leq k \leq n-1$.

Als direkte Konsequenz von Satz 2.3 lassen sich die Bedingungen für asymptotische Stabilität wie folgt angeben:

Satz 2.4 (Asymptotische Stabilität) Die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des linearen Systems (2.74) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ negativen Realteil besitzen, d.h. $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$.

In Abbildung 2.4 sind einige Beispiele von Eigenwerten dargestellt, um das allgemeine Lösungsverhalten zu illustrieren:

- a) Die Zeitvorgänge klingen monoton ab, das System ist asymptotisch stabil. Der langsamste Vorgang (Eigenwert λ_1) dominiert den Zeitvorgang.
- b) Das System ist instabil, bei einer Anfangsstörung strebt $|x(t)|$ ohne Schwingungen ins Unendliche.
- c) Das System ist asymptotisch stabil, der Zeitvorgang hat oszillatorische Anteile.
- d) Das System ist instabil, es treten aufklingende oszillatorische Zeitvorgänge auf.

Aufgabe 2.6 Untersuchen Sie, ob die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ der folgenden Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

asymptotisch stabil ist. (**Lösung:** nein, nein)

Aufgabe 2.7 Berechnen Sie für das linearisierte Modell (1.74) des Wagen-Pendel-Systems in Aufgabe 1.13 die Eigenwerte. Was folgt daraus für die Stabilität des Systems in der oberen Ruhelage?

Lösung: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{6g(m+M)}{l(m+4M)}} \Rightarrow$ obere Ruhelage ist instabil

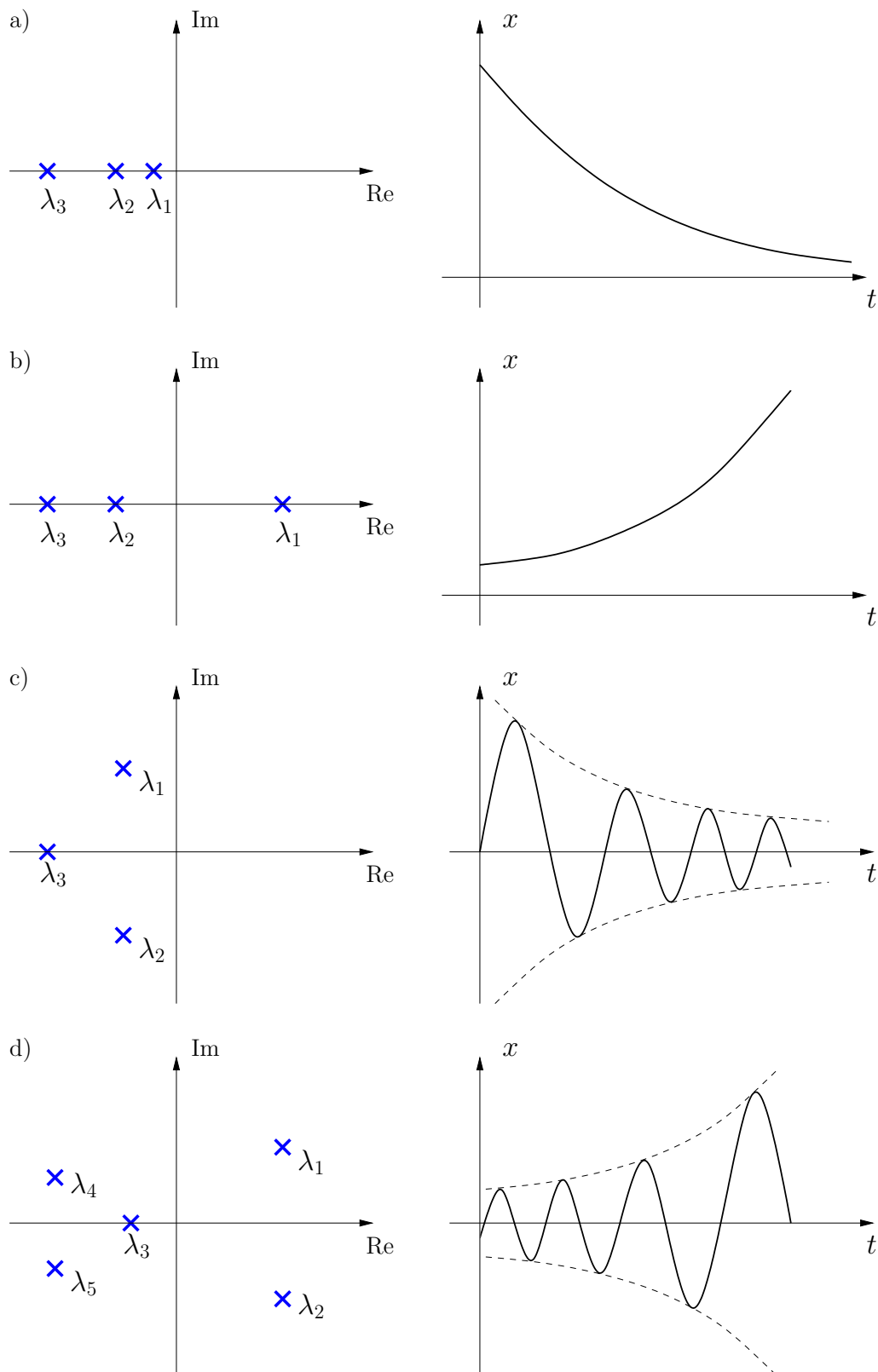


Abbildung 2.4: Lösungsverhalten bei unterschiedlichen Eigenwerten.

2.4 Eingangs-/Ausgangsverhalten

Die Systembeschreibung im Zustandsraum kann in die bereits bekannte Beschreibung des Ein-/Ausgangsverhaltens anhand von Übertragungsfunktionen im Eingrößenfall ($m = p = 1$) bzw. Übertragungsmatrizen im Mehrgrößenfall überführt werden. Die Grundlagen von Übertragungsfunktionen waren bereits Bestandteil der Vorlesung "Einführung in die Regelungstechnik" und werden deshalb im Folgenden nicht im Detail beschrieben.

2.4.1 Übertragungsfunktion und Übertragungsmatrix

Betrachtet wird zunächst ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + du\end{aligned}\quad (2.77)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sowie dem skalaren Eingang $u \in \mathbb{R}$ und Ausgang $y \in \mathbb{R}$. Wenn $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gilt, so lässt sich das Ein-/Ausgangsverhalten mit Hilfe der *Übertragungsfunktion* $G(s)$ beschreiben, d.h.

$$\boxed{Y(s) = G(s)U(s)} \quad (2.78)$$

Um einen Ausdruck für $G(s)$ zu erhalten, wendet man die Laplace-Transformation auf das System (2.77) an und erhält so

$$\begin{aligned}s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{c}^\top \mathbf{X}(s) + dU(s)\end{aligned}\quad (2.79)$$

mit den Laplace-transformierten Größen $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, und $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Die Zustandsgleichung von (2.79) kann nach $\mathbf{X}(s)$ aufgelöst

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(s)$$

und in die Ausgangsgleichung von (2.79) eingesetzt werden, was auf die Ein-/Ausgangs-darstellung

$$Y(s) = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (\mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d)U(s) \quad (2.80)$$

führt. Durch Vergleich von (2.78) mit (2.80) für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ lässt sich nun die Übertragungsfunktion $G(s)$ direkt angeben:

Satz 2.5 (Übertragungsfunktion) *Das lineare, zeitinvariante Eingrößensystem (2.77) besitzt die Übertragungsfunktion*

$$\boxed{G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{b} + d} \quad (2.81)$$

Sind das Zählerpolynom $Z(s)$ und das Nennerpolynom teilerfremd, so gilt $\text{Grad}(Z(s)) \leq \text{Grad}(N(s)) \leq n$. Der Grad des Nennerpolynoms $\text{grad}(N(s))$ stellt die Ordnung der Übertragungsfunktion $G(s)$ dar.

Die Inverse der Matrix $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ lässt sich in der Form

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (2.82)$$

ausdrücken, wobei mit $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ die *Adjunkte* der Matrix $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ bezeichnet wird.² Die Übertragungsfunktion (2.81) besitzt also die Form

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + d \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}. \quad (2.83)$$

Daraus lassen sich nun folgende Aussagen ableiten:

- 1) Das Nennerpolynom $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ entspricht dem charakteristischen Polynom der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. Die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ sind also auch Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen aber nicht (siehe Beispiel 2.5)!
- 2) Das Nennerpolynom $N(s)$ von $G(s)$ besitzt maximal die Ordnung n .
- 3) Das Zählerpolynom besitzt maximal die Ordnung n bzw. $n-1$ für $d = 0$, was anhand der Definition von $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ ersichtlich ist. Der Grad des Zählerpolynoms $Z(s)$ ist also stets kleiner oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms $N(s)$.

Das folgende Beispiel greift die Aussage in Satz 2.5 auf, dass im Allgemeinen nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Eigenwerte einer Systemmatrix $\mathbf{A}$ auch die Pole der zugehörigen Übertragungsfunktion sind.

Beispiel 2.5 (Pendel-Wagen-System) Betrachtet wird das Pendel-Wagen-System in Abbildung (1.15) mit dem linearisierten Modell (1.74). Die Eigenwerte in der oberen Ruhelage lauten (siehe Aufgabe 2.7)

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{6g(m+M)}{l(m+4M)}}.$$

Wenn man nun wahlweise die Wagenposition bzw. den Pendelwinkel als Ausgang betrachtet, d.h.

$$\Delta y_1 = \Delta x_w \quad \text{bzw.} \quad \Delta y_2 = \Delta \phi,$$

so ergeben sich die Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{\Delta Y_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{4ls^2 - 6g}{l(m+4M)s^4 - 6g(m+M)s^2} \\ G_2(s) &= \frac{\Delta Y_2(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-6}{l(m+4M)s^2 - 6g(m+M)}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Im Falle von $G_2(s)$ findet also eine Pol-Nullstellen-Kürzung statt, die dafür verantwortlich ist, dass die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 0$ nicht mehr als Pole von $G_2(s)$ in Erscheinung treten.

² Die Elemente der Adjunkten $\text{adj}(\mathbf{A})$ einer Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ sind die Subdeterminanten der $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen $\mathbf{A}_{ij}$ von $\mathbf{A}$, die durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte und Multiplikation mit dem Faktor $(-1)^{i+j}$ hervorgehen, d.h. $\text{adj}(\mathbf{A})_{ji} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$.

Mehrgrößenfall: Im Falle von m Eingängen und p Ausgängen tritt an Stelle der Übertragungsfunktion $G(s)$ die sogenannte *Übertragungsmatrix* $\mathbf{G}(s)$. Die Herleitung erfolgt vollkommen analog zur Übertragungsfunktion. Die Laplace-Transformation angewandt auf das lineare, zeitinvariante System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.85}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ergibt

$$\begin{aligned}s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s).\end{aligned}\tag{2.86}$$

Durch Elimination der Größe $\mathbf{X}(s)$ mit

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0\tag{2.87}$$

folgt unmittelbar

$$\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{U}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0,\tag{2.88}$$

und für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ erhält man die $(p \times m)$ -Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\hat{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D},\tag{2.89}$$

die sich aus den einzelnen Übertragungsfunktionen zusammensetzt:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \dots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}.\tag{2.90}$$

2.4.2 Realisierungsproblem

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wie ausgehend von einer Systemdarstellung im Zustandsraum die entsprechende Übertragungsfunktion berechnet werden kann. Das inverse Problem davon, also die Bestimmung einer Zustandsraumdarstellung $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\}$ für eine gegebene Übertragungsfunktion $G(s)$, wird als *Realisierungsproblem* bezeichnet. Von praktischem Interesse ist es, eine *Minimalrealisierung* zu finden, die die minimale Zustandsdimension $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Zunächst sei festgehalten, wann eine Realisierung einer Übertragungsfunktion überhaupt existiert.

Satz 2.6 (Realisierbarkeit) *Eine Übertragungsfunktion*

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}\tag{2.91}$$

mit dem Zähler- und Nennerpolynom $Z(s)$ und $N(s)$ ist genau dann realisierbar, wenn $G(s)$ proper ist, d.h. $\text{grad}(Z(s)) \leq \text{grad}(N(s))$.

Die Zustandsrealisierung einer Übertragungsfunktion ist keineswegs eindeutig. In diesem Abschnitt werden zwei sogenannte *kanonische Minimalrealisierungen* hergeleitet. Die betrachtete Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.92)$$

besitze teilerfremde Polynome $Z(s)$, $N(s)$ und es gelte $a_n = 1$ ($N(s)$ sei *monisch*).

1. Standardform bzw. Regelungsnormalform: Zur Herleitung einer Zustandsrealisierung wird zunächst die Hilfsgröße $z(t)$ bzw. $Z(s)$ wie folgt eingeführt:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{Z(s)} &= b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 \\ \frac{Z(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} . \end{aligned} \quad (2.93)$$

Offensichtlich gilt nach wie vor $Y(s)/U(s) = G(s)$. Der Ausdruck $Z(s)/U(s)$ entspricht der Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{z} + a_0 z = u , \quad (2.94)$$

wobei auf die Zeitargumente $z = z(t)$ und $u = u(t)$ verzichtet wird. Wählt man als Zustandsgrößen

$$x_1 = z , \quad x_2 = \dot{z} , \quad \dots \quad x_n = z^{(n-1)} ,$$

so erhält man das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u . \end{aligned} \quad (2.95)$$

Zusätzlich kann der Ausdruck für $Y(s)/Z(s)$ aus (2.93) im Zeitbereich

$$\begin{aligned} y &= b_n z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + b_1 \dot{z} + b_0 z \\ &= b_n \dot{x}_n + b_{n-1} x_n + \dots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \end{aligned}$$

verwendet werden, um die Ausgangsgleichung in den neuen Zustandsgrößen x_i mit Hilfe von (2.95) anzugeben:

$$y = \underbrace{(b_0 - a_0 b_n)}_{\tilde{b}_0} x_1 + \dots + \underbrace{(b_{n-1} - a_{n-1} b_n)}_{\tilde{b}_{n-1}} x_n + b_n u . \quad (2.96)$$

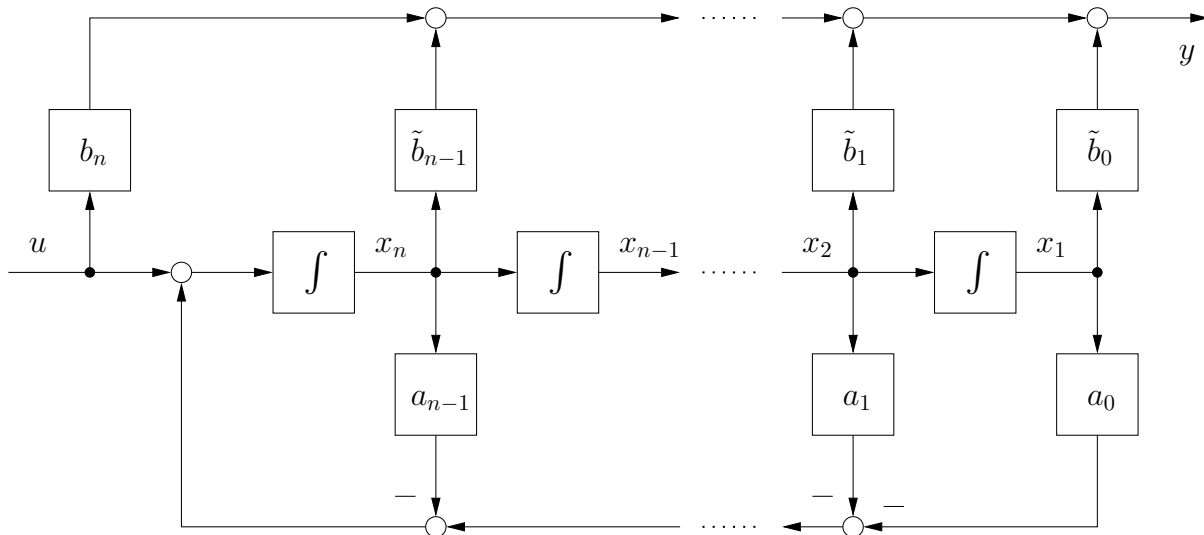


Abbildung 2.5: Erste Standardform bzw. Regelungsnormalform (2.97).

Fasst man (2.95) und (2.96) in Matrixform zusammen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \quad (2.97)$$

$$y = \underbrace{[\tilde{b}_0 \quad \dots \quad \tilde{b}_{n-1}]}_{\mathbf{c}^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_d u,$$

so erkennt man direkt eine erste Zustandsrealisierung der Übertragungsfunktion (2.92), die als *1. Standardform* oder *Regelungsnormalform* bezeichnet wird. Abbildung 2.5 zeigt das zugehörige Strukturschaltbild. Diese Normalform wird in Abschnitt 2.5.3 im Zusammenhang mit der Eigenschaft der *Steuerbarkeit* noch näher untersucht.

2. Standardform bzw. Beobachtungsnormalform: Für die Herleitung einer zweiten Realisierung kann man sich mit einer Abkürzung über die Übertragungsfunktion (2.92) behelfen. Der Zusammenhang zwischen $G(s)$ und der Regelungsnormalform (2.97) wird über die Beziehung (2.81)

$$G(s) = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d$$

hergestellt. Da die Übertragungsfunktion $G(s)$ aber eine skalare rationale Funktion in s ist, gilt offensichtlich

$$G(s) = (G(s))^\top = (\mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d)^\top = \mathbf{b}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{c} + d. \quad (2.98)$$

Aus diesem Zusammenhang kann man folgern, dass das ursprüngliche lineare System (2.77) und

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{c}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + du \end{aligned} \quad (2.99)$$

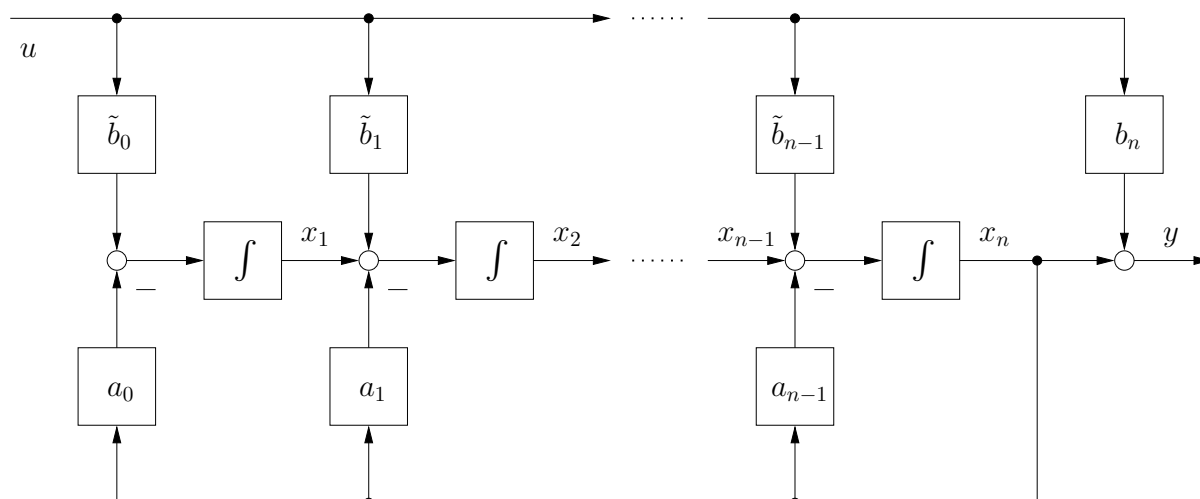


Abbildung 2.6: Zweite Standardform bzw. Beobachtungsnormalform (2.100).

die gleiche Übertragungsfunktion $G(s)$ besitzen. Das System (2.99) wird deswegen auch als *duale System* von (2.77) bezeichnet. Damit ergibt sich neben (2.97) eine zweite mögliche Realisierung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} u \quad (2.100)$$

$$y = \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]}_{\mathbf{b}^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_{d} u,$$

die 2. *Standardform* oder *Beobachtungsnormalform* genannt wird. Abbildung 2.6 zeigt das zugehörige Strukturschaltbild. Diese Normalform wird in Abschnitt 2.6.3 im Zusammenhang mit der Eigenschaft der *Beobachtbarkeit* noch näher untersucht.

Beispiel 2.6 Für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^3 + 3s}{(s-1)(2s+1)(s-3)}$$

soll die Zustandsrealisierung in Form der Regelungsnormalform aufgestellt werden. Dazu wird $G(s)$ zunächst in die monische Form (2.92) gebracht

$$G(s) = \frac{s^3 + 3s}{2s^3 - 7s^2 + 2s + 3} = \frac{\frac{1}{2}s^3 + \frac{3}{2}s}{s^3 - \frac{7}{2}s^2 + s + \frac{3}{2}}.$$

Die Regelungsnormalform folgt nun direkt aus (2.97)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} & 0 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} u.$$

2.4.3 BIBO-Stabilität

In Satz 2.4 wurde die *asymptotische Stabilität* einer Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ für ein lineares, zeitinvariantes, autonomes System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + du \end{aligned} \quad (2.101)$$

betrachtet, also $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$. Eine weitere Definition von Stabilität ist die sogenannte *BIBO-Stabilität* (Englisch: *BIBO* – “Bounded Input Bounded Output”), bei der das Eingangs-Ausgangsverhalten betrachtet wird.

Definition 2.2 (BIBO-Stabilität) Das lineare, zeitinvariante Eingrößensystem (2.101) heißt BIBO-stabil, wenn für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ zu jeder beschränkten Eingangsfunktion $u(t)$ eine beschränkte Ausgangsfunktion $y(t)$ gehört, d.h. für alle $|u(t)| \leq a$ mit $0 < a < \infty$ gilt $|y(t)| \leq b$ für ein endliches $0 < b < \infty$.

Beispiel 2.7 Das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

ist nach Satz 2.8 nicht BIBO-stabil. Dies wird ersichtlich, wenn man die Eingangsfunktion $u(t) = A \sin(t)$ mit $A > 0$ betrachtet, für die der Ausgangsverlauf $y(t)$ unbeschränkt ist.

Die BIBO-Stabilität lässt sich einfach anhand der Impulsantwort (2.24)

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)1\} = \mathbf{c}^\top \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{b}, \quad t > 0 \quad (2.102)$$

wie folgt überprüfen:

Satz 2.7 (BIBO-Stabilität – Impulsantwort) Das lineare, zeitinvariante Eingrößensystem (2.101) ist genau dann BIBO-stabil, wenn die Impulsantwort (2.102) absolut integrabel ist, d.h.

$$\int_0^\infty |g(t)| dt \leq M_g \quad (2.103)$$

für ein $0 < M_g < \infty$ erfüllt ist.

Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der BIBO-Stabilität von (2.101) kann über die Polstellen der Übertragungsfunktion erfolgen:

Satz 2.8 (BIBO-Stabilität – Übertragungsfunktion) *Das lineare, zeitinvariante Eingrößensystem (2.101) ist genau dann BIBO-stabil, wenn alle Pole $s_i = \alpha_i + j\omega_i$ der Übertragungsfunktion $G(s)$ in (2.81) negativen Realteil besitzen, d.h. $\text{Re}(s_i) = \alpha_i < 0$.*

In Abschnitt 2.4.1 wurde gezeigt, dass jede Polstelle einer Übertragungsfunktion $G(s)$ auch ein Eigenwert der zugehörigen Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ ist. Daraus folgt, dass die asymptotische Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ nach Satz 2.4 auch die BIBO-Stabilität des Systems impliziert. Die Umkehrung gilt allerdings nur dann, wenn die Ordnung der Übertragungsfunktion $G(s)$ der Systemordnung entspricht!

Aufgabe 2.8 Untersuchen Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

auf asymptotische Stabilität und BIBO-Stabilität.

2.4.4 Interpretation der Nullstellen

In der Vorlesung “Einführung in die Regelungstechnik” wurde bereits darauf eingegangen, dass die Nullstellen $s_{0,i}$ einer Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{0,i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}, \quad (2.104)$$

zwar nicht die Stabilität des Systems beeinflussen, wohl aber die Geschwindigkeit und Amplitude der Systembewegung. An dieser Stelle soll auf weitere regelungstechnisch relevante Aspekte von Nullstellen eingegangen werden.

Blockade-Eigenschaft: Im Bildbereich sind die Nullstellen diejenigen (komplexen) Frequenzen $s = s_{0,i}$, für die

$$G(s_{0,i}) = 0$$

gilt, d.h., die Ausgangsgröße besitzt keine Komponente mit der Nullstellenfrequenz $s_{0,i}$. Um diesen Umstand näher zu betrachten, wird ein stabiles System mit der Übertragungsfunktion (2.104) und (der Einfachheit halber) einer bestimmten reellen Nullstelle $s_{0,i}$ betrachtet. Die zu der Nullstelle korrespondierende Eingangsfunktion ist

$$u(t) = c e^{s_{0,i}t} \quad \text{bzw.} \quad U(s) = \frac{c}{s - s_{0,i}}$$

im Bildbereich mit der Konstanten $c > 0$. Die zugehörige Antwort lautet dann

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{(s - s_{0,1}) \cdots (s - s_{0,i-1})(s - s_{0,i+1}) \cdots (s - s_{0,m})}{N(s)}$$

woraus direkt ersichtlich ist, dass das zur Nullstelle korrespondierende Signal $u(t) = c e^{s_{0,i}t}$ durch das System nicht übertragen wird. Die Eigenschaft wird als *Blockadeeigenschaft* von

Nullstellen bezeichnet und wird in der Nachrichtentechnik z.B. beim *Kerbfilter* ausgenützt, um Frequenzen innerhalb eines engen Frequenzbereiches auszufiltern.

Beispiel 2.8 (Pendel-Wagen-System) Betrachtet wird wieder das Pendel-Wagen-System aus Aufgabe 1.13 bzw. Abbildung 1.15. Wird das Pendel um die obere Ruhelage linearisiert und als Ausgang die Pendelspitze

$$\Delta y = \Delta x_w + l\Delta\phi$$

betrachtet, so ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{2ls^2 + 6g}{-l(m + 4M)s^4 + 6g(m + M)s^2}.$$

Dabei ist ersichtlich, dass $G(s)$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar

$$s_0 = j\omega, \quad s_0^- = -j\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{6g}{2l}}$$

besitzt. Wenn das Eingangssignal entsprechend der Nullstellenfrequenz

$$u(t) = \frac{1}{2} \left(e^{s_0 t} + e^{s_0^- t} \right) = \cos(\omega t)$$

gewählt wird, so ist diese Frequenz am Ausgang $y(t)$ nicht mehr vorhanden. Insbesondere kann durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen $\Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0$ erreicht werden, dass der Ausgang, also die Pendelspitze in Ruhe ist, während das Eingangssignal $u(t) = \cos(\omega t)$ eine Dauerschwingung des Wagens und des Pendels bewirkt! Abbildung 2.7 zeigt dieses Verhalten beispielhaft für eine halbe Periode $t \in [0, \frac{\pi}{\omega}]$.

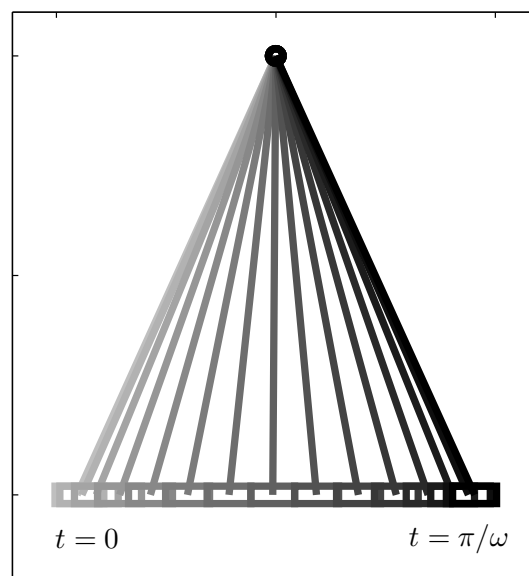


Abbildung 2.7: Stationärer Ausgang bei Nullstellenfrequenz in Beispiel 2.8.

Gegenläufiges Ein-/Ausgangsverhalten: Eine regelungstechnische Schwierigkeit tritt bei Nullstellen in der rechten Halbebene auf, d.h. wenn Nullstellen $s_{0,i}$ mit $\operatorname{Re}(s_{0,i}) > 0$ existieren. In diesem Fall spricht man auch von einem *nichtminimalphasigen* System. Dazu wird die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - c}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.105)$$

mit der Nullstelle $s_0 = c$ betrachtet. Es wird angenommen, dass das Nennerpolynom ein Hurwitzpolynom ist und somit asymptotische Stabilität gegeben ist.

Im Folgenden soll die Sprungantwort von $G(s)$ genauer betrachtet werden. Anhand des Anfangswertsatzes der Laplace-Transformation

$$\lim_{t \rightarrow 0+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) U(s)$$

kann man sich leicht davon überzeugen, dass für die Ableitung $y^{(i)}(t) = \frac{d^i}{dt^i} y(t)$ mit $y^{(j)}(0+) = 0, j = 0, 1, \dots, i-1$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} y^{(i)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{i+1} G(s) U(s), \quad i > 0 \quad (2.106)$$

gelten muss. Im Hinblick auf den Differenzgrad $n-1$ der Übertragungsfunktion (2.105) gilt für die Sprungantwort $h(t)$ offensichtlich ($U(s) = \frac{1}{s}$)

$$\lim_{t \rightarrow 0+} h^{(i)}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} h^{(n-1)}(t) = 1. \quad (2.107)$$

Betrachtet man zusätzlich den stationären Endwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) U(s) = -\frac{c}{a_0}$$

so fällt im Vergleich zur Anfangsableitung $y^{(n-1)}(t) = h^{(n-1)}(t) = 1$ auf, dass die Sprungantwort für eine Nullstelle in der rechten Halbebene ($c > 0$) zunächst in die *entgegengesetzte Richtung* startet.

Auch wenn diese Untersuchung für mehrfache Nullstellen in der rechten Halbebene schwieriger wird, so kann man doch festhalten, dass das Gegenschwingverhalten charakteristisch ist für nichtminimalphasige Systeme.

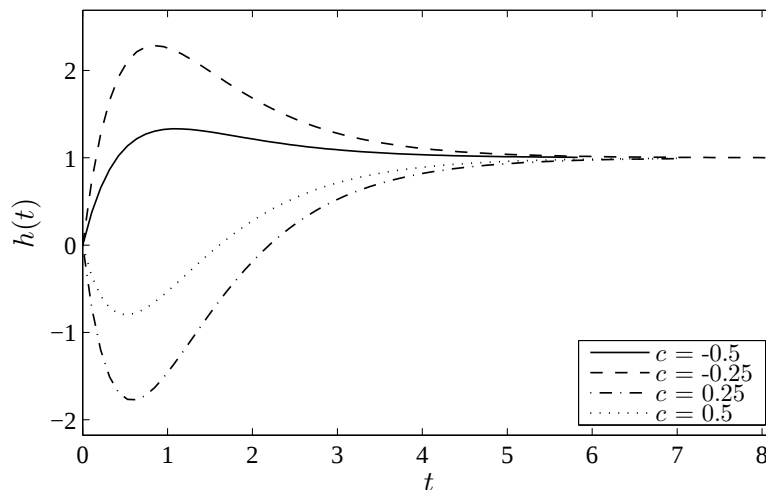
Beispiel 2.9 Betrachtet wird die Sprungantwort der Übertragungsfunktion

$$G(s) = -\frac{2}{c} \frac{s - c}{(s + 1)(s + 2)}$$

mit der Nullstelle $s_0 = c$ und den Polstellen $s_1 = -1$ und $s_2 = -2$. Für $c \geq 0$ bzw. $c < 0$ ist das System also *nichtminimalphasig* bzw. *minimalphasig*. Der stationäre Wert der Sprungantwort ergibt sich aufgrund der Normierung zu $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$, während die Anfangssteigung

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \dot{h}(t) = -\frac{2}{c} \begin{cases} < 0 & \text{falls } c > 0 \\ > 0 & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

beträgt. Abbildung 2.8 zeigt die Sprungantwort für verschiedene Parameterwerte c , für die das gleich- bzw. gegenläufige Ein-/Ausgangsverhalten gut zu erkennen ist.

Abbildung 2.8: Sprungantwort von $G(s)$ in Beispiel 2.9.

Nullstellen im Mehrgrößenfall: Bei Mehrgrößensystemen (2.85), bei denen das Eingangs-/Ausgangsverhalten durch eine Übertragungsmatrix (2.89) bzw. (2.90) beschrieben wird, ist die Definition und Untersuchung von Nullstellen ungleich komplizierter. Man unterscheidet in diesem Fall zwischen

- Übertragungsnullstellen,
- invariante Nullstellen,
- Eingangs-/Ausgangs-Entkopplungsnullstellen.

Für weitergehende Informationen zu Nullstellen im Mehrgrößenfall sei auf die einschlägige Literatur am Ende des Kapitels verwiesen.

2.5 Steuerbarkeit

Der Begriff der Steuerbarkeit wird im Folgenden anhand eines linearen, zeitinvarianten Mehrgrößensystems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.108)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sowie den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ erläutert.

Definition 2.3 (Steuerbarkeit) Das lineare System (2.108) heißt (vollständig) steuerbar, wenn es in endlicher Zeit $T < \infty$ von jedem Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aus durch einen stückweise stetigen Stellgrößenverlauf $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, T]$ in jeden beliebigen Endzustand $\mathbf{x}(T)$ überführt werden kann.

2.5.1 Steuerbarkeit nach Kalman

Um die Eigenschaft der Steuerbarkeit des linearen Systems (2.108) zu untersuchen, betrachtet man zunächst die allgemeine Lösung gemäß (2.15)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.109)$$

mit der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ aus (2.5). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachtet man den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und setzt $t = T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \int_0^T \Phi(T-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{(T-\tau)^k}{k!} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{u}}_k = \int_0^T \frac{(T-\tau)^k}{k!} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Für eine beliebige Steuertrajektorie $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, T]$ mit der festen Endzeit T stellen die Größen $\hat{\mathbf{u}}_k$ konstante m -dimensionale Vektoren dar. Aus (2.110) erkennt man also, dass sich $\mathbf{x}(T)$ als Linearkombination der Spaltenvektoren von $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots$ darstellen lässt.

Eine *notwendige* Bedingung, damit im Sinne der Steuerbarkeit jeder Punkt $\mathbf{x}(T) \in \mathbb{R}^n$ angefahren werden kann, ist also, dass die Spaltenvektoren von $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots$ den $\mathbb{R}^n$ aufspannen. Mit anderen Worten, die Matrix

$$[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}, \mathbf{A}^n\mathbf{B}, \mathbf{A}^{n+1}\mathbf{B}, \dots] \quad (2.111)$$

muss den Rang n besitzen. Um dieses Zwischenergebnis weiterzuführen, kann der *Satz von Cayley-Hamilton* verwendet werden:

Satz 2.9 (Satz von Cayley-Hamilton) *Bezeichnet*

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \dots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so genügt $\mathbf{A}$ der Beziehung

$$p(\mathbf{A}) = p_0\mathbf{I} + p_1\mathbf{A} + \dots + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0}. \quad (2.112)$$

Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass die Matrix $\mathbf{A}^n$ durch eine Linearkombination der niedrigeren Potenzen $\mathbf{A}^0, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ ausgedrückt werden kann, bei der die Koeffizienten denen des charakteristischen Polynoms von $\mathbf{A}$ entsprechen.

Da die Matrizen $\mathbf{A}^n\mathbf{B}, \mathbf{A}^{n+1}\mathbf{B}, \dots$ gemäß Satz 2.9 offensichtlich keine weiteren linear unabhängigen Einträge in der Matrix (2.111) liefern, ist es also ausreichend, in der Rangüberprüfung von (2.111) lediglich die Matrixeinträge $\mathbf{B}$ bis $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ zu betrachten. Diese Überlegungen führen auf den nachfolgenden Satz:

Satz 2.10 (Steuerbarkeitskriterium nach Kalman) *Das System (2.108) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die sogenannte Steuerbarkeitsmatrix*

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (2.113)$$

den Rang n besitzt.

Die Notwendigkeit von $\text{Rang}(\mathbf{Q}_S) = n$ für die vollständige Steuerbarkeit des Systems (2.108) wurde bereits gezeigt. Um zu zeigen, dass $\text{Rang}(\mathbf{Q}_S) = n$ auch hinreichend ist (was Satz 2.10 beweist), wird die sogenannte *Gramsche Matrix (controllability gramian)*

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}\tau})^\top d\tau \quad (2.114)$$

mit $e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t)$ betrachtet. Mit ähnlichen Argumenten wie im oberen Teil kann gezeigt werden, dass $\mathbf{G}$ für alle Zeiten $T > 0$ regulär ist, wenn $\text{Rang}(\mathbf{Q}_S) = n$ erfüllt ist. Damit kann man für eine gewünschte Zeit T durch Einsetzen der Eingangsfunktion

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}(T-t)})^\top \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{x}(T) - e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0) \quad (2.115)$$

in die Gleichung (2.109)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \Phi(T) \mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \Phi(T) \mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(T-\tau) d\tau \\ &= \Phi(T) \mathbf{x}_0 + \underbrace{\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}\tau})^\top d\tau}_{=\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{x}(T) - e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(T) \end{aligned} \quad (2.116)$$

zeigen, dass das System (2.108) in den gewünschten Zustand $\mathbf{x}(T)$ übergeführt wird.

Wenn die Steuerbarkeit gegeben ist, so existieren unendlich viele Steuerungen, um das System (2.108) von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{x}_T$ zu steuern. Ein interessanter Aspekt der speziellen Steuerung (2.115) ist, dass sie den Übergang im Zeitintervall $[0, T]$ mit minimalem Energieaufwand realisiert und somit das folgende Kostenfunktional minimiert:

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T \mathbf{u}^\top(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Beispiel 2.10 (Pendel-Wagen-System) *Das linearisierte Modell des inversen Pendel-Wagen-Systems in Aufgabe 1.13 soll auf Steuerbarkeit untersucht werden. Mit der Systemmatrix $\mathbf{A}$ und dem Steuervektor $\mathbf{b}$ aus (1.74) ergibt sich die Steuerbarkeitsmatrix*

$$\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-6}{l(m+4M)} & 0 & \frac{-36g(m+M)}{l^2(m+4M)^2} \\ \frac{-6}{l(m+4M)} & 0 & \frac{-36g(m+M)}{l^2(m+4M)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{m+4M} & 0 & \frac{18mg}{l(m+4M)^2} \\ \frac{4}{m+4M} & 0 & \frac{18mg}{l(m+4M)^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

mit $\det(\mathbf{Q}_S) = \frac{1296g^2}{l^4(m+4M)^4} \neq 0$. Da $\mathbf{Q}_S$ regulär ist, ist das linearisierte Pendelmodell in der oberen Ruhelage steuerbar.

Bei höher dimensionalen Problemen wird die Steuerbarkeitsanalyse anhand der Rangüberprüfung von $\mathbf{Q}_S$ in der Regel zunehmend schlecht konditioniert sein. Als Alternative bietet sich hier die Überprüfung der Gramschen Matrix (2.114) an:

Satz 2.11 (Steuerbarkeit über die Gramsche Matrix) *Das System (2.108) ist genau dann (vollständig) steuerbar, wenn die Gramsche Matrix (controllability gramian)*

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}\tau})^\top d\tau \quad (2.118)$$

regulär ist. Wenn die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist, dann lässt sich $\mathbf{G}_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{G}$ aus der folgenden Lyapunov-Gleichung berechnen:

$$\mathbf{A} \mathbf{G}_\infty + \mathbf{G}_\infty \mathbf{A}^\top + \mathbf{B} \mathbf{B}^\top = \mathbf{0}. \quad (2.119)$$

Wenn $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist (also alle Eigenwerte negativem Realteil besitzen), dann ist die Existenz des Integrals (2.118) für den Grenzfall $T \rightarrow \infty$ gewährleistet. Unter MATLAB können die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ und die Gramsche Matrix $\mathbf{G}_\infty$ mit Hilfe der Funktionen `ctrb` und `gram` berechnet werden.

Aufgabe 2.9 Zeigen Sie durch Einsetzen von $\mathbf{G}_\infty$ aus (2.118) in (2.119), dass die Lyapunov-Gleichung tatsächlich gilt.

2.5.2 Steuerbarkeit nach Hautus

Ein weiteres Steuerbarkeitskriterium wurde von *Hautus* hergeleitet, das für die Steuerbarkeitsanalyse die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ mitbetrachtet.

Satz 2.12 (Steuerbarkeitskriterium nach Hautus) *Das System (2.108) ist genau dann (vollständig) steuerbar, wenn die Bedingung*

$$\text{Rang}([\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}]) = n \quad (2.120)$$

für alle Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt ist.

Im Gegensatz zum Kalman-Kriterium (Satz 2.10), bei dem der Rang einer $(n \times nm)$ -Matrix überprüft werden muss, werden beim Hautus-Kriterium die einzelnen $(n \times n + m)$ -Matrizen $[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}]$ auf ihren Rang überprüft.

Somit kann man durch das Hautus-Kriterium eine Aussage darüber erhalten, welche Eigenwerte nicht steuerbar sind. Des Weiteren bietet sich das Hautus-Kriterium für Systeme an, bei denen Parameter in den Systemmatrizen vorkommen (siehe Beispiel 2.10), wodurch die Rangüberprüfung der Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ aufwendig werden kann.

2.5.3 Regelungsnormalform (Eingrößenfall)

Im Folgenden wird das lineare Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + du\end{aligned}\quad (2.121)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem skalaren Eingang $u \in \mathbb{R}$ und dem skalaren Ausgang $y \in \mathbb{R}$ betrachtet. Die Regelungsnormalform wurde bereits in Abschnitt 2.4.2 als Realisierung einer Übertragungsfunktion $G(s)$ betrachtet. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie ein lineares System (2.121) im Zustandsraum mittels einer regulären Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1} \quad (2.122)$$

auf die Regelungsnormalform

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}\mathbf{b}} u \\ y &= [b_0 - a_0b_n \quad \cdots \quad b_{n-1} - a_{n-1}b_n] \tilde{\mathbf{x}} + b_n u\end{aligned}\quad (2.123)$$

transformiert werden kann. Die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ spielt dabei eine wichtige Rolle.

Aus (2.123) ist ersichtlich, dass der erste Zustand $\tilde{x}_1$ von $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]^\top$ n -mal differenziert werden kann, bevor der Eingang u auftaucht. Im Folgenden wird $\tilde{x}_1$ durch die Gleichung

$$\tilde{x}_1 = \mathbf{t}^\top \mathbf{x} \quad (2.124)$$

angesetzt, wobei der Vektor $\mathbf{t}$ so bestimmt werden soll, dass der Eingang u erst in der n -ten Zeitableitung auftritt. Sukzessive Ableitung von $\tilde{x}_1$ nach der Zeit t und Vergleich mit (2.123) liefert

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}^\top \mathbf{b}u & \text{mit} & \quad \mathbf{t}^\top \mathbf{b} \stackrel{!}{=} 0 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \mathbf{t}^\top \mathbf{A}\mathbf{b}u & & \quad \mathbf{t}^\top \mathbf{A}\mathbf{b} \stackrel{!}{=} 0 \\ &\vdots & & \\ \tilde{x}_1^{(n-1)} &= \tilde{x}_n = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x} + \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b}u & & \quad \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b} \stackrel{!}{=} 0 \\ \tilde{x}_1^{(n)} &= \dot{\tilde{x}}_n = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^n \mathbf{x} + \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}u & & \quad \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \stackrel{!}{=} 1.\end{aligned}\quad (2.125)$$

Die Zwangsbedingungen lassen sich in der Vektorform

$$\mathbf{t}^\top \underbrace{[\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]}_{\mathbf{Q}_S} = [0, \dots, 0, 1]$$

in Abhängigkeit der Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ zusammenfassen. Falls $\mathbf{Q}_S$ regulär ist, ergibt sich

$$\mathbf{t}^\top = [0, \dots, 0, 1] \mathbf{Q}_S^{-1}. \quad (2.126)$$

Offensichtlich bestimmt sich der erste Zustand $\tilde{x}_1 = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}$ der Regelungsnormform mit Hilfe der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$. Somit gilt der folgende Satz:

Satz 2.13 (Transformation auf Regelungsnormform) *Das lineare System (2.121) kann durch die Transformation (2.122) mit der Transformationsmatrix*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^\top \\ \mathbf{t}^\top \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^\top = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_S^{-1}, \quad \mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (2.127)$$

auf die Regelungsnormform (2.123) gebracht werden, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ regulär ist. Dabei stellt $\mathbf{t}^\top$ die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix dar.

Vorteilhaft bei der Regelungsnormform ist, dass sie einfach aus einer Übertragungsfunktion $G(s)$ bestimmt werden kann, wie in Abschnitt 2.4.2 gezeigt wurde. Des Weiteren ist charakteristisch, dass der Eingang u nur den letzten Zustand von $\tilde{\mathbf{x}}$ beeinflusst, was insbesondere für den Reglerentwurf von Vorteil ist.

Die Regelungsnormform lässt sich auch für Mehrgrößensysteme (2.108) angeben. Dies wird im nächsten Kapitel im Rahmen des Entwurfs von Zustandsreglern behandelt.

Beispiel 2.11 (Pendel-Wagen-System) *Betrachtet wird erneut das inverse Pendel in Abbildung 1.15 mit der regulären Steuerbarkeitsmatrix (2.117). Die inverse Steuerbarkeitsmatrix lautet*

$$\mathbf{Q}_S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ml}{2} & 0 & m+M \\ \frac{ml}{2} & 0 & m+M & 0 \\ 0 & -\frac{l^2(m+4M)}{9g} & 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} \\ -\frac{l^2(m+4M)}{9g} & 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.128)$$

Mit der letzten Zeile

$$\mathbf{t}^\top = \left[-\frac{l^2(m+4M)}{9g} \quad 0 \quad -\frac{l(m+4M)}{6g} \quad 0 \right] \quad (2.129)$$

und der Dynamikmatrix aus (1.74) ergibt sich die Transformationsmatrix (2.127)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{l^2(m+4M)^2}{9g} & 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} & 0 \\ 0 & -\frac{l^2(m+4M)^2}{9g} & 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} \\ -\frac{l(m+4M)}{6g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

und schließlich die Regelungsnormform (2.123)

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (2.131)$$

2.6 Beobachtbarkeit

Bei den meisten regelungstechnischen Problemstellungen sind nicht alle Zustandsgrößen messtechnisch erfassbar. Die Beobachtbarkeit eines Systems beschäftigt sich deshalb mit der Frage, ob der Systemzustand aus der Kenntnis der Messgrößen $\mathbf{y}(t)$ und gegebenenfalls der Stellgrößen $\mathbf{u}(t)$ rekonstruierbar ist.

In weiterer Folge wird wieder ein lineares, zeitinvariantes Mehrgrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.132}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ sowie den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ betrachtet.

Definition 2.4 (Beobachtbarkeit) Das System (2.132) heißt (vollständig) beobachtbar, wenn der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aus Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsprofile $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ auf einem Intervall $0 \leq t \leq T$ bestimmt werden kann.

2.6.1 Beobachtbarkeit nach Kalman

Um die Bedingungen für die Beobachtbarkeit zu untersuchen, betrachte man zunächst die allgemeine Lösung für den Ausgang $\mathbf{y}(t)$ gemäß (2.15)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}\Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\tag{2.133}$$

mit der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ aus (2.5). Da vorausgesetzt wird, dass neben dem Ausgang $\mathbf{y}(t)$ auch der Stellgrößenverlauf $\mathbf{u}(t)$ bekannt ist, sind die letzten zwei Ausdrücke in (2.133) bekannt und haben somit keinen Einfluss auf die Frage der Bestimmbarkeit von $\mathbf{x}_0$.

Zur Vereinfachung der Beobachtbarkeitsuntersuchung wird deshalb der Eingang $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ gesetzt, womit sich (2.133) zu

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0\tag{2.134}$$

reduziert. Eine (zunächst) *notwendige* Bedingung für die Beobachtbarkeit des Systems (2.132) lässt sich herleiten, wenn man annimmt, dass ein Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ existiert, so dass

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots\tag{2.135}$$

erfüllt ist. In diesem Fall ergibt sich

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{a} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}\mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \right) \mathbf{a} = \mathbf{0}\tag{2.136}$$

Damit würden aber zu der Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ zwei Anfangszustände korrespondieren: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Da dies im Widerspruch zu Definition 2.4 steht, stellt die *Nicht-Existenz* eines Vektors $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ in (2.135) eine *notwendige* Bedingung für die Beobachtbarkeit des Systems (2.132) dar.

Diese Überlegung lässt sich weiter präzisieren. Da als Folgerung von Satz 2.9 jede Matrixpotenz $\mathbf{A}^n, \mathbf{A}^{n+1}, \dots$ durch eine Linearkombination ihrer niedrigen Potenzen $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ ausgedrückt werden kann, reduziert sich (2.135) auf

$$\mathbf{CA}^k \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (2.137)$$

Wenn die Matrix in (2.137) den Rang n besitzt, so ist gewährleistet, dass *kein* Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ existiert. Es handelt sich dabei zumindest um eine *notwendige* Bedingung für die Beobachtbarkeit des Systems (2.132) im folgenden Satz.

Satz 2.14 (Beobachtbarkeit nach Kalman) *Das System (2.132) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die sogenannte Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

den Rang n besitzt.

Aufgabe 2.10 *Leiten Sie die Rangbedingung für die Beobachtbarkeitsmatrix (2.138) her, indem Sie aus Kenntnis der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(i)}(t), i = 1, \dots, n-1$ und der Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t), \mathbf{u}^{(i)}(t), i = 1, \dots, n-1$ versuchen, den Zustand $\mathbf{x}(t)$ des Systems (2.132) zum Zeitpunkt t zu rekonstruieren.*

Um zu zeigen, dass Satz 2.14 auch *hinreichend* ist, also die Rangbedingung $\text{Rang}(\mathbf{Q}_B) = n$ die Beobachtbarkeit impliziert, wird die zugehörige *Gramsche Matrix* (*observability gramian*)

$$\bar{\mathbf{G}} = \int_0^T (e^{\mathbf{A}\tau})^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (2.139)$$

mit $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ eingeführt. Wie im Falle der Steuerbarkeit kann gezeigt werden, dass $\bar{\mathbf{G}}$ regulär ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ den Rang n besitzt. Multipliziert man (2.134) von links mit $\bar{\mathbf{G}}^{-1} (e^{\mathbf{A}t})^\top \mathbf{C}^\top$ und integriert über das Zeitintervall $[0, T]$, so erhält man

$$\int_0^T \bar{\mathbf{G}}^{-1} (e^{\mathbf{A}t})^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 dt = \underbrace{\bar{\mathbf{G}}^{-1} \int_0^T (e^{\mathbf{A}t})^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt}_{\bar{\mathbf{G}}} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \quad (2.140)$$

und hat damit eine explizite Vorschrift gegeben, wie man $\mathbf{x}_0$ berechnet.

Ähnlich der Problematik bei der Untersuchung der Steuerbarkeit, wird auch die Rangüberprüfung der Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ für höher dimensionale Probleme in der Regel zunehmend schlecht konditioniert sein. Eine Alternative ist daher die Überprüfung der Gramschen Matrix (2.139):

Satz 2.15 (Beobachtbarkeit über die Gramsche Matrix) Das System (2.132) ist genau dann (vollständig) beobachtbar, wenn die Gramsche Matrix (observability grami-an)

$$\bar{\mathbf{G}} = \int_0^T (e^{\mathbf{A}\tau})^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (2.141)$$

regulär ist. Wenn die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist, dann lässt sich $\bar{\mathbf{G}}_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{G}}$ aus der folgenden Lyapunov-Gleichung berechnen:

$$\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{G}}_\infty + \bar{\mathbf{G}}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{C}^\top \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (2.142)$$

Wenn $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist, dann ist die Existenz des Integrals (2.141) für den Grenzfall $T \rightarrow \infty$ gewährleistet. Unter MATLAB können die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ und die Gramsche Matrix $\bar{\mathbf{G}}_\infty$ mit Hilfe der Funktionen `obsv` und `gram` berechnet werden.

Beispiel 2.12 (Heißluftballon [4]) Abbildung 2.9 zeigt einen Heißluftballon, der vereinfacht durch die Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{h} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\tau_1}(v - w) + k_1\vartheta \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{1}{\tau_2}\vartheta + k_2u \end{aligned} \quad (2.143)$$

mit den Zeitkonstanten $\tau_1, \tau_2 > 0$ und den physikalischen Konstanten $k_1, k_2 > 0$ beschrieben werden kann. Dabei stellt h die Flughöhe relativ zu einer Referenzhöhe dar, v ist die Vertikalgeschwindigkeit, w die vertikale Windgeschwindigkeit (Thermik) und ϑ ist die Temperaturdifferenz zur Gleichgewichtstemperatur. Die Stellgröße u stellt die durch den Brenner zugeführte Wärme dar.

Da die Windgeschwindigkeit w eine externe Störung darstellt, ist von Interesse, ob gleichzeitig die Temperaturdifferenz ϑ und ein konstantes w geschätzt werden können, wenn lediglich die Flughöhe h gemessen wird. Dazu erweitert man das Modell (2.143) um die Gleichung

$$\dot{w} = 0 \quad (2.144)$$

und berechnet die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ für das erweiterte System (2.143), (2.144) mit dem Zustand $\mathbf{x} = [h, v, \vartheta, w]^\top$ und der Messgröße $y = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = [1, 0, 0, 0] \mathbf{x}$:

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_1} & k_1 & \frac{1}{\tau_1} \\ 0 & \frac{1}{\tau_1^2} & -k_1 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} & -\frac{1}{\tau_1^2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\mathbf{Q}_B) = \frac{k_1}{\tau_1 \tau_2}.$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ ist regulär für $k_1 \neq 0$ und das erweiterte System somit vollständig beobachtbar.

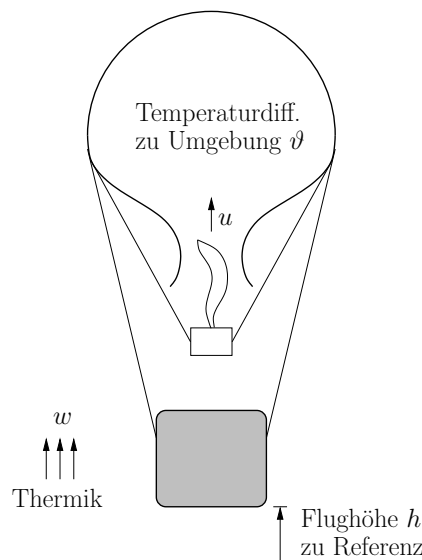


Abbildung 2.9: Heißluftballon aus Aufgabe 2.12.

Aufgabe 2.11 (Pendel-Wagen-System) Untersuchen Sie die Beobachtbarkeit des linearisierten Pendel-Wagen-Modells (1.13) für die Ausgänge (vergleiche Abbildung 1.15)

$$\Delta y_1 = \Delta x_w \quad \text{bzw.} \quad \Delta y_2 = \Delta \phi.$$

Lösung: Das System ist beobachtbar bzgl. Δy_1 , aber nicht beobachtbar bzgl. Δy_2 , was an $Q_{B,1}$ und $Q_{B,2}$ direkt ersichtlich ist:

$$Q_{B,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3mg}{m+4M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3mg}{m+4M} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{B,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.6.2 Beobachtbarkeit nach Hautus

Wie im Falle der Steuerbarkeit gibt es auch bei der Beobachtbarkeit neben dem Kalman-Kriterium noch weitere Kriterien, um die Beobachtbarkeit zu untersuchen. An dieser Stelle sei zusätzlich das *Hautus-Kriterium* erwähnt.

Satz 2.16 (Beobachtbarkeitskriterium nach Hautus) Das System (2.108) ist genau dann (vollständig) beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (2.145)$$

für alle Eigenwerte λ_i der Matrix A erfüllt ist.

Ähnlich dem Hautus-Kriterium bei der Steuerbarkeit (Satz 2.12), kann mit Hilfe die Rangbedingung (2.145) gegebenenfalls überprüft werden, welche Eigenvorgänge des Systems nicht beobachtbar sind.

2.6.3 Beobachtungsnormalform (Eingrößenfall)

In Analogie zu Abschnitt 2.5.3 wird im Folgenden von einem linearen Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + du\end{aligned}\quad (2.146)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem skalaren Eingang $u \in \mathbb{R}$ und dem skalaren Ausgang $y \in \mathbb{R}$ ausgegangen.

Die Beobachtungsnormalform wurde bereits in Abschnitt 2.4.2 als Realisierung einer Übertragungsfunktion $G(s)$ betrachtet. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie ein lineares System (2.146) im Zustandsraum mittels einer regulären Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} \quad (2.147)$$

auf die Beobachtungsnormalform

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{b}} u \\ y &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \tilde{\mathbf{x}} + b_n u\end{aligned}\quad (2.148)$$

transformiert werden kann. Die Beobachtbarkeitsmatrix spielt dabei eine wichtige Rolle, wie im folgenden Satz zu sehen ist:

Satz 2.17 (Transformation auf Beobachtungsnormalform) *Das lineare zeitinvariante System (2.146) kann durch die Transformation (2.147) mit*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v} \quad \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{v}], \quad \mathbf{v} = \mathbf{Q}_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

auf die Beobachtungsnormalform (2.148) gebracht werden, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ regulär ist. Dabei stellt $\mathbf{v}$ die letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix dar.

In Analogie zur Regelungsnormalform (2.123) ist die Beobachtungsnormalform besonders gut für den *Beobachterentwurf* geeignet, der im späteren Verlauf der Vorlesung behandelt wird. Charakteristisch für die Beobachtungsnormalform ist, dass die Ausgangsgröße y lediglich von der letzten Komponente des Zustands $\tilde{\mathbf{x}}$ abhängt.

Die Beobachtungsnormalform lässt sich auch für Mehrgrößensysteme (2.132) angeben. Dafür sei auf die am Ende des Kapitels angegebene Literatur verwiesen.

2.7 Dualitätsprinzip

Es wurde bereits in Abschnitt 2.4.2 gezeigt, dass eine skalare Übertragungsfunktion $G(s)$ unverändert bleibt, wenn man sie transponiert, d.h.

$$G(s) = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{b}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{c} + d. \quad (2.150)$$

Mit dieser Motivation kann man auch allgemein im Mehrgrößenfall ($m \geq 1$) das sogenannte *primale* und *duale* System

$$\begin{array}{ccc} \text{primales} & \boxed{\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{array}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_D = \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_D + \mathbf{C}^\top \mathbf{u}_D \\ \mathbf{y}_D = \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_D + \mathbf{D}^\top \mathbf{u}_D \end{array}} & \text{duales} \\ \text{System} & & & \text{System} \end{array} \quad (2.151)$$

definieren. Für die Übertragungsmatrizen gilt $\mathbf{G}_D(s) = \mathbf{G}^\top(s)$, wie sich durch Transponieren von $\mathbf{G}(s)$ leicht zeigen lässt:

$$\mathbf{G}^\top(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D})^\top = \mathbf{B}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{C}^\top + \mathbf{D}^\top = \mathbf{G}_D(s). \quad (2.152)$$

Darüberhinaus gilt die Eigenschaft, dass die Steuerbarkeit (Beobachtbarkeit) des primalen Systems äquivalent zur Beobachtbarkeit (Steuerbarkeit) des dualen Systems ist. Dies ist anhand der transponierten Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrizen

$$\mathbf{Q}_S^\top = \mathbf{Q}_{B,D}, \quad \mathbf{Q}_B^\top = \mathbf{Q}_{S,D}$$

leicht zu zeigen und lässt sich in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2.18 (Steuerbarkeit/Beobachtbarkeit des dualen Systems) *Das duale System ist genau dann steuerbar (beobachtbar), wenn das primale System beobachtbar (steuerbar) ist.*

2.8 Literatur

- [1] C.T. Chen. *Control System Design*. Pond Woods Press, New York, 1987.
- [2] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig, Heidelberg, 8. Auflage, 1994.
- [3] H. Geering. *Regelungstechnik*. Springer, Berlin, 6. Auflage, 2004.
- [4] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1980.
- [5] G. Ludyk. *Theoretische Regelungstechnik 1*. Springer, Berlin, 1995.
- [6] D.G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [7] J. Lunze. *Regelungstechnik 1*. Springer, Berlin, 5. Auflage, 2005.

- [8] J. Lunze. *Regelungstechnik 2*. Springer, Berlin, 4. Auflage, 2006.
- [9] L. Padulo und M.A. Arbib. *System Theory*. W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1974.
- [10] W.J. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York, 1991.
- [11] W.J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2. Auflage, 1996.
- [12] M. Zeitz. Differenzielle Flachheit: Eine nützliche Methodik auch für lineare SISO-Systeme. *at-Automatisierungstechnik*, 58(1):5–13, 2010.

Kapitel 3

Zustandsregler

In der Vorlesung “Einführung in die Regelungstechnik” wurden vorrangig *Ausgangsregelungen* für Eingrößensysteme ($m = p = 1$) betrachtet, bei denen die Ausgangsgröße y gemessen wird. Mit der Kenntnis von y und der vorgegebenen Führungsgröße w berechnet der Regler als dynamisches System die Stellgröße u , siehe Abbildung 3.1.

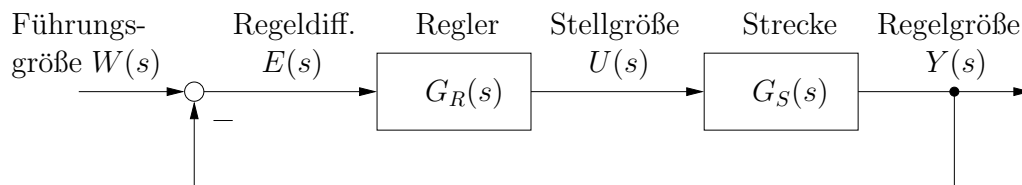


Abbildung 3.1: Ausgangsregelung (Eingrößenfall $m = p = 1$).

Setzt man voraus, dass der gesamte Zustand eines Systems messtechnisch erfassbar ist (bzw. geschätzt werden kann, siehe Kapitel 4), dann ist es möglich, einen (linearen) *Zustandsregler*

$$\boxed{u = -Kx + Sw} \quad (3.1)$$

zu entwerfen. In Abbildung 3.2 ist der Regelkreis mit der $(m \times n)$ -Rückführ- bzw. Reglermatrix K und der $(m \times p)$ -Vorfiltermatrix S dargestellt.

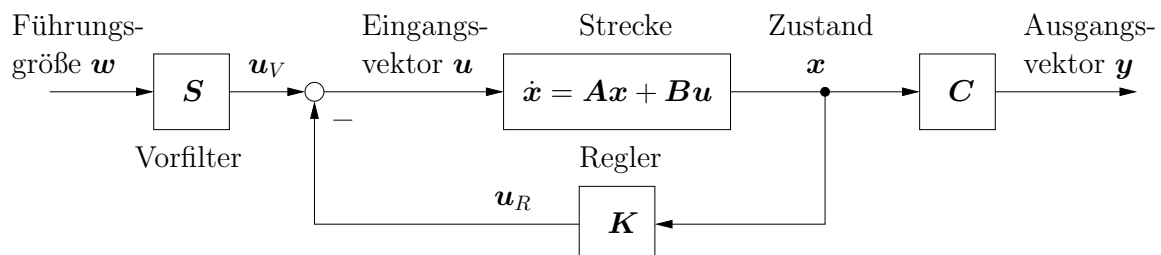


Abbildung 3.2: Zustandsregler (Mehrgrößenfall $m, p \geq 1$).

In den folgenden Betrachtungen wird ein lineares Mehrgrößensystem mit dem Eingangsvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und ohne Durchgriff ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) im Ausgangsvektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ betrachtet

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Beim Auslegen eines Zustandsreglers sind insbesondere die folgenden regelungstechnischen Ziele von Interesse:

- (a) Stabilität des geregelten Systems
- (b) Einstellen eines gewünschten Eingangs-/Ausgangsverhaltens
- (c) Erhöhung der Dämpfung
- (d) Erzielung eines verbesserten transienten Verhaltens
- (e) Kompensation von Störungen
- (f) Genaue Führungsgrößenfolge.

Insbesondere im Hinblick auf Punkt (a) soll die Reglermatrix $\mathbf{K}$ so ausgelegt werden, dass der geschlossene Kreis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w}) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BS}\mathbf{w}\tag{3.3}$$

asymptotisch stabil ist, die Eigenwerte λ_i der Dynamikmatrix $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ im geschlossenen Kreis also in der linken Halbebene liegen.

Der Punkt (e) wird in Abschnitt 3.6 behandelt, während Punkt (f) im letzten Kapitel des Skriptes betrachtet wird. In diesem Kapitel wird davon ausgegangen, dass die Führungsgröße $\mathbf{w}$ konstant ist und dass zunächst keine Störungen auf das System (3.2) wirken.

3.1 Stationäres Vorfilter

Falls mit einem Zustandsregler der Ursprung eines linearen Systems (3.2) stabilisiert werden soll, ist es ausreichend, die Verstärkungsmatrix $\mathbf{K}$ im Rückführgesetz (3.1) zu bestimmen. Im allgemeinen Fall einer Führungsgröße $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ kommt ein *Vorfilter* zum Einsatz, siehe Abbildung 3.2.

Wenn davon ausgegangen wird, dass die Reglermatrix $\mathbf{K}$ bekannt ist, gilt im geschlossenen Kreis (3.3). Das Vorfilter soll nun so entworfen werden, dass keine bleibende Regelabweichung am stationären Ausgang

$$\mathbf{y}_\infty = \mathbf{C}\mathbf{x}_\infty,\tag{3.4}$$

d.h. für $t \rightarrow \infty$, auftritt. Mit der stationären Rückführung $\mathbf{u}_\infty = -\mathbf{K}\mathbf{x}_\infty + \mathbf{S}\mathbf{w}$ ist der stationäre Zustand $\mathbf{x}_\infty$ durch

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}_\infty + \mathbf{BS}\mathbf{w}$$

bestimmt. Wenn der geschlossene Kreis (3.3) asymptotisch stabil ist, liegen alle Eigenwerte λ_i der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ in der linken Halbebene. Somit ist $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ regulär, so dass

$$\mathbf{x}_\infty = (\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BS}\mathbf{w}$$

gilt. Der stationäre Ausgang (3.4) lautet also

$$\mathbf{y}_\infty = \mathbf{C}(\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{w}. \quad (3.5)$$

Für die gleiche Anzahl an Stell- und Ausgangsgrößen ($m = p$) ist die Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ quadratisch. Mit der Zwangsbedingung $\mathbf{y}_\infty = \mathbf{I} \mathbf{w} = \mathbf{w}$ kann die Vorfiltermatrix $\mathbf{S}$ somit durch Inversion bestimmt werden

$$\boxed{\mathbf{S} = [\mathbf{C}(\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}]^{-1}}. \quad (3.6)$$

Die Invertierbarkeit des Klammerausdruckes folgt aus der Annahme, dass jedes gewünschte $\mathbf{y}_\infty$ in (3.5) durch geeignete Wahl von $\mathbf{u}_V = \mathbf{S} \mathbf{w}$ (siehe Abbildung 3.2) einstellbar ist.

3.2 Direkte Eigenwertvorgabe im Eingrößenfall

Der Grundgedanke der Eigenwert- bzw. Polvorgabe besteht darin, die Eigenwerte des geschlossenen Kreises (3.3) vorzugeben, um z.B. eine gewünschte Dynamik zu erzielen. In diesem Abschnitt wird ein lineares System mit skalarer Stellgröße u

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

betrachtet. Setzt man nun das Zustandsregelgesetz

$$u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} + S w \quad (3.8)$$

an, so wird beim Reglerentwurf durch Polvorgabe die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^\top$ so gewählt, dass die Matrix $\mathbf{A}_R$ des geschlossenen Kreises

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^\top)}_{\mathbf{A}_R} \mathbf{x} + S \mathbf{b} w, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

die gewünschten Eigenwerte λ_i^* , $i = 1, \dots, n$ besitzt.

Die einfachste Möglichkeit der Polvorgabe besteht darin, die Reglerverstärkung durch Koeffizientenvergleich des gewünschten charakteristischen Polynoms und des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises (3.9) zu berechnen.

Dazu betrachtet man das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises (3.9)

$$\begin{aligned} q(\lambda, \mathbf{k}) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^\top) \\ &= q_0(\mathbf{k}) + q_1(\mathbf{k}) \lambda + \dots + q_{n-1}(\mathbf{k}) \lambda^{n-1} + \lambda^n, \end{aligned} \quad (3.10)$$

bei dem die Koeffizienten $q_i(\mathbf{k})$ von den (noch unbekannten) Elementen der Reglerverstärkung $\mathbf{k}^\top = [k_1, \dots, k_n]$ abhängen. Durch Polvorgabe soll sich das charakteristische Polynom

$$p^*(\lambda) = p_0 + p_1 \lambda + \dots + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) \quad (3.11)$$

mit den vorgegebenen Eigenwerten λ_i^* einstellen. Gleichsetzen von (3.10) und (3.11)

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^\top) \stackrel{!}{=} \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*)$$

bzw.

$$q_0(\mathbf{k}) + q_1(\mathbf{k})\lambda + \dots + q_{n-1}(\mathbf{k})\lambda^{n-1} + \lambda^n \stackrel{!}{=} p_0 + p_1\lambda + \dots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

sowie anschließender Koeffizientenvergleich führt zu

$$q_0(\mathbf{k}) = p_0, \quad q_1(\mathbf{k}) = p_1, \quad \dots \quad q_{n-1}(\mathbf{k}) = p_{n-1}. \quad (3.12)$$

Das Gleichungssystem (3.12) besteht aus n Gleichungen für die n Elemente k_i der Reglerverstärkung $\mathbf{k}$.

Im Falle mehrerer Stellgrößen $m > 1$ ist das Gleichungssystem für die Elemente k_{ij} der Reglermatrix $\mathbf{K}$ unterbestimmt (n Gleichungen, nm Unbekannte k_{ij}). Es existieren also unendlich viele Lösungen, sofern das System (3.2) steuerbar ist. Zudem sind die Gleichungen (3.12) im Mehrgrößenfall nichtlinear, da jetzt Produkte und Potenzen der Unbekannten k_{ij} auftreten. Die direkte Eigenwertvorgabe ist somit nur für Eingrößensysteme empfehlenswert.

Beispiel 3.1 Betrachtet wird das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.13)$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Mit der Rückführung $u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x}$ und der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top = \begin{bmatrix} k_1 - 2 & k_2 & 3 + k_3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -k_1 & -k_2 & 1 - k_3 \end{bmatrix}$$

ergibt sich das charakteristische Polynom (3.10)

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_R) = \underbrace{4 - 8k_1 + 8k_2 - 4k_3}_{q_0(\mathbf{k})} + \underbrace{(-4 + 6k_1 + k_2)}_{q_1(\mathbf{k})} \lambda + \underbrace{(-1 - k_1 + k_3)}_{q_2(\mathbf{k})} \lambda^2 + \lambda^3. \quad (3.14)$$

Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises sollen nun auf $\lambda_1^* = -2$ (unverändert), $\lambda_2^* = -1$ und $\lambda_3^* = -3$ platziert werden. Das zugehörige charakteristische Polynom (3.11) lautet

$$p^*(\lambda) = \prod_{i=1}^3 (\lambda - \lambda_i^*) = 6 + 11\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3. \quad (3.15)$$

Ein Koeffizientenvergleich zwischen (3.14) und (3.15) führt auf ein lineares Gleichungssystem für $\mathbf{k}^\top = [k_1, k_2, k_3]$ mit der Lösung

$$k_1 = \frac{3}{2}, \quad k_2 = 6, \quad k_3 = \frac{17}{2}.$$

Aufgabe 3.1 Unter MATLAB kann die Funktion `place` für die direkte Eigenwertvorgabe verwendet werden. Informieren Sie sich über die Funktion mit Hilfe des MATLAB-Aufrufs `“help place”` bzw. `“doc place”`. Überprüfen Sie die Ergebnisse aus Beispiel 3.1.

3.3 Reglerentwurf in Regelungsnormalform

Der Entwurf eines Zustandsreglers durch Transformation auf die Regelungsnormalform stellt einen allgemeineren Ansatz als die direkte Eigenwertvorgabe im vorherigen Abschnitt dar.

3.3.1 Ackermann-Formel (Eingrößenfall)

In Abschnitt 2.5.3 wurde gezeigt, dass das System (3.7) auf die Regelungsnormalform (2.123) gebracht werden kann, indem die Transformation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \mathbf{x}, \quad \mathbf{t}^\top = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_s^{-1} \quad (3.16)$$

mit der letzten Zeile $\mathbf{t}^\top$ der inversen Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_s^{-1}$ verwendet wird. Für einen Reglerentwurf mittels Eigenwertvorgabe ist die Regelungsnormalform besonders gut geeignet, da die Stellgröße u ausschließlich die letzte Zeile der Normalform beeinflusst.

Eine kompaktere Darstellung der Regelungsnormalform (2.123) ist

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} &= \tilde{x}_n \\ \dot{\tilde{x}}_n &= \mathbf{g}^\top \tilde{\mathbf{x}} + u \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei sich $\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{x}_{i+1}$ direkt aus (2.123) ergibt, während die letzte Zeile mit

$$\mathbf{g}^\top = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^n \mathbf{T}^{-1} \quad (3.18)$$

durch Differentiation von $\tilde{x}_n$ und Vergleich mit (2.123) resultiert. Durch den Ansatz

$$u = v - \mathbf{g}^\top \tilde{\mathbf{x}} \quad (3.19)$$

mit dem neuen Eingang v kann die Regelungsnormalform (3.17) auf die entkoppelte Form

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} &= \tilde{x}_n \\ \dot{\tilde{x}}_n &= v \end{aligned} \quad (3.20)$$

gebracht werden, die eine Integratorkette der Länge n mit v als neuem Eingang darstellt, siehe Abbildung 3.3. Setzt man nun ausgehend von einem gewünschten charakteristischen

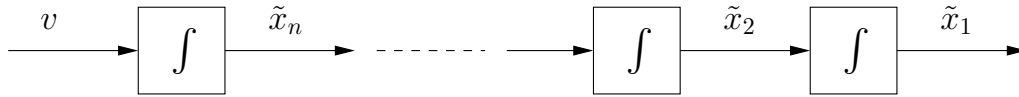


Abbildung 3.3: Entkoppelte Regelungsnormalform (3.20) im Eingrößenfall.

Polynom

$$p^*(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) \quad (3.21)$$

den neuen Eingang v wie folgt an

$$v = -p_0\tilde{x}_1 - \cdots - p_{n-1}\tilde{x}_n, \quad (3.22)$$

so ergibt sich die Dynamik des geschlossenen Kreises zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_R} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (3.23)$$

Es ist direkt ersichtlich, dass für das charakteristische Polynom im geschlossenen Kreis $\det(\lambda\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_R) = p^*(\lambda)$ gilt. Die tatsächliche Stellgröße (3.19) ergibt sich aus dem Rückführgesetz (3.22) für v und (3.16), (3.18) zu

$$\begin{aligned} u &= -p_0\tilde{x}_1 - \cdots - p_{n-1}\tilde{x}_n - \mathbf{g}^\top \tilde{\mathbf{x}} \\ &= -\underbrace{\mathbf{t}^\top (p_0\mathbf{I} + \cdots + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n)}_{\mathbf{k}^\top} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die Bestimmungsgleichung für die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^\top$ ist die bekannte *Ackermann-Formel*, die im folgenden Satz festgehalten ist:

Satz 3.1 (Ackermann-Formel im Eingrößenfall) Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ des geschlossenen Kreises (3.9) mit der Rückführung (3.8) können genau dann beliebig platziert werden, wenn das System (3.7) steuerbar ist. Der Rückführvektor berechnet sich dann nach der Formel

$$\mathbf{k}^\top = \mathbf{t}^\top (p_0\mathbf{I} + p_1\mathbf{A} + \cdots + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) \quad (3.25)$$

in Abhängigkeit von $\mathbf{t}^\top$ in (3.16) – der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix (2.113) – und den Koeffizienten p_i des gewünschten charakteristischen Polynoms (3.21).

Beispiel 3.2 (Simulationsbeispiel) In Abbildung 3.4 ist ein Zwei-Massen-Schwinger mit den zwei Massen m_1 und m_2 , zwei Federn (Federkonstanten c_1 und c_2) und zwei Dämpferelementen (Dämpfungskonstanten d_1 und d_2) dargestellt. Die externe Kraft F_{ext} , dient als Stellgröße $u = F_{\text{ext}}$ für das System. Die auf die zweite Masse m_2 wirkende Kraft

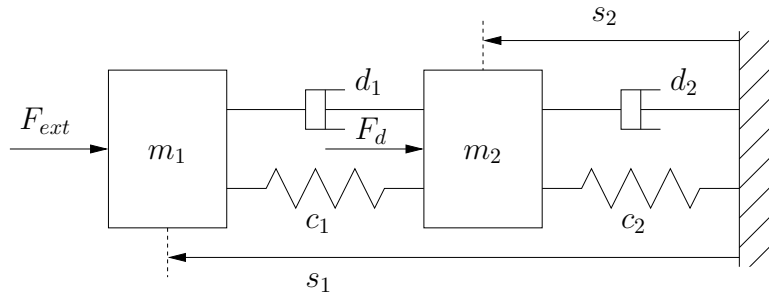


Abbildung 3.4: Gekoppelter Feder-Masse-Schwinger (Beispiel 3.2).

F_d stellt eine unbekannte Störung dar. Das mathematische Modell errechnet sich direkt durch Anwendung des Impulserhaltungssatzes auf die beiden Massen m_1 und m_2 in der Form

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 &= -c_1 (s_1 - s_2) - d_1 (\dot{s}_1 - \dot{s}_2) - F_{ext} \\ m_2 \ddot{s}_2 &= c_1 (s_1 - s_2) + d_1 (\dot{s}_1 - \dot{s}_2) - c_2 s_2 - d_2 \dot{s}_2 - F_d, \end{aligned} \quad (3.26)$$

wobei s_1 und s_2 die Auslenkungen der Massen m_1 und m_2 um die entspannte Lage der Federn beschreiben.

Die Zustandsdarstellung des Zwei-Massen-Schwingers erhält man mit den Zustandsgrößen $\mathbf{x} = [s_1, \dot{s}_1, s_2, \dot{s}_2]^T$, der Stellgröße $u = F_{ext}$, der Störung $d = F_d$ und der AusgangsgröÙe $y = s_2$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{m_1} & -\frac{d_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & \frac{d_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_1}{m_2} & \frac{d_1}{m_2} & -\frac{c_1 + c_2}{m_2} & -\frac{d_1 + d_2}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} d, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Für die Parameter

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 10, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad d_1 = d_2 = 1 \quad (3.28)$$

lautet die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -0.1 \\ -1 & 1 & -0.1 & -0.98 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.02 \\ 0 & -0.1 & 0.02 & 0.106 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Anhand der Determinante $\det(\mathbf{Q}_S) = 0.01$ erkennt man, dass $\mathbf{Q}_S$ regulär ist. Die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$ lautet

$$\mathbf{t}^T = [-1, 0, -8, 10]. \quad (3.30)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ liegen bei

$$\lambda_{1/2} \approx -0.555 \pm j 0.9, \quad \lambda_{3/4} \approx -0.045 \pm j 0.3$$

und sollen im geschlossenen Kreis auf

$$\lambda_{1/2}^* = -0.5 \pm j 0.5, \quad \lambda_3^* = -1, \quad \lambda_4^* = -2$$

verschoben werden. Die Ackermann-Formel (3.25) liefert die Reglerverstärkung

$$\mathbf{k}^\top = [-1.8, -2.8, -5.4, -18.4]. \quad (3.31)$$

Um stationär einen gewünschten Sollwert w für y erreichen zu können (Abbildung 3.2), wird zusätzlich ein Vorfilter S gemäß (3.6) berechnet

$$S = (\mathbf{c}^\top (\mathbf{b} \mathbf{k}^\top - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b})^{-1} = -10$$

Somit ergibt sich der gesamte Regeleingriff (siehe Abbildung 3.2)

$$u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} + S w. \quad (3.32)$$

Aufgabe 3.2 Unter MATLAB kann die Ackermann-Formel (3.25) mit Hilfe der Funktion `acker` berechnet werden. Informieren Sie sich über die Funktion mit Hilfe des MATLAB-Aufrufs “`help acker`” bzw. “`doc acker`”. Überprüfen Sie mit Hilfe der `acker`-Funktion die Reglerverstärkung (3.31) in Beispiel 3.2 als auch die Ergebnisse in Beispiel 3.1.

3.3.2 Steuerbarkeitsindizes (Mehrgrößenfall)

Im Mehrgrößenfall kann ein Reglerentwurf in der Regelungsnormalform analog zum Eingrößenfall in Abschnitt 3.3.1 erfolgen. Um zunächst die Mehrgrößen-Regelungsnormalform herleiten zu können, ist der Begriff der *Steuerbarkeitsindizes* von Bedeutung. Dazu ist es hilfreich, das lineare Systeme (3.2) in Abhängigkeit der einzelnen Stellgrößen $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^\top$ mit den Steuervektoren $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m]$ darzustellen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i u_i, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.33)$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Steuervektoren $\mathbf{b}_i$ linear unabhängig sind, also die Rangbedingung

$$\text{Rang}(\mathbf{B}) = m$$

erfüllt ist. Mit der Darstellung (3.33) lässt sich auch die Steuerbarkeitsmatrix (2.113) spaltenweise angeben

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{A} \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A} \mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}_m]. \quad (3.34)$$

Im Eingrößenfall konnte die inverse Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$ dazu verwendet werden, um die Transformation auf Regelungsnormalform zu erreichen (Satz 2.13). Im Mehrgrößenfall ist dies nicht so einfach möglich, schon allein wegen der Tatsache, dass die Steuerbarkeitsmatrix (3.34) nicht quadratisch ist.

Im ersten Schritt muss daher $\mathbf{Q}_S$ nach n linear unabhängigen Spalten durchsucht werden. Dies führt auf den Begriff der *Steuerbarkeitsindizes*, die von elementarer Bedeutung im Mehrgrößenfall sind:

Definition 3.1 (Steuerbarkeitsindizes) Der i -te Steuerbarkeitsindex ρ_i des linearen steuerbaren Systems (3.33) ist die kleinste ganze Zahl, so dass der Spaltenvektor $\mathbf{A}^{\rho_i} \mathbf{b}_i$ von den links gelegenen Spalten der Steuerbarkeitsmatrix (3.34) linear abhängig ist.

Wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ regulär ist, das System (3.33) also vollständig steuerbar ist, so ist auch die reduzierte Steuerbarkeitsmatrix¹

$$\tilde{\mathbf{Q}}_S = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{\rho_1-1} \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{\rho_m-1} \mathbf{b}_m] , \quad \sum_{i=1}^m \rho_i = n , \quad (3.35)$$

die sich mit Hilfe der Steuerbarkeitsindizes ergibt, regulär. Die Definition der Steuerbarkeitsindizes beinhaltet ebenfalls den Eingrößenfall, bei dem die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ durch

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

gegeben ist. Wenn $\mathbf{Q}_S$ regulär ist, dann gilt für den (einzelen) Steuerbarkeitsindex $\rho = n$.

Beispiel 3.3 Gegeben ist das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} . \quad (3.36)$$

Die Steuerbarkeitsmatrix (3.34) lautet

$$\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.37)$$

Zunächst wird der erste Steuerbarkeitsindex ρ_1 untersucht. Für $\rho_1 \stackrel{?}{=} 1$ ist offensichtlich, dass $\mathbf{A}\mathbf{b}_1$ und die linken Spalten $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ linear unabhängig sind. Es muss also $\rho_1 > 1$ gelten. Tatsächlich ist $\rho_1 = 2$, da sich $\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1$ als Linearkombination

$$\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_2$$

der von $\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1$ links gelegenen Spalten in $\mathbf{Q}_S$ darstellen lässt. Analog dazu ergibt sich der zweite Steuerbarkeitsindex $\rho_2 = 2$, da offensichtlich gilt

$$\mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{A}\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 .$$

Die reduzierte Steuerbarkeitsmatrix (3.35) lautet somit

$$\tilde{\mathbf{Q}}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (3.38)$$

¹ Man beachte, dass die Spalten in $\tilde{\mathbf{Q}}_S$ anders geordnet sind als in $\mathbf{Q}_S$!

Aufgabe 3.3 Berechnen Sie die Steuerbarkeitsindizes ρ_1, ρ_2, ρ_3 für das System (3.33) mit der System- und Steuermatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

3.3.3 Regelungsnormalform (Mehrgrößenfall)

Die Steuerbarkeitsindizes ρ_i sind von elementarer Bedeutung, um das Mehrgrößensystem (3.33) auf Regelungsnormalform zu überführen. Die Transformationsvorschrift ist eine Verallgemeinerung des Eingrößenfalls (3.16) und besitzt die Blockstruktur

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{1,\rho_1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,\rho_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Die Vektoren $\mathbf{t}_i^\top$ sind durch die Vorschrift

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{e}_m^\top \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_S^{-1}, \quad \mathbf{e}_i^\top = [\underbrace{0, \dots, 0}_{(\sum_{j=1}^i \rho_j)-1}, 1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^n \quad (3.40)$$

gegeben. Der Vektor $\mathbf{t}_i^\top$ stellt die $\sum_{j=1}^i \rho_j$ -te Zeile der inversen reduzierten Steuerbarkeitsmatrix (3.35) dar und verallgemeinert somit den Eingrößenfall (3.16).

Satz 3.2 (Transformation auf Regelungsnormalform – Mehrgrößenfall) Das lineare Mehrgrößensystem (3.33) erfülle die Rangbedingung $\text{Rang}(\mathbf{B}) = m$ und sei vollständig steuerbar mit den Steuerbarkeitsindizes $\rho_1, \dots, \rho_m$. Dann kann das System (3.33) mit Hilfe der Transformation (3.39), (3.40) auf die Regelungsnormalform

$$\begin{array}{lcl} \dot{\tilde{x}}_{i,1} & = & \tilde{x}_{i,2} \\ & \vdots & \\ \dot{\tilde{x}}_{i,\rho_i-1} & = & \tilde{x}_{i,\rho_i} \\ \dot{\tilde{x}}_{i,\rho_i} & = & \mathbf{g}_i^\top \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{h}_i^\top \mathbf{u}, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \quad (3.41)$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{g}_i^\top = \mathbf{t}_i^\top \mathbf{A}^{\rho_i} \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{h}_i^\top = \mathbf{t}_i^\top \mathbf{A}^{\rho_i-1} \mathbf{B}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.42)$$

gebracht werden. Dabei stellt $\mathbf{t}_i^\top$ die $\sum_{j=1}^i \rho_j$ -te Zeile der inversen reduzierten Steuerbarkeitsmatrix (3.35) dar.

Die Matrixdarstellung der Regelungsnormalform (3.41) lautet

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1 & \tilde{\mathbf{N}}_1^2 & \cdots & \tilde{\mathbf{N}}_1^m \\ \tilde{\mathbf{N}}_2^1 & \tilde{\mathbf{D}}_2 & & \tilde{\mathbf{N}}_2^m \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{N}}_m^1 & \tilde{\mathbf{N}}_m^2 & \cdots & \tilde{\mathbf{D}}_m \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}_m \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T} \mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (3.43)$$

mit den Blockmatrizen

$$\tilde{\mathbf{D}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ \times & \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_i \times \rho_i}, \quad \tilde{\mathbf{N}}_i^j = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_i \times \rho_j} \quad (3.44)$$

sowie

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times & 1 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_i \times m}, \quad (3.45)$$

wobei die “ $\times$ ”-Einträge Elemente bezeichnen, die nicht notwendigerweise 0 oder 1 sind.

Es ist direkt ersichtlich, dass (3.41) bzw. (3.43) die Regelungsnormalform (2.123) bzw. (3.17) im Eingrößenfall beinhaltet. Im allgemeineren Fall mit $m > 1$ Stellgrößen umfasst die Blockstruktur in (3.41) m Blöcke für die Zustände $(\tilde{x}_{i,1}, \dots, \tilde{x}_{i,\rho_i})$ entsprechend dem Steuerbarkeitsindex ρ_i .

Beispiel 3.4 Betrachtet wird erneut Beispiel 3.3. Die inverse reduzierte Steuerbarkeitsmatrix (3.38) lautet

$$\tilde{\mathbf{Q}}_S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Aufgrund der Steuerbarkeitsindizes $\rho_1 = 2$ und $\rho_2 = 2$ stellen die Vektoren $\mathbf{t}_1^\top$ und $\mathbf{t}_2^\top$ in (3.40) die 2. und 4. Zeile von $\tilde{\mathbf{Q}}_S^{-1}$ dar, d.h.

$$\mathbf{t}_1^\top = [0, 1, 0, 0], \quad \mathbf{t}_2^\top = [0, 0, 1, 0]. \quad (3.47)$$

Mit der System- und Steuermatrix in (3.36) erhält man die vollständige Transformationsvorschrift (3.39)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} \\ \tilde{x}_{1,2} \\ \tilde{x}_{2,1} \\ \tilde{x}_{2,2} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{x}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \\ \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_2^\top \\ \mathbf{t}_2^\top \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zur Aufstellung der Regelungsnormalform kann man nun entweder die Vektoren $\mathbf{g}_i^\top$, $\mathbf{h}_i^\top$ gemäß (3.41) oder die gesamte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$ in (3.43) berechnen. In

beiden Fällen erhält man in Matrixform geschrieben

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -7 & 5 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (3.48)$$

Aufgabe 3.4 (Fortsetzung Aufgabe 3.3) Transformieren Sie das in Aufgabe 3.3 gegebene System auf Regelungsnormalform.

Lösung: Da $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ gilt, haben die Integratorketten in der Regelungsnormalform (3.41) bzw. (3.43) lediglich die Länge 1:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} \\ \tilde{x}_{2,1} \\ \tilde{x}_{3,1} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3.5 Untersuchen Sie das Mehrgrößensystem mit der System- und Steuermatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a > 0$$

auf Steuerbarkeit. Berechnen Sie die Steuerbarkeitsindizes ρ_1, ρ_2 und stellen Sie die reduzierte Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_S$ auf. Bestimmen Sie die Transformationsvorschrift (3.39), (3.40) und transformieren Sie das System anschließend auf Regelungsnormalform.

Hinweis: Die Steuerbarkeitsindizes sind $\rho_1 = 2$ und $\rho_2 = 4$. Verwenden Sie MATLAB zum Aufstellen der Matrizen und die Befehle `rank` und `inv` zur Rangüberprüfung und numerischen Inversion.

3.3.4 Entkopplung und Eigenwertvorgabe

Analog zum Eingrößenfall kann auch bei Mehrgrößensystemen eine lineare Zustandsrückführung (3.1)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w}$$

entworfen werden, um die Pole des geschlossenen Kreises

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})}_{\mathbf{A}_R} \mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w}$$

vorzugeben. Die Regelungsnormalform (3.41) ist dazu besonders vorteilhaft, da die Stellgrößen $\mathbf{u}$ jeweils am Ende der einzelnen Integratorketten bzw. in den letzten Zeilen der einzelnen Blöcke in (3.43) auftauchen.

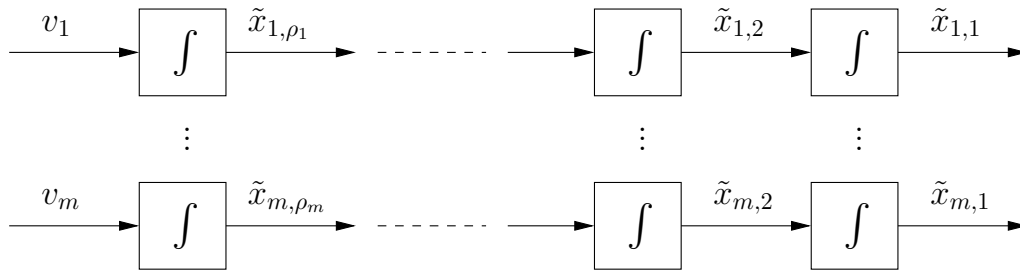


Abbildung 3.5: Entkoppelte Regelungsnormalform (3.51) im Mehrgrößenfall.

Die letzten Differenzialgleichungen der Regelungsnormalform (3.41) lassen sich in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{1, \rho_1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{m, \rho_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m-1} \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{u}}_{\mathbf{H}} \quad (3.49)$$

mit der *Kopplungsmatrix* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ zusammenfassen. Unter der Annahme, dass $\text{Rang}(\mathbf{B}) = m$ gilt, ist $\mathbf{H}$ invertierbar und die Wahl der Stellgröße

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}^{-1} \left(- \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \right) \quad (3.50)$$

mit den neuen Eingängen $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_m]^\top$ führt auf die entkoppelte Form der Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{i,1} &= \tilde{x}_{i,2} \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i, \rho_i-1} &= \tilde{x}_{i, \rho_i} \\ \dot{\tilde{x}}_{i, \rho_i} &= v_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.51)$$

die m Integratorketten der Länge ρ_i mit den neuen Eingängen v_i darstellt, siehe Abbildung 3.5.

In Analogie zum Eingrößenfall setzt man nun die neuen Eingänge v_i wie folgt an

$$v_i = -p_{i,0} \tilde{x}_{i,1} - \dots - p_{i, \rho_i-1} \tilde{x}_{i, \rho_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.52)$$

wobei $p_{i,j}$ die Koeffizienten der gewünschten charakteristischen Polynome

$$p_i^*(\lambda) = p_{i,0} + p_{i,1} \lambda + \dots + p_{i, \rho_i-1} \lambda^{\rho_i-1} + \lambda^{\rho_i} = \prod_{j=1}^{\rho_i} (\lambda - \lambda_{i,j}^*), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.53)$$

sind. Auf diese Weise stellt sich für die einzelnen Integratorketten (3.51) die Dynamik

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{i,1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i, \rho_i} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -p_{i,0} & -p_{i,1} & \dots & -p_{i, \rho_i} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{R,i}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{i, \rho_i} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\lambda \mathbf{I}_{\rho_i} - \tilde{\mathbf{A}}_{R,i}) = p_i^*(\lambda) \quad (3.54)$$

ein. Die tatsächliche Stellgröße (3.50) ergibt sich aus (3.52) und (3.39), (3.42) zu

$$\mathbf{u} = -\mathbf{H}^{-1} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{1,0} \mathbf{t}_1^\top + \cdots + p_{1,\rho_1-1} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1-1} \\ \vdots \\ p_{m,0} \mathbf{t}_m^\top + \cdots + p_{m,\rho_m-1} \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m-1} \end{bmatrix} \right)}_{\mathbf{K}} \mathbf{x}. \quad (3.55)$$

Dies stellt die Mehrgrößenvariante der Ackermann-Formel dar, die im folgenden Satz zusammengefasst ist.

Satz 3.3 (Ackermann-Formel im Mehrgrößenfall) *Unter der Annahme, dass das System (3.2) steuerbar ist und $\text{Rang}(\mathbf{B}) = m$ gilt, können die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ mit der Rückführung (3.1) beliebig platziert werden. Die Reglermatrix $\mathbf{K}$ berechnet sich dann nach der Formel*

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top (p_{1,0} \mathbf{I} + p_{1,1} \mathbf{A} + \cdots + p_{1,\rho_1-1} \mathbf{A}^{\rho_1-1} + \mathbf{A}^{\rho_1}) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top (p_{m,0} \mathbf{I} + p_{m,1} \mathbf{A} + \cdots + p_{m,\rho_m-1} \mathbf{A}^{\rho_m-1} + \mathbf{A}^{\rho_m}) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

in Abhängigkeit von der Kopplungsmatrix $\mathbf{H}$ in (3.49) und den Vektoren $\mathbf{t}_i^\top$ – den $\sum_{j=1}^i \rho_j$ -ten Zeilen der inversen reduzierten Steuerbarkeitsmatrix (3.35) – sowie den Koeffizienten $p_{i,j}$ der charakteristischen Polynome (3.53).

Im Mehrgrößenfall existieren verschiedene Freiheitsgrade, die im Eingrößenfall nicht vorhanden sind. Zum Beispiel ist es nicht eindeutig, wie die charakteristischen Polynome (3.53) zu wählen sind, bzw. wie die n Eigenwerte

$$\{\lambda_{1,1}^*, \dots, \lambda_{1,\rho_1}^*\} \dots \{\lambda_{m,1}^*, \dots, \lambda_{m,\rho_m}^*\}$$

auf die einzelnen Steuerbarkeitsindizes ρ_i zu verteilen sind, die die Dynamik der einzelnen entkoppelten Systeme (3.51) bestimmen. Des Weiteren existieren neben den Steuerbarkeitsindizes ρ_i (Definition 3.1) in der Regel weitere Kombinationen $\{\rho'_1, \dots, \rho'_m\}$, so dass die reduzierte Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_S$ vollen Rang hat.

Beispiel 3.5 *Betrachtet wird das System (3.36) aus Beispiel 3.3. Die Steuerbarkeitsindizes $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 2$ sowie die Transformationsvektoren*

$$\mathbf{t}_1^\top = [0, 1, 0, 0], \quad \mathbf{t}_2^\top = [0, 0, 1, 0].$$

wurden bereits in Beispiel 3.4 berechnet. Die Kopplungsmatrix $\mathbf{H}$ gemäß (3.49) lautet

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_2^\top \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Ackermann-Formel (3.56) kann die Reglerverstärkung wie folgt berechnet werden

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top (p_{1,0} \mathbf{I} + p_{1,1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^2) \\ \mathbf{t}_2^\top (p_{2,0} \mathbf{I} + p_{2,1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^2) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

mit $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I}$. Die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ in (3.36) lassen sich unter MATLAB mit dem Befehl `eig` numerisch bestimmen und lauten

$$\lambda_{1/2} \approx -0.2806 \pm j 0.419, \quad \lambda_{3/4} \approx 2.7806 \pm j 0.367.$$

Das System (3.36) ist also instabil. Die gewünschten Eigenwerte im geschlossenen Kreis sollen nun auf $\{-1, -1, -2, -2\}$ verschoben werden. Dabei gibt es Freiheiten, wie die Paare $\{\lambda_{1,1}^*, \lambda_{1,2}^*\}$ und $\{\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}\}$ gewählt werden, z.B.

$$\begin{aligned} \{\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}\} &= \{-1, -1\} \\ \{\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}\} &= \{-2, -2\} \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 2 \\ 1 & 7 & 26 & 9 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \{\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}\} &= \{-1, -2\} \\ \{\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}\} &= \{-1, -2\} \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 13 & 2 \\ 1 & 5 & 21 & 8 \end{bmatrix}.$$

In beiden Fällen lässt sich leicht mit Hilfe von MATLAB überprüfen, dass die Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ des geschlossenen Kreises die gewünschten Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 3.6 Berechnen Sie für das in den Aufgaben 3.3 und 3.4 betrachtete Problem die Verstärkungsmatrix $\mathbf{K}$ gemäß (3.56). Verwenden Sie dazu die gewünschten Eigenwerte $\{-1, -2, -3\}$.

Aufgabe 3.7 Berechnen Sie die Verstärkungsmatrix $\mathbf{K}$ für das System in Aufgabe 3.5 mit den gewünschten Eigenwerten, indem Sie z.B. alle Eigenwerte auf -1 legen. Überprüfen Sie das Ergebnis durch Berechnung der Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ im geschlossenen Kreis.

Hinweis: Verwenden Sie MATLAB zum Auswerten der Ackermann-Formel (3.56) und zum Überprüfen der Eigenwerte.

3.4 Reglerentwurf durch Ein-/Ausgangsentkopplung

Bei dem Zustandsreglerentwurf über die Regelungsnormform wurde die Dynamik des geschlossenen Regelkreises vorgegeben, ohne die Ausgangsgrößen $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$ näher zu betrachten. Aufgrund der Verkopplung des Systems kann durch die Transformation auf Regelungsnormform in der Regel kein gewünschtes dynamisches Verhalten für die Ausgangsgrößen $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$ eingestellt werden.

Dies ist genau das Ziel bei der Ein-/Ausgangsentkopplung, bei der (wie der Name bereits sagt) das *Ein-/Ausgangsverhalten* des Systems entkoppelt wird, um ein gewünschtes Dynamikverhalten direkt für die einzelnen Ausgangsgrößen $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$ vorzugeben. Im Folgenden wird dazu angenommen, dass die Stellgrößen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und Ausgangsgrößen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ die gleiche Dimension besitzen, d.h.

$$\boxed{p = m}.$$

Dieses Reglerentwurfsverfahren geht ursprünglich auf *Falb* und *Wolovich* zurück, wobei weitere Einsichten durch das Aufkommen der Methodik der *Ein-/Ausgangslinearisierung* in der nichtlinearen Regelungstheorie gewonnen werden können.

3.4.1 Relativer Grad

Der Begriff des *relativen Grades* ist von maßgeblicher Bedeutung bei der Ein-/Ausgangsentkopplung. Dazu wird das lineare Mehrgrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i u_i \\ y_i &= \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}\quad (3.58)$$

elementweise in den einzelnen Stellgrößen u_i und Ausgangsgrößen y_i betrachtet.

Definition 3.2 (Vektorieller relativer Grad) *Das lineare System (3.58) besitzt den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) $\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^k \mathbf{b}_j = 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, r_i - 2$
- (ii) die $(m \times m)$ -Matrix

$$\mathbf{H}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^{r_1-1} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^{r_1-1} \mathbf{b}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{c}_m^T \mathbf{A}^{r_m-1} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{c}_m^T \mathbf{A}^{r_m-1} \mathbf{b}_m \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

ist nicht singulär, d.h. $\text{Rang}(\mathbf{H}_y) = m$.

Die Bedeutung des Index r_i wird klar, wenn der Ausgang $y_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}$ als Funktion der Zeit t sukzessive abgeleitet wird:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \mathbf{c}_i^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{c}_i^T [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] \mathbf{u}}_{= 0 \text{ wg. (i)}} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \ddot{y}_i &= \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{c}_i^T \mathbf{A} [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] \mathbf{u}}_{= 0 \text{ wg. (i)}} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} \\ &\vdots \\ y_i^{(r_i-1)} &= \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{r_i-2} [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] \mathbf{u}}_{= 0 \text{ wg. (i)}} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{x} \\ y_i^{(r_i)} &= \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{r_i} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{r_i-1} [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] \mathbf{u}}_{\neq 0 \text{ wg. (ii)}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Aus den obigen Gleichungen erkennt man, dass das Element r_i des vektoriellen relativen Grades $\{r_1, \dots, r_m\}$ angibt, wie oft der Ausgang y_i differenziert werden muss, bevor mindestens eine Stellgröße u_j erscheint. Wenn der vektorielle relative Grad wohldefiniert ist, gilt

$$\sum_{i=1}^m r_i \leq n. \quad (3.61)$$

Die höchsten Ausgangsableitungen $y_i^{(r_i)}$ bestimmen die Ein-/Ausgangskopplung

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1-1} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1-1} \mathbf{b}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m-1} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m-1} \mathbf{b}_m \end{bmatrix}}_{\text{Kopplungsmatrix } \mathbf{H}_y} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (3.62)$$

des Systems (3.58).

Eingrößenfall: Im Falle einer skalaren Stellgröße u und einer skalaren Ausgangsgröße y ($m = p = 1$) vereinfachen sich die Bedingungen in Definition 3.2 zu

$$\begin{aligned} (i) \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^k \mathbf{b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r-2 \\ (ii) \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

und die Kopplungsmatrix $\mathbf{H}_y$ reduziert sich auf die skalare Größe

$$H_y = \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad r \leq n. \quad (3.64)$$

Im Eingrößenfall ($m = p = 1$) verzichtet man sprachlich auf das Wort *vektoriell* und bezeichnet r als den *relativen Grad*.

3.4.2 Ein-/Ausgangsnormalform

Die Definition des vektoriellen relativen Grades $\{r_1, \dots, r_m\}$ kann nun verwendet werden, um die reguläre Zustandstransformation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_y \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_\eta \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{1,r_1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,r_m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times n}. \quad (3.65)$$

zu berechnen. Die ersten r Zustände $\tilde{\mathbf{x}}_y$ stellen die Ableitungen $y_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, r_i - 1$ der einzelnen Ausgänge y_i dar. Damit die Transformation regulär ist, muss $\mathbf{T}_\eta \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$ so angesetzt werden, dass

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_\eta \end{bmatrix} = n. \quad (3.66)$$

gilt. Mit dieser Zustandstransformation kann die Ein-/Ausgangsnormalform gemäß dem folgenden Satz hergeleitet werden.

Satz 3.4 (Lineare Ein-/Ausgangsnormalform) Der Ausgang $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^\top$ des linearen Systems (3.58) besitze den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ mit $r = \sum_{i=1}^m r_i \leq n$. Dann kann $\mathbf{T}_\eta \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$ stets so gewählt werden, dass die Transformation (3.65) regulär ist und das System (3.58) in die Ein-/Ausgangsnormalform

$$\begin{array}{ll} \dot{\tilde{x}}_{i,1} &= \tilde{x}_{i,2} \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i,r_i-1} &= \tilde{x}_{i,r_i} \\ \text{E/A-Dynamik: } \dot{\tilde{x}}_{i,r_i} &= \mathbf{g}_{\mathbf{y},i}^\top \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} + \mathbf{g}_{\eta,i}^\top \boldsymbol{\eta} + \mathbf{h}_{\mathbf{y},i}^\top \mathbf{u}, \quad i = 1 \dots, m \\ \text{Interne Dynamik: } \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{M}_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} + \mathbf{M}_{\eta} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{N} \mathbf{u} \end{array} \quad (3.67)$$

mit den Ausgangsgrößen $y_i = \tilde{x}_{i,1}$, $i = 1, \dots, m$ transformiert werden kann. Die Vektoren und Matrizen in (3.67) ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i^\top &= [\mathbf{g}_{\mathbf{y},i}^\top \quad \mathbf{g}_{\eta,i}^\top] = \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{T}^{-1}, & \mathbf{h}_{\mathbf{y},i}^\top &= \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{B}, \quad i = 1, \dots, m \\ \mathbf{M} &= [\mathbf{M}_{\mathbf{y}} \quad \mathbf{M}_{\eta}] = \mathbf{T}_\eta \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}, & \mathbf{N} &= \mathbf{T}_\eta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Die m Integratorketten für die Zustände $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ bilden die sogenannte *Ein-/Ausgangsdynamik*, während die Dynamik für den Teilzustand $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n-r}$ die sogenannte *interne Dynamik* des Systems (3.58) darstellt. In vielen Fällen kann $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_{n-r}]^\top$ direkt einzelnen Zuständen x_i zugeordnet werden, so dass sich die Transformationsvorschrift $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{T}_\eta \mathbf{x}$ entsprechend vereinfacht.

Beispiel 3.6 Der gekoppelte Feder-Masse-Schwinger in Beispiel 3.2 und Abbildung 3.4 wird durch das dynamische Modell (3.27) mit dem Ausgang $y = s_2$ (Position der Masse m_2) beschrieben. Für die mechanischen Parameter gilt wieder $m_1 = 1$, $m_2 = 10$, $c_1 = c_2 = 1$ und $d_1 = d_2 = 1$. Sukzessive Differentiation des Ausgangs $y = s_2$ liefert

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x} \\ \dot{y} &= \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{b} u &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \\ \ddot{y} &= \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{b} u &= [0.1 \quad 0.1 \quad -0.2 \quad -0.2] \mathbf{x} \\ y^{(3)} &= \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^3 \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{b} u &= [-0.12 \quad -0.02 \quad 0.14 \quad -0.06] \mathbf{x} - 0.1 u. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Da u in der dritten Ableitung auftritt, also $\mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = -0.1 \neq 0$ gilt, ist der relative Grad $r = 3$. Damit ergibt sich der erste Teil der Transformation (3.65) zu

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{T}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}.$$

Eine einfache Wahl von $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^1$ ist durch $\eta = s_1 = x_1$ gegeben, wodurch die gesamte Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ in (3.65) regulär ist, d.h.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\mathbf{y}} \\ \mathbf{T}_{\eta} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (3.70)$$

Die Ein-/Ausgangsnormalform (3.67) lautet dann

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\
 \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 \\
 \dot{\tilde{x}}_3 &= \underbrace{[0.1 \quad -0.1 \quad -0.2]}_{\mathbf{g}_y^\top} \tilde{\mathbf{x}}_y + \underbrace{(-0.1)}_{g_\eta} \eta + \underbrace{(-0.1)}_h u \\
 \dot{\eta} &= \underbrace{[2 \quad 2 \quad 10]}_{\mathbf{M}_y} \tilde{\mathbf{x}}_y + \underbrace{(-1)}_{M_\eta} \eta.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Die Bedeutung der internen Dynamik kann anhand von Abbildung 3.4 anschaulich erklärt werden: da der Ausgang $y = s_2$ die Position der rechten Masse m_2 ist, beschreibt $\dot{\eta} = \mathbf{M}_y \tilde{\mathbf{x}}_y + M_\eta \eta$ die Bewegung der linken Masse m_1 , die von $[y, \dot{y}, \ddot{y}]^\top = \tilde{\mathbf{x}}_y$ angeregt wird.

3.4.3 Entkopplung und Eigenwertvorgabe

Die jeweils letzten Differenzialgleichungen der Ein-/Ausgangsdynamik in (3.67) entsprechen der Kopplungsgleichung (3.62) für die höchsten Ausgangsableitungen $y_i^{(r_i)}$, d.h.

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{1,r_1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{m,r_m} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_y} \mathbf{B} \mathbf{u} \tag{3.72}$$

mit der Kopplungsmatrix $\mathbf{H}_y$ aus (3.59). Aufgrund der Annahme, dass der vektorielle relative Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ existiert und somit die Kopplungsmatrix $\mathbf{H}_y$ regulär ist (siehe (ii) in Definition 3.2), kann die Steuergröße $\mathbf{u}$ in Abhängigkeit der neuen Eingänge $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ angesetzt werden

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_y^{-1} (-\mathbf{G} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{v}), \tag{3.73}$$

was zu einer *Entkopplung* der Ein-/Ausgangsnormalform (3.67)

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}_{i,1} &= \tilde{x}_{i,2} \\
 &\vdots \\
 \dot{\tilde{x}}_{i,r_i-1} &= \tilde{x}_{i,r_i} \\
 \dot{\tilde{x}}_{i,r_i} &= v_i, \quad i = 1 \dots, m \\
 \dot{\eta} &= \bar{\mathbf{M}}_y \tilde{\mathbf{x}}_y + \bar{\mathbf{M}}_\eta \eta + \bar{\mathbf{N}} \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

mit

$$\bar{\mathbf{M}} = [\bar{\mathbf{M}}_y \quad \bar{\mathbf{M}}_\eta] = \mathbf{M} - \mathbf{N} \mathbf{H}_y^{-1} \mathbf{G}, \quad \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \mathbf{H}_y^{-1} \tag{3.75}$$

führt. Die Integratorketten für die einzelnen Ausgänge $y_i = \tilde{x}_{i,1}$ können mit Hilfe der neuen Eingänge $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_m]^\top$ gezielt angesteuert werden. Dabei wirkt sich $\mathbf{v}$ ebenfalls auf die interne Dynamik aus, wie in Abbildung 3.6 dargestellt ist.

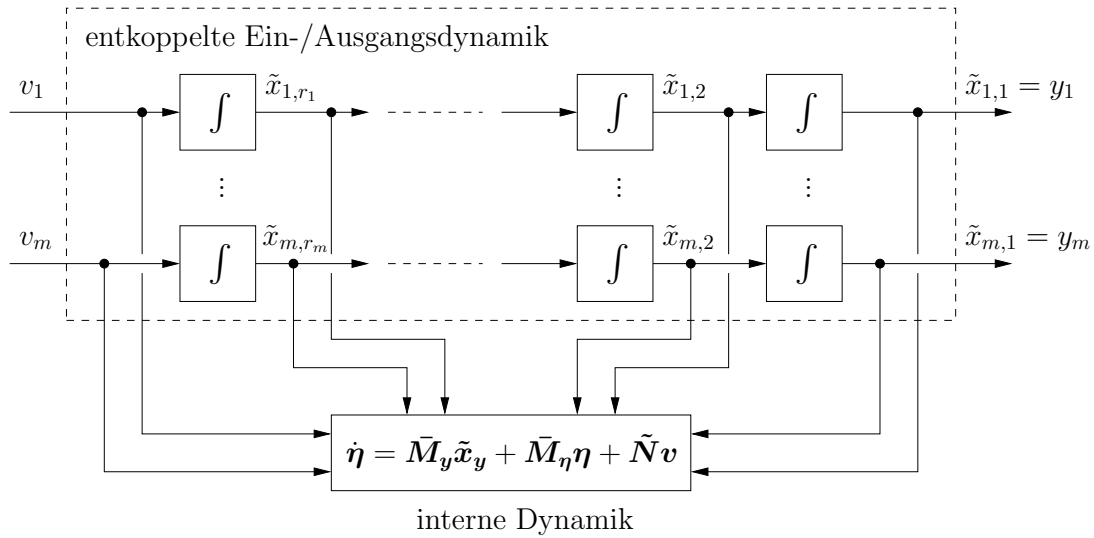


Abbildung 3.6: Entkoppelte Ein-/Ausgangsnormalform (3.74).

Wie im vorherigen Abschnitt kann der entkoppelten Ein-/Ausgangsdynamik nun eine gewünschte Dynamik vorgegeben werden, indem die neuen Eingänge $\mathbf{v}$ durch

$$v_i = -p_{i,0}\tilde{x}_{i,1} - \cdots - p_{i,r_i-1}\tilde{x}_{i,r_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.76)$$

angesetzt werden, wobei $p_{i,j}$ die Koeffizienten der gewünschten charakteristischen Polynome

$$p_i^*(\lambda) = p_{i,0} + p_{i,1}\lambda + \cdots + p_{i,r_i-1}\lambda^{r_i-1} + \lambda^{r_i} = \prod_{j=1}^{r_i} (\lambda - \lambda_{i,j}^*), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.77)$$

darstellen. Im Gegensatz zur Eigenwertvorgabe in der Regelungsnormalform spielt aber bei der Ein-/Ausgangsentkopplung die Stabilität der internen Dynamik in (3.74) eine entscheidende Rolle. Des Weiteren taucht $\boldsymbol{\eta}$ in der Gleichung (3.73) für die tatsächliche Stellgröße $\mathbf{u}$ auf, was zu großen Stellamplituden führen kann, wenn die interne Dynamik instabil ist.

Um diesen Sachverhalt zu untersuchen, setzt man die Ausgangsgrößen identisch Null

$$\begin{aligned} y_i^{(j)} = \tilde{x}_{i,j-1} &\equiv 0, \quad j = 0, 1, \dots, r_i - 1, \\ y_i^{(r_i)} = v_i &\equiv 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

und betrachtet die sogenannte *Nullodynamik*

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \bar{\mathbf{M}}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\eta} \quad (3.78)$$

die sich als Sonderform der internen Dynamik in (3.74) ergibt. Die Nullodynamik (3.78) kann anschaulich interpretiert werden: sie stellt die Restdynamik des Systems (3.58) dar, wenn die Ausgangsgrößen identisch Null gehalten werden. Mit Hilfe der Nullodynamik lässt sich nun folgender Satz formulieren:

Satz 3.5 (Zustandsreglerentwurf durch Ein-/Ausgangsentkopplung) *Das lineare System (3.58) habe den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ und die Nulldynamik (3.78) sei asymptotisch stabil. Dann ist das System (3.58) mit dem Regelgesetz (3.1) und der Reglermatrix*

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_y^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top (p_{1,0} \mathbf{I} + p_{1,1} \mathbf{A} + \dots + p_{1,r_1-1} \mathbf{A}^{r_1-1} + \mathbf{A}^{r_1}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top (p_{m,0} \mathbf{I} + p_{m,1} \mathbf{A} + \dots + p_{m,r_m-1} \mathbf{A}^{r_m-1} + \mathbf{A}^{r_m}) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

asymptotisch stabilisierbar, wobei $\mathbf{H}_y$ die Kopplungsmatrix (3.59) und $p_{i,j}$ die Koeffizienten der gewünschten charakteristischen Polynome (3.77) für die Ein-/Ausgangsdynamik in (3.67) darstellen.

Beweis: Die Reglermatrix $\mathbf{K}$ in (3.79) ergibt sich direkt aus (3.73) zusammen mit dem Regelgesetz (3.76) für die neuen Eingänge $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_m]^\top$ und den Transformationsgleichungen für $\tilde{x}_{i,j}$ gemäß (3.65). Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises kann in der Ein-/Ausgangsnormalform (3.67) bzw. (3.74) leicht gezeigt werden. Für die einzelnen Integratorketten der Ein-/Ausgangsdynamik gilt aufgrund von (3.76)

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{i,1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i,r_i} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -p_{i,0} & -p_{i,1} & \dots & -p_{i,r_i-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{y,i}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{i,r_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Fasst man $\tilde{\mathbf{A}}_{y,i}$ in der Blockdiagonalmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{A}}_{y,1}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{y,m})$ zusammen und betrachtet zusätzlich die interne Dynamik in der Form (3.74), so ergibt sich die Gesamtstruktur des transformierten und geregelten Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_y \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_y & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{M}}_y - \bar{\mathbf{N}}\mathbf{P} & \bar{\mathbf{M}}_\eta \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_R} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_y \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{1,0} & \dots & p_{1,r_1-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m,0} & \dots & p_{m,r_m-1} \end{bmatrix},$$

wobei $p_{i,j}$ die Koeffizienten der charakteristischen Polynome (3.77) sind. Aufgrund der Blockstruktur von $\tilde{\mathbf{A}}_R$ gilt für das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_R) = \det(\lambda \mathbf{I}_m - \tilde{\mathbf{A}}_y) \det(\lambda \mathbf{I}_{n-r} - \bar{\mathbf{M}}_\eta).$$

Die Eigenwerte im geschlossenen Kreis setzen sich also genau aus den Wurzeln der Wunschpolynome (3.77) und den Eigenwerten der Nulldynamik (3.78) zusammen! ■

Die Berechnung der Reglermatrix (3.79) hat Ähnlichkeit mit der Eigenwertvorgabe über die Regelungsnormalform in (3.56). Der Unterschied besteht darin, dass durch die Ausgangsgrößen $\mathbf{y}$ mit dem vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ keine *vollständige* Zustandstransformation gebildet werden kann, wenn $r_1 + \dots + r_m = r < n$ gilt. Somit existiert eine interne Dynamik bzw. Nulldynamik der Ordnung $n - r$, deren Stabilität gewährleistet sein muss.

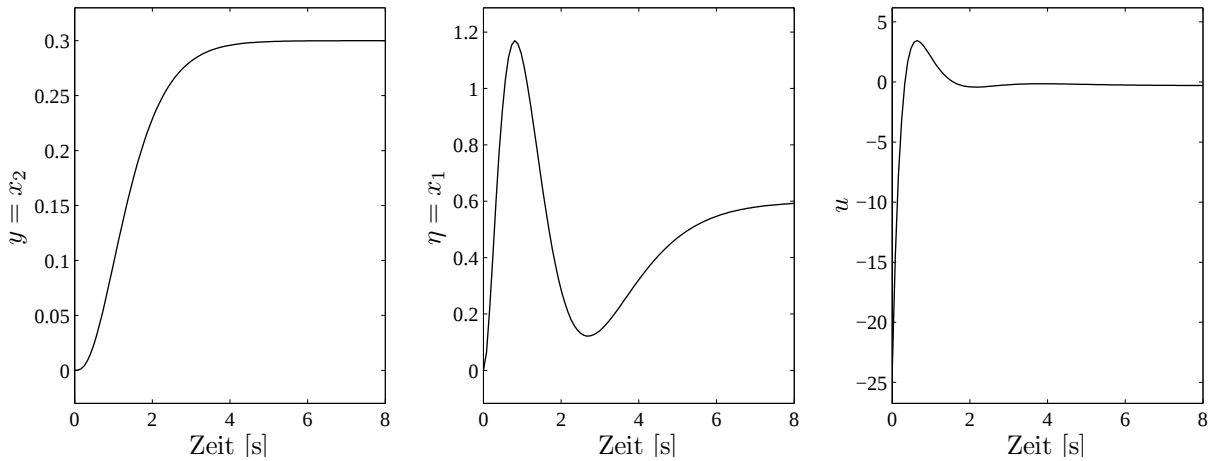


Abbildung 3.7: Simulationsergebnisse für den gekoppelten Feder-Masse-Schwinger mit dem Zustandsregler (3.83) basierend auf der Ein-/Ausgangsentkopplung (Beispiel 3.7).

Beispiel 3.7 (Simulationsbeispiel) Betrachtet wird erneut der gekoppelte Feder-Masse-Schwinger in Abbildung 3.4. Die Ein-/Ausgangsnormalform wurde bereits in (3.71) hergeleitet (Beispiel 3.6). Da die Stellgröße u in der internen Dynamik nicht auftaucht, kann die Nulldynamik (3.78) direkt angeschrieben werden

$$\dot{\eta} = -\eta. \quad (3.80)$$

Die Nulldynamik ist also asymptotisch stabil und ein Ein-/Ausgangsentkopplungsregler kann gemäß Satz 3.5 entworfen werden. Mit dem relativen Grad $r = 3$ (siehe Beispiel 3.6) lautet die Kopplungsmatrix (3.59) bzw. (3.64)

$$H_y = \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = -0.1, \quad (3.81)$$

die im vorliegenden Eingrößenfall eine skalare Größe ist. Mit den gewünschten Eigenwerten $\lambda_i^* = -2, i = 1, 2, 3$ lautet das charakteristische Polynom (3.77)

$$p^*(\lambda) = 8 + 12\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3,$$

so dass sich die Reglerverstärkung (3.79) wie folgt berechnen lässt

$$\mathbf{k}^\top = \frac{1}{\mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{b}} \mathbf{c}^\top (8\mathbf{I} + 12\mathbf{A} + 6\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3) = [-4.8 \quad -5.8 \quad -69.4 \quad -107.4]. \quad (3.82)$$

Das vollständige Regelgesetz nach (3.1) lautet

$$u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} + Sw \quad \text{mit} \quad S = (\mathbf{c}^\top (\mathbf{b}\mathbf{k}^\top - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b})^{-1} = -80, \quad (3.83)$$

wobei sich das Vorfilter S mit Hilfe von (3.6) berechnet. Aufgrund der Stabilität der Nulldynamik ist auch die Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ asymptotisch stabil, wovon man sich leicht überzeugen kann. Abbildung 3.7 stellt die Simulationsergebnisse für einen Führungsgrößensprung auf $w = 0.3$ mit $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ dar. Während der Ausgang y gemäß Eigenwertvorgabe ohne Überspringen stationär auf $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = w$ geregelt wird, klingt die Anregung der internen Dynamik (Zustand $\eta = s_1$) asymptotisch ab.

3.4.4 Interpretation der Nulldynamik

Die Nulldynamik (3.78) lässt sich im Eingrößenfall anhand der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r} s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (3.84)$$

anschaulich erklären, wobei vorausgesetzt wird, dass die Zähler- und Nennerpolynome teilerfremd sind. Wie in Abschnitt 2.4.2 gezeigt wurde, stellt die Regelungsnormform

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-r} \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.85)$$

eine Minimalrealisierung für die Übertragungsfunktion (3.84) dar. Um das System (3.85) auf Ein-/Ausgangsnormform zu transformieren, wird die Transformation (3.65) in der speziellen Form

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_y \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_\eta \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_r \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}_y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{r-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_y} \mathbf{x}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\eta \mathbf{x} \quad (3.86)$$

angesetzt. Damit lautet die Ein-/Ausgangsnormform (3.67)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{r-1} &= \tilde{x}_r \\ \dot{\tilde{x}}_r &= \mathbf{g}_y^\top \tilde{\mathbf{x}}_y + \mathbf{g}_\eta^\top \boldsymbol{\eta} + \mathbf{h}_y^\top \mathbf{u} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{M}_y \tilde{\mathbf{x}}_y + \mathbf{M}_\eta \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Eine genauere Betrachtung der internen Dynamik liefert

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \dot{x}_1 = x_2 = \eta_2 \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{n-r-1} &= \dot{x}_{n-r-1} = x_{n-r} = \eta_{n-r} \\ \dot{\eta}_{n-r} &= \dot{x}_{n-r} = x_{n-r+1} = -\frac{b_0}{b_{n-r}} \eta_1 - \dots - \frac{b_{n-r-1}}{b_{n-r}} \eta_{n-r} + \frac{1}{b_{n-r}} \tilde{x}_1. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Die letzte Zeile folgt aus der Ausgangsbeziehung in (3.85) und $b'_i = b_i/b_{n-r}$. Somit besitzt die interne Dynamik die Struktur

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{b_{n-r}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_y} \tilde{\mathbf{x}}_y + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -\frac{b_0}{b_{n-r}} & -\frac{b_1}{b_{n-r}} & \dots & -\frac{b_{n-r-1}}{b_{n-r}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_\eta} \boldsymbol{\eta}. \quad (3.89)$$

Durch Nullsetzen der Zustände $\tilde{\mathbf{x}}_y \equiv 0$ ergibt sich die Nulldynamik $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \bar{\mathbf{M}}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\eta}$. Die zugehörige charakteristische Gleichung resultiert aus der letzten Zeile von $\bar{\mathbf{M}}_{\boldsymbol{\eta}}$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{M}}_{\boldsymbol{\eta}}) = -\frac{1}{b_{n-r}}(b_0 + b_1 \lambda + \cdots + b_{n-r-1} \lambda^{n-r-1} + \lambda^{n-r}). \quad (3.90)$$

Die Eigenwerte der Nulldynamik entsprechen also den Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$! Somit ist die Nulldynamik stabil, wenn die Nullstelle der zugehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$ in der linken Halbebene liegen.

Wenn das System nichtminimalphasig ist, also eine oder mehrere Nullstellen von $G(s)$ in der rechten Halbebene liegen, so ist die interne Dynamik instabil. Ein Zustandsregler, der mit Hilfe der Ein-/Ausgangsentkopplung entworfen wurde, ist also nur asymptotisch stabil, wenn das zu regelnde System minimalphasig ist (siehe Satz 3.5).

3.5 Optimale Regelung (LQ-Regler)

Bei den bisher betrachteten Zustandsreglern wurde die Rückführverstärkung durch Eigenwertvorgabe berechnet, wobei im Mehrgrößenfall zusätzliche Freiheiten bei der Reglerauslegung bestehen. Die Eigenwert- bzw. Polvorgabe hat die Vorteile, dass die Reglerverstärkung durch die Formeln (3.25), (3.56) bzw. (3.79) explizit berechnet werden kann und dass dem geschlossenen Regelkreis eine gewünschte Dynamik eingeprägt wird.

Allerdings treten in vielen technischen Anwendungen Forderungen an die Regelgüte einzelner Zustands- bzw. Stellgrößen auf. Bei der Eigenwertvorgabe können diese Forderungen nur bedingt berücksichtigt werden, da die Zuweisung von Eigenwerten keinen direkten Einfluss auf das Regelverhalten der einzelnen Zustandsgrößen bzw. Stellgrößen hat.

Einen anderen Zugang bietet die (lineare) *optimale Regelung*, bei der die Regelgüte durch ein *Kostenfunktional*

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(T) \mathbf{S} \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^\top(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \quad (3.91)$$

auf einem Zeitintervall $t \in [0, T]$ charakterisiert wird, wobei sich die Zustandsverläufe in Abhängigkeit von $\mathbf{u}(t)$ aus dem Systemmodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.92)$$

berechnen. Die quadratischen Matrizen $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien symmetrisch und positiv semidefinit, während $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch und positiv definit angesetzt wird.²

Der Term $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}$ gewichtet den zeitlichen Verlauf der Zustände $\mathbf{x}(t)$ im Vergleich zum Stellgrößenterm $\frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}$, während $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x}$ den Endwert $\mathbf{x}(T)$ gewichtet. Man spricht bei dem Term $\frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}$ häufig auch von einem Energieanteil, da $\mathbf{u}$ quadratisch vorkommt. Wegen dem quadratischen Kostenfunktional und der linearen Systemdynamik wird dieses Problem in der Literatur auch als *LQR-Problem* (*Linear-Quadratic-Regulator*) bezeichnet.

² Eine symmetrische Matrix $\mathbf{M}$ ist positiv semidefinit, wenn sämtliche Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$ sind. $\mathbf{M}$ ist positiv definit, wenn $\lambda_i > 0$ gilt.

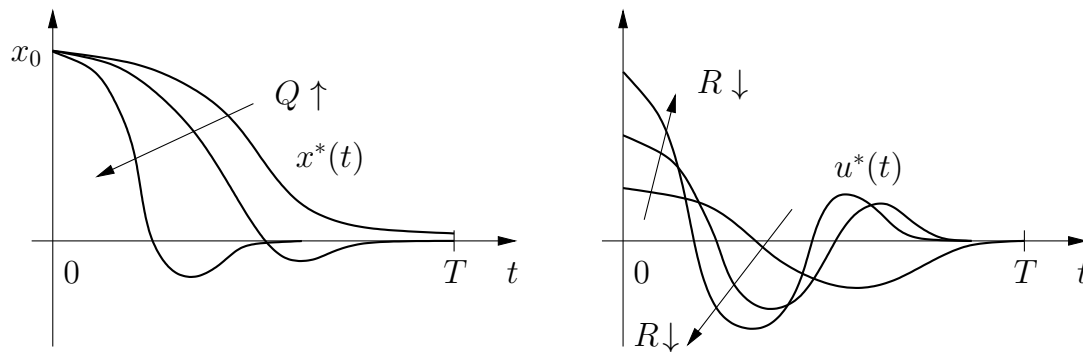


Abbildung 3.8: Beispielhaftes Zustands- und Stellgrößenverhalten für unterschiedliche Gewichtungsverhältnisse von Q und R ($x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $S = 0$).

Gesucht wird der optimale Stellgrößenverlauf $\mathbf{u}^*(t)$, der das Kostenfunktional (3.91) minimiert, d.h.

$$J(\mathbf{u}^*, \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0). \quad (3.93)$$

Das Optimierungsproblem (3.91), (3.92) kann dabei wie folgt interpretiert werden: Bringe das System (3.92) ausgehend von $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ so nah wie möglich zum Ursprung unter Verwendung “optimaler” Zustands- und Stellgrößenverläufe $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{u}^*(t)$. Die Gewichtungsmatrizen $\mathbf{S}$, $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ bestimmen dabei das Eingangs- und Zustandsverhalten des Systems. Abbildung 3.8 veranschaulicht den Zusammenhang exemplarisch für $x \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}$.

Wie sich in den folgenden Abschnitten herausstellen wird, führt die Lösung des LQR-Problems auf ein lineares Regelgesetz, den sogenannten *LQR-Regler* bzw. *Riccati-Regler*. Zur Lösung des LQR-Problems wird die *dynamische Programmierung* nach BELLMAN herangezogen.

3.5.1 Einführung in die dynamische Programmierung

Um die prinzipielle Idee der dynamischen Programmierung zu veranschaulichen, wird von der Minimierung eines allgemeinen nichtlinearen Kostenfunktionals

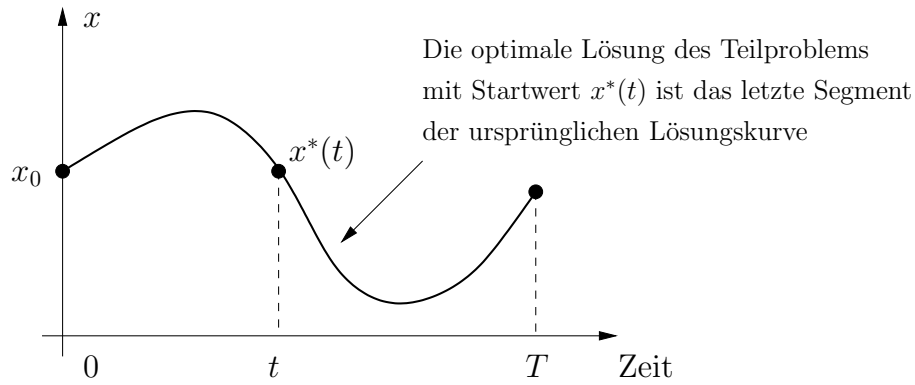
$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \varphi(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (3.94)$$

mit $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und $l: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ unter Berücksichtigung der nichtlinearen Systemdynamik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.95)$$

ausgegangen. Die Grundlage der dynamischen Programmierung bildet das *Optimalitätsprinzip*, das im folgenden Satz und in Abbildung 3.9 veranschaulicht wird.

Satz 3.6 (Optimalitätsprinzip) *Eine optimale Lösung hat die Eigenschaft, dass – beginnend bei jedem Punkt dieser Lösung – die verbleibende Lösung im Sinne der Optimierungsaufgabe optimal ist.*

Abbildung 3.9: Veranschaulichung des Optimalitätsprinzips ($x \in \mathbb{R}$).

Das Optimalitätsprinzip kann auf das Optimierungsproblem (3.94), (3.95) angewendet werden, indem die *Überführungskosten* (Englisch: *cost-to-go*)

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} \left\{ \int_t^T l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + \varphi(\mathbf{x}(T)) \right\} \quad (3.96)$$

eingeführt werden. Wenn die optimale Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^*(t)$ bekannt ist, dann stellt $V(\mathbf{x}^*(t), t)$ die *optimalen Überführungskosten* dar und die zugehörige optimale Steuerung ist das Reststück von $\mathbf{u}^*(t)$, siehe Abbildung 3.9.

Für jeden Zeitpunkt t' mit $t < t' < T$ lässt sich das Minimierungsproblem (3.96) für $V(\mathbf{x}(t), t)$ in der Form

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} \left\{ \int_t^{t'} l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + \int_{t'}^T l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + \varphi(\mathbf{x}(T)) \right\} \quad (3.97)$$

schreiben. Da nach dem Optimalitätsprinzip das Endstück einer optimalen Kurve selber wieder optimal ist, gilt für (3.97)

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} \left\{ \int_t^{t'} l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + V(\mathbf{x}(t'), t') \right\}. \quad (3.98)$$

Im Hinblick auf Satz 3.6 und Abbildung 3.9 sei daran erinnert, dass für die optimale Lösung offensichtlich $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{x}(t') = \mathbf{x}^*(t')$ gelten muss.

Die Beziehung (3.98) kann weiter vereinfacht werden, wozu der Einfachheit halber $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(t')$ verwendet wird. Unter der Annahme, dass $V(\mathbf{x}, t)$ stetig differenzierbar ist, existiert die Taylor-Entwicklung

$$V(\mathbf{x}', t') = V(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_x^T(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(t) \Delta t + V_t(\mathbf{x}, t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.99)$$

Die Funktionen $\mathbf{V}_x$ und $\mathbf{V}_t$ stellen die partiellen Ableitungen von V bezüglich $\mathbf{x}$ und t dar. Des Weiteren gilt in erster Näherung

$$\int_t^{t'} l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau = l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.100)$$

Einsetzen von (3.95), (3.99) und (3.100) in (3.98) und Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in Δt führt auf die Form

$$V(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \left\{ l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + V(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_x^\top(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + V_t(\mathbf{x}, t) \Delta t \right\}, \quad (3.101)$$

wobei die Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ im Klammerausdruck nur noch zum Zeitpunkt t auftritt und nicht mehr als Zeitfunktion $\mathbf{u}(\tau)$, $\tau \in [t, t']$, wie es in (3.96) der Fall war.

Dieser Ausdruck lässt sich weiter vereinfachen. Da $V(\mathbf{x}, t)$ per Definition (3.96) optimal und somit unabhängig von der Stellgröße $\mathbf{u}$ ist, kann der Term aus dem Minimierungsausdruck genommen und gegen $V(\mathbf{x}, t)$ auf der linken Seite gekürzt werden:

$$0 = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \left\{ l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + \mathbf{V}_x^\top(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + V_t(\mathbf{x}, t) \Delta t \right\}.$$

Des Weiteren kann Δt ausgeklammert und somit im Minimierungsproblem vernachlässigt werden. Wird außerdem $V_t(\mathbf{x}, t)$ aus dem Minimierungsklammer herausgenommen, erhält man die endgültige Form

$$0 = V_t(\mathbf{x}, t) + \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \left\{ l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{V}_x^\top(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\}. \quad (3.102)$$

Diese Gleichung stellt eine nichtlineare partielle Differenzialgleichung für $V(\mathbf{x}, t)$ dar und ist unter dem Namen *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* (HJB-Gleichung) bekannt. Um $V(\mathbf{x}, t)$ aus (3.102) bestimmen zu können, ist noch die Endbedingung

$$V(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}) \quad (3.103)$$

notwendig, die aus (3.96) folgt. Es gilt nun folgender Satz:

Satz 3.7 (Hamilton-Jacobi-Bellman-Theorem) *Sei $V(\mathbf{x}, t)$ eine stetig differenzierbare Lösung der HJB-Gleichung (3.102) mit der Endbedingung (3.103). Des Weiteren sei $\mathbf{u}^*(t)$, $t \in [0, T]$ eine stückweise stetige Funktion, die das Problem*

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \left\{ l(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, t) + \mathbf{V}_x^\top(\mathbf{x}^*(t), t) \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, t) \right\} \quad (3.104)$$

für alle $\mathbf{x}^(t)$ und $t \in [0, T]$ minimiert, wobei $\mathbf{x}^*(t)$ die zugehörige (angenommen eindeutige) Lösung von (3.95) sei. Dann stellt $V(\mathbf{x}^*(t), t)$, $t \in [0, T]$ mit $V(\mathbf{x}^*(T), T) = \varphi(\mathbf{x}^*(T))$ die optimale Überführungskostenfunktion (optimal cost-to-go) des Optimierungsproblems (3.94), (3.95) für alle Zeiten $t \in [0, T]$ dar und die Steuertrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ ist optimal.*

Leider ist es nur in wenigen Fällen möglich, eine analytische Lösung der HJB-Gleichung zu berechnen. Gelingt dies aber, so kann man $V(\mathbf{x}, t)$ in das Minimierungsproblem (3.104) einsetzen und somit ein optimales Regelgesetz $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ herleiten, das (3.104) minimiert. Alternativ kann (3.102) näherungsweise (suboptimal) numerisch gelöst werden, was an dieser Stelle aber nicht weiter vertieft wird.

3.5.2 Riccati-Differenzialgleichung

Obwohl die Anwendung der HJB-Gleichung für allgemeine nichtlineare Probleme schwierig ist, stellt sie doch eine elegante Möglichkeit zur Lösung des LQR-Problems dar. Mit dem quadratischen Kostenfunktional (3.91) und dem linearen System (3.92) lautet die HJB-Gleichung (3.102)

$$0 = V_t(\mathbf{x}, t) + \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} + V_x^\top(\mathbf{x}, t) (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \right\}. \quad (3.105)$$

Da der Minimierungsterm stetig differenzierbar in $\mathbf{u}$ ist, kann die optimale Stellgröße $\mathbf{u}^*$ über die verschwindende erste Ableitung

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{V}_x(\mathbf{x}, t), \quad (3.106)$$

bestimmt werden. Einsetzen in (3.105) und Umformen liefert

$$0 = V_t + \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} - V_x^\top \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top V_x + \underbrace{V_x^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top V_x}_{2V_x^\top \mathbf{A} \mathbf{x}} \right), \quad (3.107)$$

wobei an dieser Stelle die Argumente der Einfachheit halber vernachlässigt wurden. In der obigen Gleichung sind $V(\mathbf{x}, t)$ und die partiellen Ableitungen $V_t(\mathbf{x}, t)$ und $V_x(\mathbf{x}, t)$ noch unbekannt.

Ein geeigneter Ansatz für die Überführungskosten ist

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}(t) \mathbf{x} \quad (3.108)$$

mit der noch unbekannten zeitvarianten und symmetrischen Gewichtungsmatrix $\mathbf{P}(t)$. Damit gilt

$$V_t(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}, \quad V_x(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}. \quad (3.109)$$

Setzt man nun (3.109) in die HJB-Gleichung (3.107) ein, so ergibt sich die endgültige Form (unter Vernachlässigung der Argumente)

$$0 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \left(\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \right) \mathbf{x}. \quad (3.110)$$

Die Endbedingung (3.103) lautet mit dem Ansatz (3.108)

$$0 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top (\mathbf{P}(T) - \mathbf{S}) \mathbf{x}. \quad (3.111)$$

Da die HJB-Gleichung (3.110) für alle beliebigen Zustände $\mathbf{x}$ gelten muss, müssen die Klammerterme in (3.110) und (3.111) verschwinden. Somit erhält man für $\mathbf{P}(t)$ die sogenannte *Matrix-Riccati-Differenzialgleichung*

$$\boxed{\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} - \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P}(T) = \mathbf{S}}. \quad (3.112)$$

Der Ausdruck (3.106) für die optimale Stellgröße $\mathbf{u}^*(t)$ kann somit als das optimale Regelgesetz

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}(t), \quad (3.113)$$

dargestellt werden. Einige Anmerkungen sind im Folgenden zusammengetragen:

- Bei der Lösung der Matrix-Riccati-Differentialgleichung (3.112) geht man aufgrund der nicht vorhandenen Anfangsbedingung zweckmäßigerweise von $t = T$ aus und *integriert rückwärts* in der Zeit bis $t = 0$.
- Aufgrund dieser Rückwärtsintegration muss die zeitvariante Reglermatrix $\mathbf{K}(t)$ im Voraus, also vor der eigentlichen Regelung des Systems, berechnet werden!
- $\mathbf{P}(t)$ ist symmetrisch und positiv semidefinit (alle Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$). Somit ist die Riccati-Dgl. der Ordnung n^2 aufgrund der Symmetrie nur $n(n+1)/2$ (untereinander verkoppelten) Differentialgleichungen äquivalent.
- Im Falle von zeitvarianten Systemmatrizen $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ und/oder Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ ändert sich nichts an der Herleitung.
- Der optimale (minimale) Wert des Kostenfunktional (3.91) ergibt sich zu

$$J^*(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^\top \mathbf{P}(0) \mathbf{x}_0. \quad (3.114)$$

Auf die regelungstechnischen Einsatzmöglichkeiten der Riccati-Differenzialgleichung wird in der Vorlesung “Methoden der Optimierung und optimalen Steuerung” noch näher eingegangen.

3.5.3 Algebraische Riccati-Gleichung

Ein Sonderfall liegt vor, wenn das Kostenfunktional (3.91) auf dem unendlichen Zeitintervall $[0, \infty)$ betrachtet wird. In diesem Fall ergibt die Endgewichtung $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(T) \mathbf{S} \mathbf{x}(T)$ keinen Sinn, da ohnehin $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gelten muss, damit das Funktional (3.91) einen endlichen Wert besitzt. Es wird also im Folgenden $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ gesetzt. Des Weiteren wird angenommen, dass

- $\mathbf{Q}$ positiv semidefinit und $\mathbf{R}$ positiv definit ist,
- das System (3.92) steuerbar ist,
- das Paar $[\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}]$ beobachtbar ist, wobei die Matrix $\bar{\mathbf{C}}$ aus der Zerlegung $\bar{\mathbf{C}}^\top \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}$ (z.B. mittels der Cholesky-Zerlegung) resultiert.

Unter diesen Annahmen kann gezeigt werden, dass die Lösung der Riccati-Dgl. (3.112) in Rückwärtszeit gegen eine stationäre positiv definite Matrix $\bar{\mathbf{P}}$ konvergiert. Dabei ist $\bar{\mathbf{P}}$ unabhängig von dem Randwert $\mathbf{P}(T)$ bei dem die Rückwärtsintegration gestartet wird, solange $\mathbf{P}(T)$ positiv semidefinit ist. Somit kann zur näherungsweisen Bestimmung von $\bar{\mathbf{P}}$ die Riccati-Dgl. (3.112) ausgehend von einem beliebigen positiv semidefiniten Endpunkt $\mathbf{P}(T)$, z.B. $\mathbf{P}(T) = \mathbf{0}$, rückwärts integriert werden, bis die zeitliche Änderung $\dot{\mathbf{P}}(t)$ unterhalb eines Toleranzkriteriums liegt.

Eine elegantere Möglichkeit $\bar{\mathbf{P}}$ zu bestimmen, ist die Lösung der sogenannten *algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung*

$$\boxed{\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}}, \quad (3.115)$$

die sich direkt aus (3.112) mit $\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{0}$ ergibt. Da die Gleichung nichtlinear ist, können mehrere Lösungen existieren. Es kann aber unter den obigen Annahmen gezeigt werden, dass nur *eine positiv semidefinite* Lösung $\bar{\mathbf{P}}$ existiert. Zur Berechnung von $\bar{\mathbf{P}}$ aus der algebraischen Riccati-Gleichung (3.115) können verschiedene Verfahren verwendet werden (z.B. das Verfahren nach *Kalman* und *Englar*), auf die an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll.

Mit Hilfe des Optimalitätsprinzips in Satz 3.6 kann gezeigt werden, dass das nun zeitinvariante Rückführgesetz (3.113)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{u} = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{x} & \text{mit} \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}} \quad (m > 1) \\ u = -\mathbf{k}^T\mathbf{x} & \mathbf{k}^T = \frac{1}{R}\mathbf{b}^T\bar{\mathbf{P}} \quad (m = 1) \end{array}} \quad (3.116)$$

tatsächlich die optimale Lösung des Problems (3.91), (3.92) auf dem unendlichen Intervall $[0, \infty)$ liefert. Die Ergebnisse sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 3.8 (LQ-Regler für lineare, zeitinvariante Systeme) Gegeben sei das steuerbare lineare zeitinvariante System (3.92) mit dem zu minimierenden Kostenfunktional

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt, \quad (3.117)$$

wobei $\mathbf{Q}$ positiv semidefinit und $\mathbf{R}$ positiv definit sind und das Paar $[\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}]$ mit $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{C}}$ beobachtbar ist. Dann ergibt sich das Minimum von (3.117) durch das optimale Rückführgesetz (3.116) zu $J^*(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}_0$, wobei $\bar{\mathbf{P}}$ die eindeutige positiv semidefinite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung (3.115) ist. Des Weiteren besitzen sämtliche Eigenwerte der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}})$ negative Realteile, so dass der geschlossene Kreis

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}) \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

asymptotisch stabil ist.

Der optimale Zustandsregler (3.116) wird häufig auch als *Riccati-Regler* oder *LQ-Regler* (“linear-quadratischer Regler”) bezeichnet und wird in der Praxis häufig eingesetzt. Unter MATLAB kann die optimale Reglermatrix $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}$ mit Hilfe der Befehle `lqr` bzw. `lqrd` oder `dlqr` berechnet werden.

Beispiel 3.8 (Simulationsbeispiel) Als Beispiel betrachte man das inverse Pendel-Wagen-System in Abbildung 1.15. Mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $M = 1 \text{ kg}$ und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ lautet das linearisierte System (1.74) mit den Zuständen $\Delta \mathbf{x} = [\Delta \phi, \Delta \dot{\phi}, \Delta x_w, \Delta \dot{x}_w]^T$ und dem Ausgang $\Delta y = \Delta x_w$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 23.544 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5.886 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1.2 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Delta u \\ \Delta y &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.118)$$

Das inverse Pendel ist instabil, was man an den Eigenwerten (MATLAB Befehl `eig`)

$$\lambda_{1/2} = 0, \quad \lambda_{3/4} = \pm 4.85$$

ablesen kann. Für den LQR-Entwurf werden die Gewichtungsmatrizen zunächst mit

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(10^0, 10^0, 10^0, 10^0), \quad R = 10^{-1}$$

angesetzt. Die numerische Lösung der Riccati-Gleichung (3.115) mit Hilfe von MATLAB (Befehl `lqr`) führt zu der Reglerverstärkung (3.116)

$$\mathbf{k}^T = [-64.21 \quad -15.01 \quad -3.16 \quad -6.22]. \quad (3.119)$$

Ein Blick auf die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$

$$\lambda_1 = -7.37, \quad \lambda_2 = -3.34, \quad \lambda_{3/4} = -1.16 \pm j 0.41$$

zeigt, dass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist. Zusätzlich wird ein Vorfilter gemäß (3.6) so entworfen

$$S = (\mathbf{c}^T(\mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b})^{-1} = -3.16,$$

dass sich stationär eine gewünschte Wagenposition w einstellt. Im Hinblick auf die Regelkreisstruktur in Abbildung 3.2 ergibt sich die gesamte Stellgröße zu

$$\Delta u = -\mathbf{k}^T \Delta \mathbf{x} + Sw.$$

Abbildung 3.10 zeigt die Ergebnisse für die obige Wahl von $\mathbf{Q}$ und R für Anfangsbedingungen $\Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und eine gewünschte Wagenposition von $w = 0.2 \text{ m}$.

Über die relative Wahl der Gewichtungen in $\mathbf{Q}$ und R kann man beim LQR-Entwurf gezielt auf das Regelverhalten einzelner Zustände bzw. der Stellgröße eingreifen. Dies ist in den verbleibenden Trajektorien in Abbildung 3.10 ersichtlich, wo jeweils der Winkel $\Delta \phi$ bzw. die Wagenposition Δx_w um den Faktor 1000 stärker gewichtet sind. Die resultierenden Trajektorien weisen in diesem Fall ein deutlich verringertes Schwingverhalten in $\Delta \phi$ bzw. die Wagenposition Δx_w auf, was durch eine größere Stellamplitude erreicht wird.

Anmerkung: Wie in Beispiel 2.5 bereits untersucht wurde, besitzt die Übertragungsfunktion bzgl. der Wagenposition als Ausgangsgröße Δy , siehe (2.84),

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\Delta Y_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{4ls^2 - 6g}{l(m + 4M)s^4 - 6g(m + M)s^2} = \frac{0.8s^2 - 11.77}{s^4 - 23.54s^2}$$

die Nullstellen $s_{0,1} = -3.836$ und $s_{0,2} = 3.836$. Da $s_{0,2}$ in der rechten Halbebene liegt, ist das inverse Pendel nichtminimalphasig. Anhand der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises (MATLAB-Befehle `ss` und `tf`)

$$G_R(s) = S\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_R)^{-1}\mathbf{b} = \frac{-2.53s^2 + 37.23}{s^4 + 13.03s^3 + 50.98s^2 + 73.28s + 37.23}$$

erkennt man, dass die Nullstellen $s_{0,1}$ und $s_{0,2}$ invariant gegenüber der Zustandsrückführung sind. Die Nullstelle $s_{0,2} > 0$ ist verantwortlich für das Gegenschwingverhalten des inversen Pendels (siehe auch Abschnitt 2.4.4).

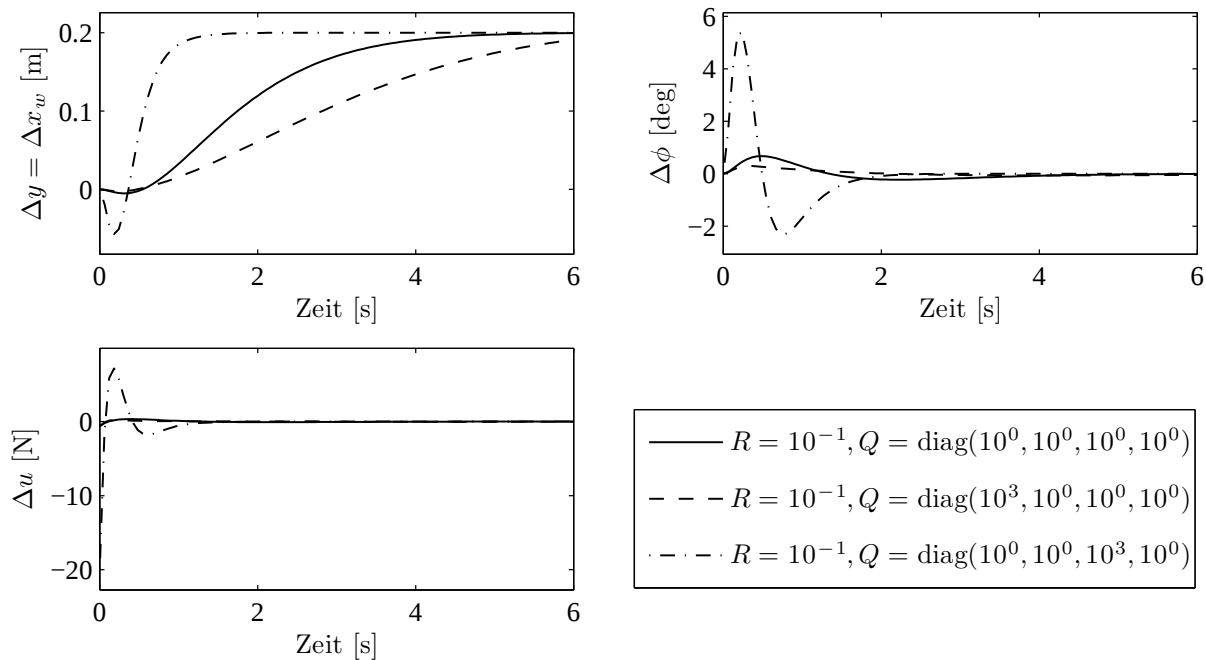


Abbildung 3.10: Simulationsergebnisse für das LQ-geregelte inverse Pendel mit unterschiedlichen Gewichtungen von $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ (Beispiel 3.8).

Aufgabe 3.8 Informieren Sie sich unter MATLAB über die Funktion *lqr* durch den Aufruf *“help lqr”* bzw. *“doc lqr”*. Berechnen Sie mit Hilfe von *lqr* geeignete Regler für die Systeme in Beispiel 3.3 und Aufgabe 3.3. Vergleichen Sie die Reglerverstärkungen und die Eigenwerte im geschlossenen Kreis für verschiedene Werte in den Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$.

3.5.4 Vergleich zwischen Eigenwertvorgabe und LQR-Entwurf

Abschließend sind einige wichtige Unterschiede zwischen dem Reglerentwurf mittels Eigenwertvorgabe bzw. dem LQR-Entwurf zusammengetragen.

Eigenwertvorgabe:

- Die Dynamik des geschlossenen Kreises bzw. der Ein-/Ausgangsdynamik wird über die Lage der Eigenwerte gezielt beeinflusst.
- Die Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen ist problematisch, da (außer über die Lage der Eigenwerte) kein direktes Maß für das Verhalten der Stellgrößen besteht.
- Im Eingrößenfall ($m = 1$) ist die Eigenwertvorgabe eindeutig.
- Im Mehrgrößenfall ($m > 1$) bestehen zusätzliche Freiheitsgrade, z.B. die Verteilung der Eigenwerte auf die Steuerbarkeitsindizes $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ bzw. die Wahl alternativer Indizes $\{\rho'_1, \dots, \rho'_m\}$, so dass die reduzierte Steuerbarkeitsmatrix $\hat{\mathbf{Q}}_S$ regulär ist.
- Der Reglerentwurf mittels der Eigenwertvorgabe ist analytisch in der Hinsicht, dass sich die Bestimmungsgleichungen für die Reglerverstärkung (3.25), (3.56) bzw. (3.79) explizit angeben lassen.

LQR-Entwurf:

- Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises können nicht direkt vorgegeben werden.
- Die Einträge in den Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ (zumindest in der Diagonalen) besitzen eine anschauliche Bedeutung für das Verhalten des geschlossenen Kreises.
- Über die Einträge in $\mathbf{R}$ kann gezielt Einfluss auf einzelne Stellgrößen genommen werden, z.B. um Stellamplituden zu reduzieren und auf diesem Wege Stellgrößenbeschränkungen einzuhalten.
- Der LQR-Entwurf ist sowohl im Eingrößenfall als auch im Mehrgrößenfall eindeutig definiert, d.h. es bestehen keine zusätzlichen Freiheitsgrade wie beim Reglerentwurf mittels Eigenwertvorgabe.
- In der Praxis führt der LQR-Entwurf häufig zu einem robusteren Regler als der Reglerentwurf mittels Eigenwertvorgabe. Dies gilt insbesondere für den Mehrgrößenfall.
- Der LQR-Entwurf ist ein numerisches Verfahren, da die algebraische Riccati-Gleichung (3.115), bzw. die Riccati-Differenzialgleichung (3.112) meist numerisch gelöst werden muss.

3.6 Behandlung von Störgrößen

In Abschnitt 3.1 wurde ein Vorfilter $\mathbf{S}$ so entworfen, dass die bleibende Regelabweichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{w} - \mathbf{y}(t))$$

für eine Führungsgröße $\mathbf{w}$ verschwindet. Dies ist natürlich nicht mehr der Fall, wenn die Streckenparameter vom nominellen Wert abweichen bzw. Störungen auf die Strecke wirken. Man betrachte dazu das erweiterte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{d}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{3.120}$$

mit der Störeingangsmatrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ und dem Störgrößenvektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^l$. Setzt man für $\mathbf{u}$ den Zustandsregler (3.1) an und betrachtet den stationären Zustand $\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{0}$ mit einer konstanten Störung $\mathbf{d}$, so erhält man

$$\mathbf{x}_R = (\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{BS}\mathbf{w} + \mathbf{E}\mathbf{d}).$$

Mit der Gleichung (3.6) für das Vorfilter $\mathbf{S}$ gilt für den stationären Ausgang $\mathbf{y}_R = \mathbf{C}\mathbf{x}_R$ offensichtlich

$$\mathbf{y}_R = \mathbf{C}(\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{BS}\mathbf{w} + \mathbf{E}\mathbf{d}) = \mathbf{w} + \mathbf{C}(\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\mathbf{d} \neq \mathbf{w}.$$

Diese stationäre Regelabweichung lässt sich durch eine Störgrößenaufschaltung, bzw. einen zusätzlichen I-Anteil im Regelgesetz (3.1) berücksichtigen.

3.6.1 Störgrößenaufschaltung

Es wird im Folgenden angenommen, dass die Störung $\mathbf{d}$ in (3.120) messbar und bekannt ist. Bei der Störgrößenaufschaltung wird die Störung $\mathbf{d}$ kompensiert, indem zum Regelgesetz (3.1) ein zusätzlicher Term $\mathbf{u}_d$ addiert wird

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w} + \mathbf{u}_d. \quad (3.121)$$

Dabei wird $\mathbf{u}_d$ angesetzt, um den Störungsterm $\mathbf{E}\mathbf{d}$ im System (3.120) zu kompensieren, d.h.

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_d + \mathbf{E}\mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (3.122)$$

Falls $n = m$ gilt und $\mathbf{B}$ regulär ist, kann diese Beziehung eindeutig nach

$$\mathbf{u}_d = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{E}\mathbf{d})$$

gelöst werden, wodurch die Störung im System (3.120) exakt kompensiert wird. Für gewöhnlich gilt jedoch $m < n$, so dass die Inversion der Steuermatrix $\mathbf{B}$ nicht möglich ist. Anstelle eine exakte Lösung zu versuchen, kann die Gleichung (3.122) im Sinne eines *Least-Squares-Ansatzes* minimiert werden, d.h.

$$\min_{\mathbf{u}_d} \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\delta} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B}\mathbf{u}_d + \mathbf{E}\mathbf{d}.$$

Der zu minimierende Term $\boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\delta}$ stellt eine quadratische Norm dar und lässt sich durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\delta} &= (\mathbf{B}\mathbf{u}_d + \mathbf{E}\mathbf{d})^\top (\mathbf{B}\mathbf{u}_d + \mathbf{E}\mathbf{d}) \\ &= \mathbf{u}_d^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{B}\mathbf{u}_d + \mathbf{u}_d^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{E}\mathbf{d} + \mathbf{d}^\top \mathbf{E}^\top \mathbf{B}\mathbf{u}_d + \mathbf{d}^\top \mathbf{E}^\top \mathbf{E}\mathbf{d} \\ &= \mathbf{u}_d^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{B}\mathbf{u}_d + 2\mathbf{u}_d^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{E}\mathbf{d} + \mathbf{d}^\top \mathbf{E}^\top \mathbf{E}\mathbf{d} \end{aligned}$$

darstellen. Das Minimum bzgl. $\mathbf{u}_d$ ergibt sich mit Hilfe der ersten Ableitung

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\delta})}{\partial \mathbf{u}_d} = 2\mathbf{B}^\top \mathbf{B}\mathbf{u}_d + 2\mathbf{B}^\top \mathbf{E}\mathbf{d} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}.$$

Unter der berechtigten Annahme, dass die Spalten der Matrix $\mathbf{B}$ linear unabhängig sind, ist $\mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ invertierbar und die Störgrößenaufschaltung berechnet sich zu

$$\mathbf{u}_d = -(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{E}\mathbf{d}, \quad (3.123)$$

womit sich das gesamte Rückführgesetz (3.121) wie folgt ergibt

$$\boxed{\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w} - (\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{E}\mathbf{d}}. \quad (3.124)$$

3.6.2 PI-Zustandsregler

Die Störgrößenaufschaltung setzt das Wissen über die Störgröße $\mathbf{d}$ und die Störeingangsmatrix $\mathbf{E}$ voraus, was in praktischen Anwendungen oft nicht der Fall ist. Eine flexiblere Möglichkeit ist, einen zusätzlichen I-Anteil im Regelgesetz (3.1) einzuführen, um zumindest konstante Störungen und Parameterabweichungen stationär unterdrücken zu können.

Dazu wird ein so genannter *PI-Zustandsregler* der Form

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{w} - \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_p(\mathbf{w} - \mathbf{C}\mathbf{x}) + \mathbf{K}_I\mathbf{x}_I \end{cases} \quad (3.125)$$

angesetzt. Der PI-Zustandsreglerentwurf basiert auf dem um die Integratorzustände $\mathbf{x}_I \in \mathbb{R}^p$ erweiterten System (3.120)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_I} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}_I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{I,0} \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

für dessen Steuerbarkeit der folgende Satz gilt:

Satz 3.9 *Wenn die Rangbedingung*

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + p$$

erfüllt ist, dann folgt aus der Steuerbarkeit von $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ die Steuerbarkeit des erweiterten Systems $(\mathbf{A}_I, \mathbf{B}_I)$.

Der Entwurf der Reglerverstärkungen $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_p$ und $\mathbf{K}_I$ erfolgt nun in zwei Schritten:

Schritt 1: Im ersten Schritt wird für das erweiterte System (3.126) ein Zustandsregler

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

entworfen. Der Vergleich von (3.125) mit (3.127) zeigt, dass gelten muss

$$\mathbf{K} + \mathbf{K}_p\mathbf{C} = \mathbf{K}_1, \quad -\mathbf{K}_I = \mathbf{K}_2. \quad (3.128)$$

Schritt 2: Im zweiten Schritt müssen noch gemäß (3.128) die Parameter $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}_p$ festgelegt werden. Da dieses Problem unterbestimmt ist, legt man im Allgemeinen $\mathbf{K}_p$ fest und berechnet sich anschließend $\mathbf{K}$ aus (3.128). Geht man davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangszustände $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}_{I,0} = \mathbf{0}$ sind und die Führungsgröße $\mathbf{w}$ für $t \geq 0$ konstant ist, so folgt aus (3.125)

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{K}_p\mathbf{w}.$$

Wenn die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ asymptotisch stabil ist, also alle Eigenwerte in der linken Halbebene liegen, dann errechnet sich die Ausgangsgröße im eingeschwungenen Zustand zu

$$\mathbf{y}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_\infty \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_\infty = -(\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{y}_\infty.$$

Es ist es nun zweckmäßig, den Proportionalanteil $\mathbf{K}_p$ so festzulegen, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Stellgröße $\mathbf{u}(0)$ den gleichen Wert, der auch für $t \rightarrow \infty$ zur Einhaltung der Bedingung $\mathbf{y}_\infty = \mathbf{w}$ benötigt wird, annimmt, d.h.

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{K}_p\mathbf{w} \stackrel{!}{=} -(\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{w}.$$

Somit gilt zusammenfassend für die einzelnen Verstärkungsmatrizen im Regelgesetz (3.125) des PI-Zustandsreglers

$$\boxed{K_p = -(CA^{-1}B)^{-1}, \quad K_I = -K_2, \quad K = K_1 - K_p C}, \quad (3.129)$$

wobei sich K_1 und K_2 aus dem Reglerentwurf für das erweiterte System (3.126) (unter Vernachlässigung des Störungsterms Ed) ergeben. Abbildung 3.11 zeigt das Blockschaltbild des PI-Zustandsreglers.

Anmerkungen:

- Der P-Anteil im Regelgesetz (3.125) ist nicht zwingend notwendig. Allerdings bewirkt er den Effekt einer *statischen Vorsteuerung*, da $u(t)$ bei einem Sprung der Führungsgröße w möglichst schnell auf den stationären Wert u_∞ gebracht wird.
- Zur Berechnung von K_p für den P-Anteil in (3.125) wurde eine asymptotisch stabile Dynamikmatrix A vorausgesetzt. In diesem Fall ist A regulär und kann folglich invertiert werden. Wenn A nicht asymptotisch stabil ist, so kann $K_p = 0$ gesetzt werden, was (3.125) sowie (3.129) entsprechend vereinfacht.

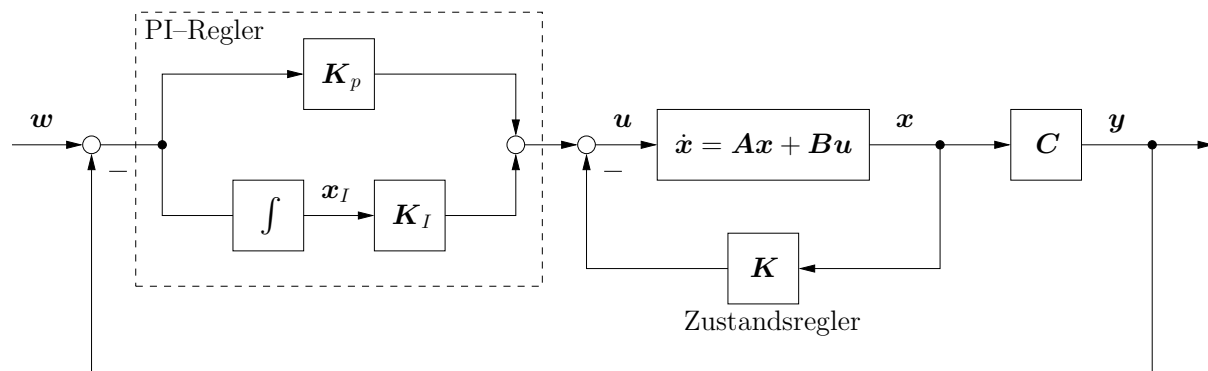


Abbildung 3.11: Blockschaltbild des PI-Zustandsreglers.

Beispiel 3.9 (Simulationsbeispiel) Für den Zweimassenschwinger in Abbildung 3.4 mit dem zugehörigen mathematischen Modell (3.27) soll ein PI-Zustandsregler so entworfen werden, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei

$$\lambda_{1/2}^* = -0.5 \pm j0.5, \quad \lambda_3^* = -1, \quad \lambda_4^* = -1.5, \quad \lambda_5^* = -2 \quad (3.130)$$

liegen. Dem Entwurfsverfahren folgend ergibt sich mit Hilfe der MATLAB-Funktion `acker` das Rückführgesetz (3.125)

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= w - c^T x \\ u &= - \underbrace{\begin{bmatrix} -3.3 & -4.3 & -38.9 & -60.4 \end{bmatrix}}_{k^T} x + \underbrace{(-1)}_{k_p} (w - c^T x) + \underbrace{(-15)}_{k_I} x_I. \end{aligned} \quad (3.131)$$

3.7 Literatur

- [1] P.L. Falb und W.A. Wolovich. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12:651–659, 1967.
- [2] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig, Heidelberg, 8. Auflage, 1994.
- [3] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 1995.
- [4] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1980.
- [5] H. Kwakernaak und R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [6] J. Lunze. *Regelungstechnik 2*. Springer, Berlin, 4. Auflage, 2006.
- [7] M. Papageorgiou. *Optimierung*. Oldenbourg Verlag, 1991.
- [8] W.J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2. Auflage, 1996.
- [9] J.-J. Slotine und W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.

Kapitel 4

Beobachterentwurf

Für den Zustandsreglerentwurf wurde bisher angenommen, dass der gesamte Zustandsvektor $\mathbf{x}$ bekannt ist. In vielen technischen Regelungsaufgaben ist dies aber nicht möglich oder praktikabel. Deswegen stellt sich beim Beobachterentwurf die Frage, wie der Zustand $\mathbf{x}$ durch Kenntnis der Ausgangsgröße $\mathbf{y}$ und der Stellgröße $\mathbf{u}$ rekonstruiert werden kann.

Für den Beobachterentwurf in diesem Kapitel wird wieder ein lineares, zeitinvariantes Mehrgrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.1}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, dem gemessenen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ sowie den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ betrachtet.

4.1 Trivialer Beobachter

Die einfachste Möglichkeit, den Zustand $\mathbf{x}$ zu schätzen, besteht in der Simulation des Streckenmodells (4.1)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{4.2}$$

wobei mit $\hat{\mathbf{x}}$ der geschätzte Zustand bezeichnet wird. Ein Beobachter dieser wird als *trivialer Beobachter* bzw. *Simulator* bezeichnet. Um die Güte dieser Schätzung zu untersuchen, betrachtet man den *Beobachtungsfehler*

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t),$$

der die Abweichung des geschätzten Zustandes $\hat{\mathbf{x}}$ vom tatsächlichen Zustand $\mathbf{x}$ darstellt. Der Schätzfehler $\mathbf{e}$ erfüllt die Differenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{e} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0.\tag{4.3}$$

Die Fehlerdynamik (4.3) ist offenbar nur dann stabil, wenn die Strecke stabil ist, also sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ in der linken Halbebene liegen.

Ein weiterer Nachteil ist, dass das Abklingverhalten bzw. die Dynamik (4.3) des Beobachtungsfehlers $\mathbf{e}$ bei stabilen Strecken nicht beeinflusst werden kann. Der Hauptgrund dafür ist, dass der triviale Beobachter (4.2) die Messung der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}$ nicht verwendet und somit nicht beeinflussbar ist.

4.2 Vollständiger Luenberger-Beobachter

Im Gegensatz zum trivialen Beobachter (4.2) verfügt der sogenannte *Luenberger-Beobachter* zusätzlich zum Simulator über einen Korrekturteil:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \overbrace{\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u}^{\text{Simulator}} + \overbrace{\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}^{\text{Korrektur}}, & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Abbildung 4.1 zeigt die Struktur des Luenberger-Beobachters. Der Korrekturteil führt den Schätzfehler des Ausgangs $(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ gewichtet durch die $(p \times n)$ -Beobacherverstärkungsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ im Beobachtermodell zurück.

Um die Dynamik des Schätzfehlers $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ mit dem Systemzustand von (4.1) und der Schätzung $\hat{\mathbf{x}}$ von (4.4) zu berechnen, wird die Fehlerdifferentialgleichung betrachtet:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}u - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\ &= \underbrace{(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})}_{\mathbf{A}_e} \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Damit der Schätzfehler $\mathbf{e}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, muss $\hat{\mathbf{K}}$ so gewählt werden, dass alle Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix $\mathbf{A}_e = (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})$ in der linken offenen Halbebene liegen.

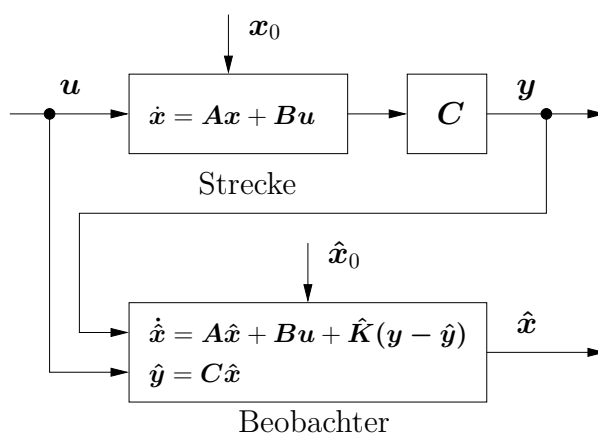


Abbildung 4.1: Struktur der Strecke/Beobachter-Konfiguration.

Da die Matrix $(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})$ die gleichen Eigenwerte wie ihre Transponierte

$$(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})^\top = \mathbf{A}^\top - \mathbf{C}^\top \hat{\mathbf{K}}^\top$$

besitzt, kann die Bestimmung von $\hat{\mathbf{K}}$ als ein Reglerentwurfsproblem aufgefasst werden. Dies wird offensichtlich, wenn man die transponierte Matrix $(\mathbf{A}^\top - \mathbf{C}^\top \hat{\mathbf{K}}^\top)$ als die Systemmatrix eines geschlossenen Regelkreises für das duale System in (2.151)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_D &= \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_D + \mathbf{C}^\top \mathbf{u}_D \\ \mathbf{y}_D &= \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_D\end{aligned}\tag{4.6}$$

mit dem Rückführgesetz

$$\mathbf{u}_D = -\hat{\mathbf{K}}^\top \mathbf{x}_D$$

interpretiert. In diesem Zusammenhang sei an Satz 2.18 erinnert, dem zufolge das System (4.1) beobachtbar ist, wenn das duale System (4.6) steuerbar ist. Zusammenfassend gilt die folgende Analogie zwischen Regler- und Beobachterentwurf:

Zustandsregler	$\Leftrightarrow$	Beobachter
$\mathbf{A}$		$\mathbf{A}^\top$
$\mathbf{B}$		$\mathbf{C}^\top$
$\mathbf{C}$		$\mathbf{B}^\top$
$\mathbf{K}$		$\hat{\mathbf{K}}^\top$
$\mathbf{Q}_B$		$\mathbf{Q}_S^\top$
$\mathbf{Q}_S$		$\mathbf{Q}_B^\top$

Die Berechnung der Verstärkungsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ für den Luenberger-Beobachter (4.4) kann also über eines der in Kapitel 3 behandelten Verfahren erfolgen!

Damit der Beobachtungsfehler $\mathbf{e}$ schneller abklingt als das Dynamikverhalten des beobachteten Systems, wählt man die Beobachtermatrix $\hat{\mathbf{K}}$ zweckmäßigerweise so, dass die Eigenwerte von $(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})$ links der dominierenden Eigenwerte von $\mathbf{A}$ liegen.

Eingrößenfall: Aufgrund seiner Bedeutung und um die Dualität zwischen Zustandsregler- und Beobachterentwurf hervorzuheben, wird im Folgenden die Polvorgabe mit Hilfe der Ackermann-Formel im Eingrößenfall (Satz 3.1) auf den Beobachterentwurf übertragen. Dazu wird das lineare Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.7}$$

mit dem zu entwerfenden Beobachter (4.4)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \hat{\mathbf{k}}(y - \hat{y}), & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{4.8}$$

und der Fehlerdynamik (4.5) betrachtet

$$\dot{\mathbf{e}} = \underbrace{(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\top)}_{\mathbf{A}_e} \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0.\tag{4.9}$$

Satz 4.1 (Ackermann-Formel für Zustandsbeobachter – Eingrößenfall) Die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix $\mathbf{A}_e = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\top$ des Fehlersystems (4.9) des vollständigen Beobachters (4.8) zum System (4.7) können genau dann durch $\hat{\mathbf{k}}$ beliebig platziert werden, wenn das System (4.7) beobachtbar ist. Der Rückführvektor berechnet sich dann nach der Formel

$$\hat{\mathbf{k}} = (\hat{p}_0 \mathbf{I} + \hat{p}_1 \mathbf{A} + \cdots + \hat{p}_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) \hat{\mathbf{t}} \quad (4.10)$$

in Abhängigkeit von $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_B^{-1}[0, \dots, 0, 1]^\top$ – der letzten Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix (2.138) – und den Koeffizienten $\hat{p}_i$ des gewünschten charakteristischen Polynoms

$$\hat{p}^*(\lambda) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 \lambda + \cdots + \hat{p}_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n = \prod_{i=1}^n (\lambda - \hat{\lambda}_i^*).$$

Einfluß von Messrauschen: Theoretisch können die Beobachtereigenwerte beliebig weit links platziert werden, da keine Stellgrößenbeschränkungen wie beim Reglerentwurf eingehalten werden müssen. Allerdings tritt in der Praxis häufig Messrauschen $\mathbf{r}(t)$ in der Messung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \quad (4.11)$$

auf, was einen direkten Einfluß auf den Beobachter hat. Betrachtet man nämlich die Fehlerdynamik (4.5) mit dem zusätzlichen Eintrag $\mathbf{r}(t)$, so ergibt sich

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{r}(t). \quad (4.12)$$

Da die Einträge in der Beobachtermatrix $\hat{\mathbf{K}}$ anwachsen, je weiter die Beobachtereigenwerte nach links verschoben werden, wird das Messrauschen den Beobachtungsfehler $\mathbf{e}(t)$ stärker beeinflussen.

Beispiel 4.1 (Simulationsbeispiel) Für den gekoppelten Feder-Masse-Schwinger in Abbildung 3.4 mit dem mathematischen Modell (3.27) und den Parametern (3.28) soll ein Luenberger-Beobachter entworfen werden. Mit den gewünschten Eigenwerten $\lambda_{1/2}^* = -1 \pm j1$ und $\lambda_{3/4}^* = -3 \pm j3$ lautet die Beobacherverstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ gemäß (4.10)

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 51.0 \\ 126.8 \\ 6.8 \\ 22.54 \end{bmatrix}.$$

Alternativ kann $\hat{\mathbf{k}}$ mit Hilfe der Ackermann-Formel (3.25) als Reglerverstärkung für das duale System

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_d + \mathbf{c}^\top u$$

berechnet werden, unter MATLAB z.B. mit der Funktion $\hat{\mathbf{k}} = \text{acker}(\mathbf{A}^\top, \mathbf{c}^\top, [\lambda_1^*, \dots, \lambda_4^*])^\top$. Der Luenberger-Beobachter lautet dann

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & -51.0 & 0 \\ -1.0 & -1.0 & -125.8 & 1.0 \\ 0 & 0 & -6.8 & 1.0 \\ 0.1 & 0.1 & -22.74 & -0.2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\top} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \hat{\mathbf{k}}y \quad (4.13)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{x}}.$$

4.3 Separationsprinzip

Bisher wurde der Regler- und der Beobachterentwurf getrennt voneinander betrachtet. Wenn man nun beide Aspekte mit einander verbinden will, so bedeutet dies, dass für das lineare zeitinvariante System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (4.14)$$

ein Zustandsbeobachter

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \overbrace{\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}}^{\text{Simulator}} + \overbrace{\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}^{\text{Korrektur}}, & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (4.15)$$

entworfen und im Zustandsregelgesetz (3.1) anstelle des tatsächlichen Zustandes $\mathbf{x}$ der beobachtete Zustand $\hat{\mathbf{x}}$ eingesetzt wird:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{w}. \quad (4.16)$$

Abbildung 4.2 veranschaulicht die Struktur des resultierenden Regelkreises.

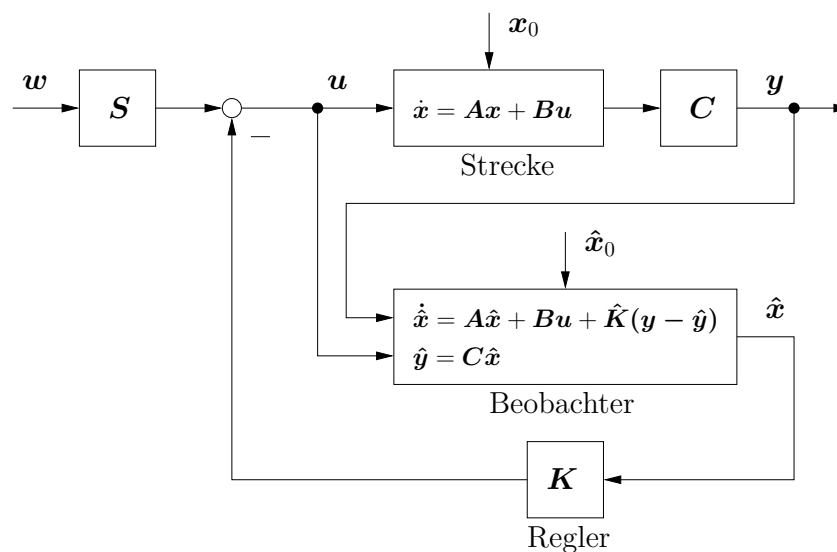


Abbildung 4.2: Struktur der Zustandsregler/Beobachter-Konfiguration.

Da bei einem separaten Entwurf die Reglerverstärkung $\mathbf{K}$ und die Beobacherverstärkung $\hat{\mathbf{K}}$ getrennt von einander berechnet werden, stellt sich direkt die Frage nach der Stabilität der Zustandsregler/Beobachter-Kombination in Abbildung 4.2 bzw. nach der Lage der Eigenwerte im geschlossenen Kreis.

Um dies zu untersuchen, betrachtet man das Gesamtsystem (4.14)-(4.16) mit dem erweiterten Zustand

$$\mathbf{x}_{ges} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

und dem Differenzialgleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{ges}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{ges}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{ges}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{BS} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{ges}} \mathbf{w} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix},$$

wobei für $\mathbf{e}$ das Fehlersystem (4.5) gilt. Die Führungsgröße $\mathbf{w}$ dient im geschlossenen Kreis als Eingang zu (4.17).

Für die Stabilität des Gesamtsystems sind die Eigenwerte der erweiterten Dynamikmatrix $\mathbf{A}_{ges}$ entscheidend. Aufgrund der Blockstruktur von $\mathbf{A}_{ges}$ gilt aber für das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{ges}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}).$$

Dieses wichtige Ergebnis ist das sogenannte *Separationsprinzip*, das die Rechtfertigung für einen separaten Regler- und Beobachterentwurf gibt.

Satz 4.2 (Separationsprinzip) *Das System (4.14) sei vollständig steuerbar und beobachtbar. Dann besitzt der geschlossene Kreis in Abbildung 4.2 mit der Zustandsregler/Beobachter-Kombination (4.15), (4.16) das charakteristische Polynom*

$$p_{ges}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}) = p^*(\lambda) \hat{p}^*(\lambda)$$

bestehend aus den gewünschten charakteristischen Polynomen $p^(\lambda)$ und $\hat{p}^*(\lambda)$ des separaten Zustandsregler- und Beobachterentwurfs.*

Aufgabe 4.1 Berechnen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}_w(s) = [Y_i(s)/W_j(s)]$ des dynamischen Reglers, der sich durch Zusammenschaltung des vollständigen Beobachters mit dem Zustandsregler ergibt. Welchen Schluss können Sie aus der Ordnung der einzelnen Übertragungsfunktionen in $\mathbf{G}_w(s)$ ziehen?

Beim Einsatz eines Beobachters in Kombination mit einem Zustandsregler wählt man die Eigenwerte von $(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})$ nicht im Vergleich zu der Systemmatrix $\mathbf{A}$ (wie im Abschnitt 4.2 diskutiert wurde), sondern in Bezug auf die Eigenwerte von $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$. Der Gesamtentwurf folgt dabei folgenden Schritten:

- Überprüfung der Strecke auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit,
- Entwurf einer Zustandsrückführung $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w}$,
- Festlegung der Beobachterpole anhand der Eigenwerte von $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$,
- Berechnung der Beobachtermatrix $\hat{\mathbf{K}}$ z.B. mittels Reglerentwurf für das duale System (4.6). Wird ein LQR-Entwurf gewählt, so sollte anhand der Beobachtereigenwerte nachträglich überprüft werden, ob die Vorgaben aus c) erfüllt sind.

In der Praxis gilt, dass die Realteile der Beobachterpole um den Faktor 2-6 “schneller” sein sollten als die Realteile der dominierenden Eigenwerte der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$, wobei Faktor 2 bei stark verrauschten Messgrößen $\mathbf{y}(t)$ gilt. Diese Faustformel gewährleistet, dass das Regelverhalten des geschlossenen Kreises hauptsächlich von der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ abhängt.

Beispiel 4.2 (Simulationsbeispiel) Für den gekoppelten Feder-Masse-Schwinger in Abbildung 3.4 mit dem mathematischen Modell (3.27) und den Parametern (3.28) sollen der PI-Zustandsregler (3.131) und der Luenberger-Beobachter (4.13) kombiniert werden. Da die Eigenwerte des Beobachters um den Faktor 2-6 schneller sein sollen als die Eigenwerte (3.130) des geschlossenen Regelkreises, werden die Beobachtereigenwerte dazu auf die Werte $\hat{\lambda}_{1/2} = -4 \pm j 2$ und $\hat{\lambda}_{3/4} = -6 \pm j 3$ gelegt.

4.4 Behandlung von Störgrößen (Störbeobachter)

In Abschnitt 3.6 wurde auf die Behandlung von Störgrößen beim Entwurf eines Zustandsreglers eingegangen, wobei davon ausgegangen wurde, dass die Störung $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^l$ mit einer Störeingangsmatrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ auf das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{d}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.18}$$

wirkt. In vielen Fällen ist die Kenntnis der Störgröße $\mathbf{d}$ hilfreich bzw. notwendig, z.B. um eine Störgrößenaufschaltung zu realisieren (Abschnitt 3.6.1).

Wenn die Störung nicht messbar ist, so kann ein *Störgrößenbeobachter* eingesetzt werden, um $\mathbf{d}$ zu schätzen. Dazu muss bekannt sein, welche Art von Störung auf das System wirkt, um ein *Störgrößenmodell* der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d, & \mathbf{x}_d(0) &= \mathbf{x}_{d,0} \\ \mathbf{d} &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d\end{aligned}\tag{4.19}$$

ansetzen zu können. In Tabelle 4.1 sind drei Beispiele für Störmodelle dargestellt.

Zusammen mit der Strecke (4.18) ergibt sich das erweiterte Modell

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E}\mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}, & \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}_d(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{d,0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix},\end{aligned}}\tag{4.20}$$

das in Abbildung 4.3 veranschaulicht ist. Analog zum vorherigen Abschnitt kann für das erweiterte Modell (4.20) ein Luenberger-Beobachter entworfen werden. Die geschätzte Störgröße $\hat{\mathbf{d}}(t)$ kann dann z.B. für eine Störgrößenaufschaltung (3.124)

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{S}\mathbf{w} - (\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{E} \hat{\mathbf{d}}(t)\tag{4.21}$$

zusammen mit den geschätzten Zuständen $\hat{\mathbf{x}}(t)$ verwendet werden.

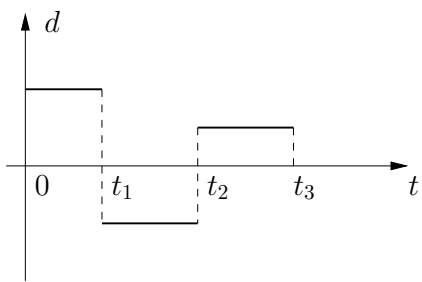
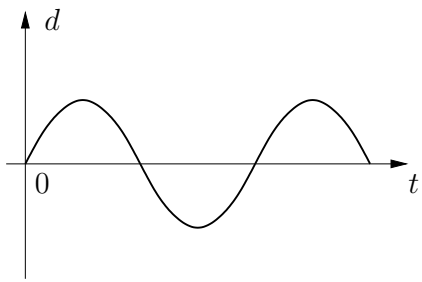
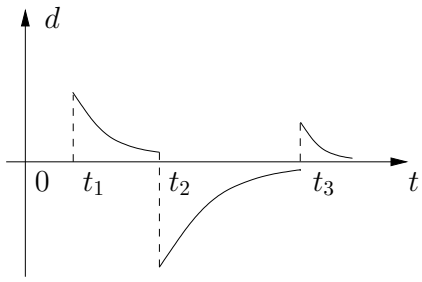
Art der Störung	Störmodell	Veranschaulichung
konstant (z.B. Coulombsche Reibung)	$\dot{x}_d = 0$ $d = x_d$	
periodisch (z.B. Vibration mit konst. Frequenz)	$\dot{x}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} x_d$ $d = [1, 0] x_d$	
abklingend (z.B. Reaktionskinetik in chemischen Reaktoren)	$\dot{x}_d = -\frac{1}{T} x_d$ $d = x_d$	

Tabelle 4.1: Beispiele von Störmodellen (4.18).

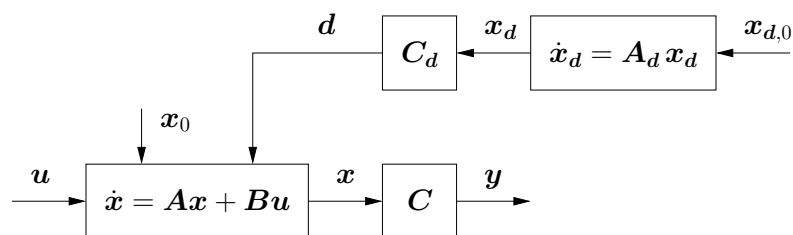


Abbildung 4.3: Erweitertes Streckenmodell (4.20).

4.5 Reduzierter Beobachter

Beim vollständigen Luenberger-Beobachter wird der gesamte Zustand $\mathbf{x}$ geschätzt, obwohl durch die Messung von $\mathbf{y}$ über die Ausgangsgleichung eine Linearkombination der Zustandsgrößen bekannt ist. Diese Redundanz ist bei einem skalaren System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}\tag{4.22}$$

direkt ersichtlich, da hier der Zustand x direkt aus der Ausgangsgleichung über die Beziehung

$$x = \frac{y}{c} \quad (4.23)$$

ermittelt werden kann. Um diese Informationen im allgemeinen Fall zu nutzen, wird angenommen, dass für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.24)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ im Folgenden p linear unabhängige Messungen

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.25)$$

mit $\text{Rang}(\mathbf{C}) = p$ zur Verfügung stehen. Man kann nun in weiterer Folge stets eine reguläre Zustandstransformation

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (4.26)$$

mit der Untermatrix $\mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$ finden, für die sich das transformierte System

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{I}_{p \times p} \quad \mathbf{0}] \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit der partitionierten Struktur

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{I}_{p \times p} \quad \mathbf{0}] \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

ergibt. Man sagt dann auch, das System (4.28) liegt in *Sensorkoordinaten* vor, da der obere Teil des Zustands mit den Messgrößen übereinstimmt. Multipliziert man die Differenzialgleichung für $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}_1$ mit einer noch zu bestimmenden Matrix $\hat{\mathbf{K}}_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ und subtrahiert diese von der Differenzialgleichung für $\tilde{\mathbf{x}}_2$, dann ergibt sich mit dem neuen Zustand

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{y} \quad (4.29)$$

das System

$$\dot{\mathbf{w}} = (\tilde{\mathbf{A}}_{22} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{w} + (\tilde{\mathbf{A}}_{21} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{11} + \tilde{\mathbf{A}}_{22} \hat{\mathbf{K}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12} \hat{\mathbf{K}}_2)\mathbf{y} + (\tilde{\mathbf{B}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_1)\mathbf{u}. \quad (4.30)$$

Dabei sind die Größen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{y}$ bekannt und können daher als Eingangsgrößen für das System (4.30) betrachtet werden. Der reduzierte Beobachter für die unbekannten Größen $\mathbf{w}$ entspricht dann direkt dem trivialen Beobachter für (4.30), d.h.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= (\tilde{\mathbf{A}}_{22} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{w} + (\tilde{\mathbf{B}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_1)\mathbf{u} + \\ &\quad (\tilde{\mathbf{A}}_{21} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{11} + \tilde{\mathbf{A}}_{22} \hat{\mathbf{K}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12} \hat{\mathbf{K}}_2)\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Dynamik des Schätzfehlers $\mathbf{e}_w = \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$ ist durch

$$\dot{\mathbf{e}}_w = \underbrace{(\tilde{\mathbf{A}}_{22} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12})}_{\tilde{\mathbf{A}}_{22,e}} \mathbf{e}_w \quad (4.32)$$

gegeben und die Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_2$ für den Zustand $\tilde{\mathbf{x}}_2$ erhält man unmittelbar aus (4.29)

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{y}. \quad (4.33)$$

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 4.3 (Luenberger-Beobachter reduzierter Ordnung) Wenn das System (4.24) und (4.25) mit $\text{Rang}(\mathbf{C}) = p$ vollständig beobachtbar ist, dann kann mit dem reduzierten Beobachter (4.31), (4.33) der Zustand $\tilde{\mathbf{x}}_2$ in Sensorkoordinaten (4.26) rekonstruiert werden und mit Hilfe von $\hat{\mathbf{K}}_2$ können die Eigenwerte der Fehlerdynamik (4.32) beliebig platziert werden.

In Analogie zum Reglerentwurf im Mehrgrößenfall liegt die Matrix $\hat{\mathbf{K}}_2$ durch Vorgabe eines gewünschten charakteristischen Polynoms für die Fehlerdynamik (4.32) nicht eindeutig fest. Im Eingrößenfall ($m = p = 1$) ist der Sachverhalt aber eindeutig und die Elemente des Beobachtervektors $\hat{\mathbf{k}}_2$ können z.B. durch Koeffizientenvergleich mit dem gewünschten charakteristischen Polynom bestimmt werden.

Beispiel 4.3 Für den gekoppelten Feder-Masse-Schwinger in Abbildung 3.4 wird nun angenommen, dass die Positionen s_1 und s_2 der Massen m_1 und m_2 gemessen werden. Die Sensorkoordinaten (4.26) sind somit direkt durch

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

gegeben und das mathematische Modell (3.27) mit den Parametern (3.28) lässt sich durch Vertauschung der Zustände direkt in der Form (4.28)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 \\ 0.1 & -0.2 & \vdots & 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

angeben. Da zwei Zustände direkt gemessen werden, hat der reduzierte Beobachter die Ordnung 2. Die Beobacherverstärkung $\hat{\mathbf{K}}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ wird nun so gewählt, dass die Dynamikmatrix der Fehlerdynamik (4.32),

$$\tilde{\mathbf{A}}_{22,e} = \tilde{\mathbf{A}}_{22} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} - \hat{\mathbf{K}}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

die gewünschten Eigenwerte $\hat{\lambda}_1^* = -2$ und $\hat{\lambda}_2^* = -3$ besitzt. Dabei kann $\hat{\mathbf{K}}_2$ z.B. wie folgt gewählt werden

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 2.8 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

und man erhält den reduzierten Beobachter (4.31), (4.33)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -0.2 & -8.6 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \hat{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{w} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

4.6 Literatur

- [1] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig, Heidelberg, 8. Auflage, 1994.
- [2] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1980.
- [3] J. Lunze. *Regelungstechnik 2*. Springer, Berlin, 4. Auflage, 2006.

Kapitel 5

Folgeregelung

In Kapitel 3 wurde der Entwurf von Zustandsreglern betrachtet, um einerseits ein lineares System zu stabilisieren und andererseits eine gewünschte Führungsgröße w einzustellen (siehe Abbildung 3.2). Dabei wurde angenommen, dass w konstant ist und es sich somit um einen stationären Arbeitspunkt handelt.

In vielen praktischen Anwendungen ist darüberhinaus die *Folgeregelung* von Bedeutung. Typische Aufgabenstellungen sind (siehe Abbildung 5.1)

- a) (Asymptotische) Glättung eines Sollwert- bzw. Führungsgrößensprungs, z.B. um die Stellamplitude zu reduzieren bzw. das Auflaufen eines I-Anteils zu verhindern.
- b) Nachfahren einer vorgegebenen Solltrajektorie $y^*(t)$, $t \in [0, T]$ für den Ausgang. Beispiele dafür sind Schweißvorgänge (Schweißnähte) oder periodische Vorgänge in der Fertigungstechnik.
- c) Realisierung eines Übergangs zwischen zwei stationären Zuständen $x_A^* \rightarrow x_B^*$ innerhalb eines gewünschten Zeitintervalls $t \in [0, T]$.

In diesem Kapitel werden – aufbauend auf den Ergebnissen von Kapitel 3 – zwei verschiedene Verfahren zur Realisierung einer Folgeregelung für lineare Systeme vorgestellt.

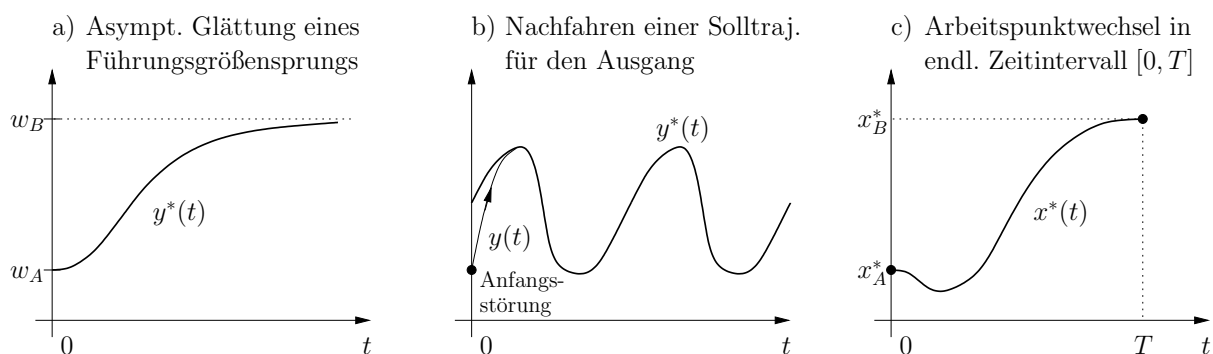


Abbildung 5.1: Typische Aufgabenstellungen einer (Trajektorien-)Folgeregelung.

5.1 Folgeregelung für den Ausgang

Bei der Ausgangsfolgeregelung handelt es um die Aufgabe, einer Solltrajektorie $\mathbf{y}^*(t)$ für den Ausgang $\mathbf{y}$ asymptotisch zu folgen, wie es in der Einleitung bereits beschrieben wurde (siehe auch a) und b) in Abbildung 5.1). Im Folgenden wird dazu wieder ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad y_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, p = m\end{aligned}\tag{5.1}$$

betrachtet, wobei davon ausgegangen wird, dass die Anzahl der Stellgrößen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und Ausgangsgrößen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ gleich ist, also $p = m$ gilt.

5.1.1 Fehlerdynamik und Regelgesetz

Der bisherige Zustandsreglerentwurf mittels Ein-/Ausgangsentkopplung (Abschnitt 3.4) kann direkt auf das Folgeregelungsproblem erweitert werden. In diesem Zusammenhang wird der sogenannten *Folgefehler* zwischen den einzelnen vorgegebenen Solltrajektorien $y_i^*(t)$ und den Ausgangsverläufen $y_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ durch

$$e_{y,i}(t) = y_i(t) - y_i^*(t), \quad i = 1, \dots, m \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e}_y(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t)$$

definiert. Die Aufgabe der Folgeregelung ist nun, diesen Folgefehler asymptotisch zu stabilisieren.

Der Ausgangspunkt für den Folgeregelungsentwurf ist die entkoppelte Ein-/Ausgangsnormalform (3.74), die der Einfachheit halber hier nochmal dargestellt ist:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_{i,1} &= \tilde{x}_{i,2} \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i,r_i-1} &= \tilde{x}_{i,r_i} \\ \dot{\tilde{x}}_{i,r_i} &= v_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \bar{\mathbf{M}}_y \tilde{\mathbf{x}}_y + \bar{\mathbf{M}}_\eta \boldsymbol{\eta} + \bar{\mathbf{N}}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Die Matrizen $\bar{\mathbf{M}}_y$, $\bar{\mathbf{M}}_\eta$ und $\bar{\mathbf{N}}$ sind in (3.75) angegeben. Durch Einführung der Rückführung

$$v_i = y_i^{*(r_i)}(t) - \sum_{j=0}^{r_i-1} p_{i,j} \underbrace{(y_i^{(j)}(t) - y_i^{*(j)}(t))}_{e_{y,i}^{(j)}(t)}\tag{5.2}$$

und unter Berücksichtigung der Ausgangsbeziehungen

$$\begin{aligned}y_i &= \tilde{x}_{i,1} \\ y_i^{(j)} &= \tilde{x}_{i,j+1}, \quad j = 1, \dots, r_i - 1 \\ y_i^{(r_i)} &= \dot{\tilde{x}}_{i,r_i}, \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}\tag{5.3}$$

kann aus der obigen Ein-/Ausgangsnormalform direkt die Dynamik des Folgefehlers

$$e_{y,i}^{(r_i)} + p_{i,r_i-1} e_{y,i}^{(r_i-1)} + \dots + p_{i,1} \dot{e}_{y,i} + p_{i,0} e_{y,i} = 0, \quad i = 1, \dots, m\tag{5.4}$$

hergeleitet werden. Die Koeffizienten $p_{i,j}$ bestimmen sich aus den charakteristischen Polynomen

$$p_i^*(\lambda) = p_{i,0} + p_{i,1}\lambda + \cdots + p_{i,r_i-1}\lambda^{r_i-1} + \lambda^{r_i} = \prod_{j=1}^{r_i} (\lambda - \lambda_{i,j}^*), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.5)$$

in Abhängigkeit der gewünschten Eigenwerte $\{\lambda_{i,1}^*, \dots, \lambda_{i,r_i}^*\}$, $i = 1, \dots, m$. Mit Hilfe der Ausgangsbeziehungen (5.3) ist erkennbar, dass das Regelgesetz (5.2) für die neuen Ausgänge v_i eine Verallgemeinerung des Falls (3.76) darstellen, da sich offensichtlich genau (3.76) ergibt, wenn eine konstante Führungsgröße $\mathbf{w} = \mathbf{y}^*(t) = \text{konst.}$ betrachtet wird. Das Regelgesetz (5.6) im folgenden Satz verdeutlicht diesen Zusammenhang.

Satz 5.1 (Asymptotische Ausgangsfolgeregelung) *Gegeben sei das lineare System (5.1) mit dem vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ und den beschränkten (r_i -fach stetig differenzierbaren) Solltrajektorien $y_i^*(t) \in \mathcal{C}^{r_i}$, $t \in [0, T]$. Dann ist die Fehlerdynamik (5.4) durch die Rückführung*

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}_y^{-1} \begin{bmatrix} p_{1,0} y_1^*(t) + \cdots + p_{1,r_1-1} y_1^{*(r_1-1)}(t) + y_1^{*(r_1)}(t) \\ \vdots \\ p_{m,0} y_m^*(t) + \cdots + p_{m,r_m-1} y_m^{*(r_m-1)}(t) + y_m^{*(r_m)}(t) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

asymptotisch stabilisierbar, wobei $\mathbf{H}_y$ die Kopplungsmatrix (3.59), $\mathbf{K}$ die Reglerverstärkung (3.79) und $p_{i,j}$ die Koeffizienten der gewünschten charakteristischen Polynome (5.5) darstellen. Falls darüberhinaus die Nulldynamik (3.78) asymptotisch stabil ist, so ist der Zustand $\boldsymbol{\eta}(t)$, $t \in [0, T]$ der internen Dynamik (3.67) bzw. (3.74) für alle Zeiten $T > 0$ beschränkt.

Das Regelgesetz (5.6) folgt direkt aus (3.73) durch Aufspaltung der Fehlerterme in (5.2). Aus (5.6) ist ebenfalls ersichtlich, dass für die Solltrajektorien

$$y_i^*(t) \in \mathcal{C}^{r_i}, \quad t \in [0, T]$$

gelten muss, wobei $\mathcal{C}^{r_i}$ die Klasse der r_i -mal stetig differenzierbaren Funktionen darstellt. Dies muss gelten, damit die Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ auf $[0, T]$ stetig ist, also $u(t) \in \mathcal{C}^0$, $t \in [0, T]$ gilt.

Beispiel 5.1 (Simulationsbeispiel) *Für den Feder-Masse-Schwinger in Abbildung 3.4 mit dem mathematischen Modell (3.27) wurde bereits in Beispiel 3.7 ein Zustandsregler durch Ein-/Ausgangsentkopplung entworfen und simulativ getestet. In diesem Beispiel soll für den Feder-Masse-Schwinger ein Ausgangsfolgeregler entworfen werden, um der Solltrajektorie*

$$y^*(t) = y_{\max}^* \sin(\omega t) \quad (5.7)$$

nachzufahren. Die (skalare) Kopplungsmatrix H_y^{-1} und die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^\top$ für die Eigenwerte $\lambda_i^* = -2$, $i = 1, 2, 3$ wurden bereits in (3.81) und (3.82) berechnet. Zusammen mit dem zeitvarianten Führungsgrößenanteil ergibt sich das Regelgesetz (5.6)

$$u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{H_y} (8y^*(t) + 12\dot{y}^*(t) + 6\ddot{y}^*(t) + y^{*(3)}(t)) \quad (5.8)$$

wobei sich $y^*(t)$ und seine Ableitungen aus (5.7) ergeben.

Aufgabe 5.1 *Vergleichen Sie mit Hilfe von MATLAB/SIMULINK die Simulationsergebnisse für das Folgeregelungsgesetz (5.8) mit dem Zustandsregelgesetz (3.83) und der (zeitvarianten) Führungsgröße $w(t) = y^*(t)$.*

5.1.2 Folgeregelung mit Integralanteil

Im Falle von Störgrößen $\mathbf{d}$, die auf das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{d}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad y_i = \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}\quad (5.9)$$

mit $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ wirken, wird der Folgefehler $\mathbf{e}_y(t)$ nicht gegen Null konvergieren. Um Störeinflüsse bzw. Parameterabweichungen kompensieren zu können, werden ähnlich dem Vorgehen in Abschnitt 3.6.2 zusätzliche Integratorzustände

$$\dot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{x}_I(0) = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

eingeführt. Damit erweitert sich das Rückführgesetz (5.2)

$$v_i = y_i^{*(r_i)}(t) - \sum_{j=0}^{r_i-1} p_{i,j} e_{y,i}^{(j)}(t) + p_{i,I} x_{i,I}(t), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.11)$$

bzw. die Fehlerdynamik (5.4)

$$e_{y,i}^{(r_i)} + p_{i,r_i-1} e_{y,i}^{(r_i-1)} + \dots + p_{i,0} e_{y,i} + p_{i,I} \int_0^t e_{y,i}(\tau) d\tau = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.12)$$

um die zusätzlichen Integralanteile mit den Koeffizienten $p_{i,I}$. Die zeitliche Ableitung der Fehlerdynamik (5.12) führt auf die Darstellung

$$e_{y,i}^{(r_i+1)} + p_{i,r_i-1} e_{y,i}^{(r_i)} + \dots + p_{i,0} \dot{e}_{y,i} + p_{i,I} e_{y,i} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.13)$$

Die Koeffizienten $p_{i,j}$ und $p_{i,I}$ bestimmen sich aus den erweiterten charakteristischen Polynomen

$$p_{i,I}^*(\lambda) = p_{i,I} + p_{i,0}\lambda + \dots + p_{i,r_i-1}\lambda^{r_i} + \lambda^{r_i+1} = \prod_{j=1}^{r_i+1} (\lambda - \lambda_{i,j}^*), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.14)$$

in Abhängigkeit der gewünschten Eigenwerten $\{\lambda_{i,1}^*, \dots, \lambda_{i,r_i+1}^*\}$, $i = 1, \dots, m$.

Durch Einsetzen von (5.11) in (3.73) kann das Regelgesetz für die eigentliche Stellgröße $\mathbf{u}$ hergeleitet werden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_I &= \mathbf{y}^* - \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_I(0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_I\mathbf{x}_I + \mathbf{H}_y^{-1} \begin{bmatrix} p_{1,0} y_1^*(t) + \dots + p_{1,r_1-1} y_1^{*(r_1-1)}(t) + y_1^{*(r_1)}(t) \\ \vdots \\ p_{m,0} y_m^*(t) + \dots + p_{m,r_m-1} y_m^{*(r_m-1)}(t) + y_m^{*(r_m)}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(5.15)

wobei sich $\mathbf{H}_y^{-1}$ und $\mathbf{K}$ wieder durch (3.59) und (3.79) ergeben und die Reglerverstärkung für den Integralanteil durch

$$\mathbf{K}_I = \mathbf{H}_y^{-1} \begin{bmatrix} p_{1,I} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & p_{m,I} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

berechnet wird. Das Regelgesetz (5.15) stellt somit einerseits eine Erweiterung des Folge-reglers (5.6) dar und besitzt andererseits Ähnlichkeit mit dem PI-Zustandsregler (3.125), wobei an dieser Stelle der P-Anteil nicht betrachtet wurde.

Beispiel 5.2 (Simulationsbeispiel) Der Folgeregler für den Feder-Masse-Schwinger aus Beispiel 5.1 soll um einen I-Anteil erweitert werden, um stationäre Störungen im Modell (3.27) kompensieren zu können. Dazu wird die zusätzliche Differenzialgleichung

$$\dot{x}_I = y^* - y = y^* - \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad x_I(0) = 0$$

mit dem Integratorzustand x_I eingeführt. Die gewünschten Eigenwerte im geschlossenen Kreis sollen der Einfachheit halber bei $\lambda_i^* = -2, i = 1, \dots, 4$ liegen. Damit ergibt sich das charakteristische Polynom

$$p_I^*(\lambda) = 16 + 32\lambda + 24\lambda^2 + 8\lambda^3 + \lambda^4,$$

wobei $p_I = 16$ gilt, siehe (5.14). Die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^T$ folgt aus der Formel (3.79)

$$\mathbf{k}^T = H_y^{-1} \mathbf{c}^T (32\mathbf{I} + 24\mathbf{A} + 8\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3) = [-6.8 \quad -7.8 \quad -305.4 \quad -223.4]$$

mit $H_y = -0.1$ gemäß (3.81). Die Reglerverstärkung für den Integralanteil ergibt sich aus (5.16)

$$k_I = H_y^{-1} p_I = -160.$$

Somit lautet das gesamte Regelgesetz (5.15)

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + k_I x_I + \frac{1}{H_y} (32y^*(t) + 24\dot{y}^*(t) + 8\ddot{y}^*(t) + y^{*(3)}(t)).$$

5.2 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung

Eine Alternative zur asymptotischen Folgeregelung ist die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung in Abbildung 5.2 bestehend aus einer Vorsteuerung und einer unterlagerten Regelung mit dem Ziel, das Führungs- und Stabilitätsverhalten getrennt voneinander auszulegen.

Wie zu Beginn von Kapitel 5 bereits erwähnt wurde (siehe auch c) in Abbildung 5.1), besteht eine häufige Aufgabenstellung in der Realisierung eines *Arbeitspunktwechsels* zwischen zwei stationären Punkten $(\mathbf{x}_A^*, \mathbf{u}_A^*)$ und $(\mathbf{x}_B^*, \mathbf{u}_B^*)$, die durch die stationären Systemgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_A^* + \mathbf{B}\mathbf{u}_A^*, & \mathbf{y}_A^* &= \mathbf{C}\mathbf{x}_A^* \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_B^* + \mathbf{B}\mathbf{u}_B^*, & \mathbf{y}_B^* &= \mathbf{C}\mathbf{x}_B^* \end{aligned} \quad (5.17)$$

definiert sind. Die Aufgabe der Vorsteuerung ist nun, eine geeignete Steuertrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ auf dem Zeitintervall $[0, T]$ so zu bestimmen, dass das System (5.1) entlang nomi-

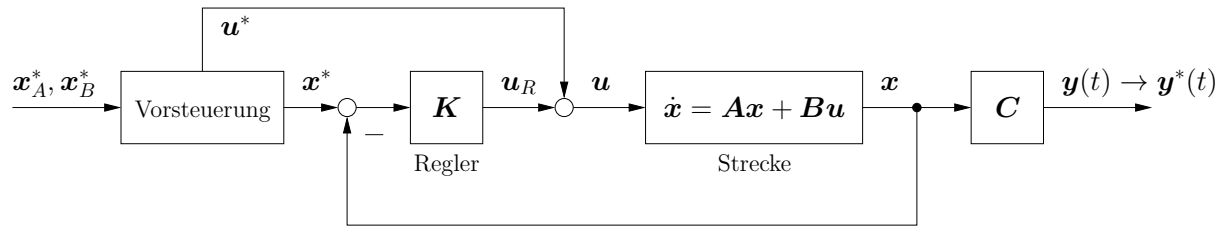


Abbildung 5.2: Zwei-Freiheitsgrade-Regelungsstruktur mit linearem Zustandsregler für ein lineares System.

neller Solltrajektorien $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{y}^*(t)$, $t \in [0, T]$ von dem stationären Punkt $\mathbf{x}_A^*$ zu dem Zielpunkt $\mathbf{x}_B^*$ überführt wird, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_A^*, \quad \mathbf{x}^*(T) = \mathbf{x}_B^* \\ \mathbf{y}^*(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}^*(t) \quad \mathbf{y}^*(0) = \mathbf{y}_A^*, \quad \mathbf{y}^*(T) = \mathbf{y}_B^*. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dabei ist die Transitionszeit T im Hinblick auf die Systemdynamik (5.1) und das Einhalten möglicher Beschränkungen zu wählen.

Der zusätzliche Regler in Abbildung 5.2 ist notwendig um Anfangsabweichungen $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_A^*$ des Systems (5.1) auszuregeln. Im Falle von konsistenten Anfangsbedingungen, d.h. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_A^*$ in (5.1) und in Abwesenheit von Störungen wird die Regelabweichung $\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)$ in Abbildung 5.2 verschwinden und somit $\mathbf{u}_R = \mathbf{0}$ gelten.

5.2.1 Definition des flachen Ausgangs

Die Eigenschaft der *Flachheit* wurde in den 1990er Jahren von *Michel Fliess*, *Jean Lévine*, *Philippe Martin* und *Pierre Rouchon* für nichtlineare Systeme definiert. Diese Eigenschaft ermöglicht u.A. die einfache Berechnung einer Vorsteuerung. Für lineare Systeme ist die Flachheit einfach anwendbar und hängt mit der Steuerbarkeit zusammen.

Wenn ein System flach ist, so können sämtliche Zustands- und Stellgrößen in Abhängigkeit eines *flachen Ausgangs* und seiner Zeitableitungen dargestellt werden. Im Folgenden wird die Definition der Flachheit für ein nichtlineares System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ angegeben.

Definition 5.1 (Flacher Ausgang) Das System (5.19) heißt (differenziell) flach, wenn es einen fiktiven Ausgang $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^\top$ der gleichen Dimension wie $\mathbf{u}$ gibt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Die Größen z_i , $i = 1, \dots, m$ lassen sich als Funktionen der Zustands- und Stellgrößen $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^m$ und einer endlichen Anzahl von Zeitableitungen $u_i^{(k)}$, $k = 1, \dots, \alpha_i$ ausdrücken, d.h.

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_1^{(\alpha_1)}, \dots, u_m, \dots, u_m^{(\alpha_m)}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}). \quad (5.20)$$

(ii) Die Zustandsvariablen $\mathbf{x}$ und Stellgrößen $\mathbf{u}$ lassen sich als Funktionen von $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^\top$ und einer endlichen Anzahl seiner Zeitableitungen $z_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, \beta_i$ darstellen, d.h.

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(z_1, \dots, z_1^{(\beta_1)}, \dots, z_m, \dots, z_m^{(\beta_m)}) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\beta)}) \quad (5.21)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}(z_1, \dots, z_1^{(\beta_1+1)}, \dots, z_m, \dots, z_m^{(\beta_m+1)}) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\beta+1)}). \quad (5.22)$$

(iii) Die Komponenten von $\mathbf{z}$ sind differenziell unabhängig, d.h. sie erfüllen keine Differenzialgleichung der Form

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\delta)}) = \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

Sind diese Bedingungen (für das nichtlineare System (5.19) zumindest lokal) erfüllt, so heißt der fiktive Ausgang (5.20) flacher Ausgang und das System (5.19) heißt flach.

Der flache Ausgang $\mathbf{z}$ erlaubt die Parametrierung sämtlicher Zustands- und Stellgrößen als auch der Ausgangsgrößen in Form einer Funktion

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\gamma)}). \quad (5.24)$$

In diesem Zusammenhang spricht man auch von dem inversen System Σ^{-1}

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}) \end{cases} \iff \Sigma^{-1} : \begin{cases} \mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}^{(\beta)}) \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}^{(\beta+1)}) \\ \mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}^{(\gamma)}), \end{cases} \quad (5.25)$$

das in Abbildung 5.3 verdeutlicht wird.

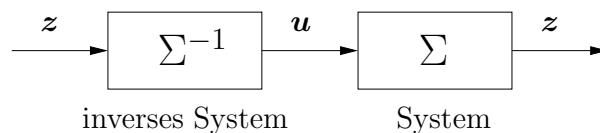


Abbildung 5.3: Veranschaulichung des inversen Systems.

Beispiel 5.3 Betrachtet wird das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2^3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3 \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ein flacher Ausgang des Systems ist $z = x_2$. Wie man durch zweimaliges Differenzieren von z leicht überprüfen kann, lassen sich die Zustände x_1 , x_2 , die Stellgröße u und der Ausgang y in Abhängigkeit von z , $\dot{z}$ und $\ddot{z}$ wie folgt parametrieren

$$\begin{aligned} x_1 &= z^3 + \dot{z} &= \psi_{x,1}(z, \dot{z}) \\ x_2 &= z &= \psi_{x,2}(z) \\ u &= z^3 + 3z^2\dot{z} + \ddot{z} &= \psi_u(z, \dot{z}, \ddot{z}) \\ y &= z^3 + \dot{z} &= \psi_y(z, \dot{z}). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Die Bedeutung des flachen Ausgangs $\mathbf{z}$ für den Entwurf einer Vorsteuerung ist direkt ersichtlich, da mittels der Beziehungen (5.21)-(5.24) auf einfache Weise Steuer- und Solltrajektorien

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(t) &= \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^*(t), \dots, \mathbf{z}^{*(\beta)}(t)) \\ \mathbf{u}^*(t) &= \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}^*(t), \dots, \mathbf{z}^{*(\beta+1)}(t)) \\ \mathbf{y}^*(t) &= \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}^*(t), \dots, \mathbf{z}^{*(\gamma)}(t)) \quad , \quad t \in [0, T]\end{aligned}\quad (5.28)$$

in Abhängigkeit einer flachen Solltrajektorie $\mathbf{z}^*(t)$ bestimmt werden können.

Der flache Ausgang ist häufig physikalisch oder anschaulich erklärbar. Allerdings ist im allgemeinen nichtlinearen Fall die Untersuchung, ob das System (5.19) flach ist und die Bestimmung eines flachen Ausgangs $\mathbf{z}$ eine nicht-triviale Angelegenheit. Wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird, vereinfacht sich dieses Problem für lineare Systeme erheblich, da es in Verbindung mit der Steuerbarkeit gebracht werden kann.

5.2.2 Flacher Ausgang bei linearen Systemen

Eingrößenfall: Zunächst wird ein lineares System mit skalarer Stellgröße $u \in \mathbb{R}$ und skalarer Ausgang $y \in \mathbb{R}$ betrachtet

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}.\end{aligned}\quad (5.29)$$

Gemäß Definition 5.1 zeichnet sich ein (in diesem Fall skalarer) flacher Ausgang z dadurch aus, dass er alle Zustände $\mathbf{x}$ und die Stellgröße u parametrisiert. Dieser Zusammenhang ist direkt über die Regelungsnormalform (2.123) bzw. (3.17) gegeben. Durch Wahl von

$$z = \tilde{x}_1 = \mathbf{t}^T \mathbf{x}$$

und sukzessives Ableiten gilt

$$\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t}^T \\ \mathbf{t}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \mathbf{x} \quad (5.30)$$

sowie

$$z^{(n)} = \dot{\tilde{x}}_n = \mathbf{t}^T \mathbf{A}^n \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{t}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}}_{=1} u. \quad (5.31)$$

Offensichtlich lassen sich $\mathbf{x}$ und u aus den Gleichungen (5.30) und (5.31) berechnen. Somit stellt der erste Zustand der Integratorkette der Regelungsnormalform einen flachen Ausgang dar.

Satz 5.2 (Flacher Ausgang für lineare Systeme – Eingrößenfall) *Unter der Annahme, dass das lineare System (5.29) steuerbar ist, stellt*

$$z = \mathbf{t}^\top \mathbf{x} \quad (5.32)$$

einen flachen Ausgang von (5.29) dar, wobei $\mathbf{t}^\top$ gemäß (3.16) die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix (2.113) ist. Durch den flachen Ausgang z und seine Zeitableitungen

$$\tilde{\mathbf{x}} = [z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}]^\top \quad (5.33)$$

sowie $z^{(n)}$ lassen sich der Zustand $\mathbf{x}$, die Stellgröße u und der Ausgang y ausdrücken

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad u = z^{(n)} - \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^n \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad y = \mathbf{c}^\top \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.34)$$

wobei die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ durch (3.16) gegeben ist.

Auch im linearen Fall hat der flache Ausgang z häufig eine physikalische oder anschauliche Bedeutung, wie es im folgenden Beispiel zu sehen ist.

Beispiel 5.4 (Inverses Pendel) *Betrachtet wird das inverse Pendel in Abbildung 1.15 mit dem Zustandsvektor $\Delta \mathbf{x} = [\Delta \phi, \Delta \dot{\phi}, \Delta x_w, \Delta \dot{x}_w]^\top$ und dem Modell (1.74), das aus der Linearisierung um die obere Ruhelage $\mathbf{x}_R = [0, 0, x_{R,w}, 0]^\top$ hergeleitet wurde. In Beispiel 2.11 wurde bereits die inverse Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$, die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ und die Regelungsnormalform (2.131) angegeben. Mit der letzten Zeile $\mathbf{t}^\top$ von $\mathbf{Q}_S^{-1}$ in (2.129) lautet der flache Ausgang (5.32)*

$$z = -\frac{l^2(m+4M)}{9g} \Delta \phi - \frac{l(m+4M)}{6g} \Delta x_w. \quad (5.35)$$

Durch Multiplikation erhält man die neue Größe

$$\bar{z} = -\frac{6g}{l(m+4M)} z = \Delta x_w + \frac{2}{3} l \Delta \phi, \quad (5.36)$$

die ein Vielfaches von z ist und somit ebenfalls einen flachen Ausgang darstellt. Die Bedeutung von $\bar{z}$ lässt sich mit Hilfe von Abbildung 1.15 erklären: $\bar{z}$ beschreibt (für kleine Winkel ϕ) den Punkt auf dem Pendelarm, der auf $2/3$ der Pendellänge liegt.

Mehrgrößenfall: Für die Definition des flachen Ausgangs für lineare Mehrgrößensysteme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.37)$$

kann die Regelungsnormalform (3.41) im Mehrgrößenfall herangezogen werden. In Analogie zum Eingrößenfall stellen die ersten Zustände $\tilde{x}_{i,1}$, $i = 1, \dots, m$ der Integratorketten der Regelungsnormalform (3.41) den flachen Ausgang dar.

Satz 5.3 (Flacher Ausgang für lineare Systeme – Mehrgrößenfall) *Unter der Annahme, dass das lineare System (5.37) steuerbar ist, stellt*

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

einen flachen Ausgang von (5.29) dar, wobei $\mathbf{t}_i^\top$ gemäß (3.40) die $\sum_{j=1}^i \rho_j$ -te Zeile der inversen reduzierten Steuerbarkeitsmatrix (3.35) ist. Durch den flachen Ausgang $\mathbf{z}$ und seine Zeitableitungen

$$\tilde{\mathbf{x}} = [z_1, \dot{z}_1, \dots, z_1^{(\rho_1-1)}, \dots, z_m, \dot{z}_m, \dots, z_m^{(\rho_m-1)}]^\top$$

sowie $z_1^{(\rho_1)}, \dots, z_m^{(\rho_m)}$ lassen sich der Zustand $\mathbf{x}$, die Stellgröße $\mathbf{u}$ und der Ausgang $\mathbf{y}$ ausdrücken

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} z_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ z_m^{(\rho_m)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.38)$$

wobei die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ durch (3.39) gegeben ist.

Die Wahl des flachen Ausgangs ist vor allem im Mehrgrößenfall nicht eindeutig. Dies soll in der folgenden Aufgabe verdeutlicht werden.

Aufgabe 5.2 Für das System (3.36) wurden die Vektoren $\mathbf{t}_1^\top$ und $\mathbf{t}_2^\top$ in (3.47) berechnet. Somit ist ein flacher Ausgang durch $\mathbf{z}^\top = [z_1, z_2] = [x_2, x_3]$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

einen alternativen flachen Ausgang für das System (3.36) darstellt.

5.2.3 Flachheitsbasierte Vorsteuerung

In Abschnitt 5.2.1 wurde bereits erwähnt, dass sich die Flachheitseigenschaft besonders zum Entwurf einer Vorsteuerung im Rahmen der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (Abbildung 5.2) eignet. Als Steuerungsaufgabe wird der Übergang zwischen den stationären Punkten $\mathbf{x}_A^* \rightarrow \mathbf{x}_B^*$ in einem vorgegebenen Zeitintervall $[0, T]$ betrachtet, wobei $\mathbf{x}_A^*$ und $\mathbf{x}_B^*$ durch (5.17) definiert sind.

Eingrößenfall: Im Folgenden wird zunächst das System (5.29) mit einer skalaren Stellgröße bzw. einem skalaren Ausgang z betrachtet, für das sich die stationären Gleichungen (5.17) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_A^* + \mathbf{b} u_A^*, & y_A^* &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_A^* \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_B^* + \mathbf{b} u_B^*, & y_B^* &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_B^* \end{aligned} \quad (5.39)$$

ergeben. Zur Berechnung einer flachheitsbasierten Vorsteuerung gemäß (5.34) bedeutet dies zunächst die Planung einer n -mal stetig differenzierbaren Solltrajektorie $z^*(t) \in \mathcal{C}^n$, $t \in [0, T]$ mit den $2(n+1)$ Randbedingungen

$$\begin{aligned} z^*(0) &= z_A^* = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}_A^*, & z^{*(i)}(0) &= 0, & i &= 1, \dots, n \\ z^*(T) &= z_B^* = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}_B^*, & z^{*(i)}(T) &= 0, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Die geeignete Konstruktion von $z^*(t)$ mittels eines polynomialen Ansatzes wird in Abschnitt 5.2.4 gezeigt. Wenn man nun $z^*(t)$ in die Flachheitsparametrierungen (5.34) einsetzt, so ergeben sich die Solltrajektorien

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(t) &= \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}}^*(t) = [z^*(t), \dots, z^{*(n-1)}(t)]^\top \\ u^*(t) &= z^{*(n)} - \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^n \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \\ y^*(t) &= \mathbf{c}^\top \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Da für die flache Solltrajektorie an den Rändern $t = 0$ und $t = T$ Stetigkeit bis zur n -ten Ableitung $z^{*(n)}(t)$ gefordert wird, ergibt sich eine stetige Steuertrajektorie $u^*(t) \in \mathcal{C}^0$.

Mehrgrößenfall: Bei der Betrachtung des linearen Systems (5.1) mit der vektorwertigen Stellgröße $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ definieren sich die stationären Punkte $\mathbf{x}_A^*$ und $\mathbf{x}_B^*$ durch (5.17) und ein flacher Ausgang $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^\top$ kann mit Hilfe von Satz 5.3 bestimmt werden. Analog zum Eingrößenfall können nun ρ_i -mal stetig differenzierbare Solltrajektorien $z_i^*(t) \in \mathcal{C}^{\rho_i}$, $t \in [0, T]$ geplant werden, die die Randbedingungen

$$\begin{aligned} z_i^*(0) &= z_{A,i}^* = \mathbf{t}_i^\top \mathbf{x}_A^*, & z_i^{*(j)}(0) &= 0, & j &= 1, \dots, \rho_i \\ z_i^*(T) &= z_{B,i}^* = \mathbf{t}_i^\top \mathbf{x}_B^*, & z_i^{*(j)}(T) &= 0, & i &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.42)$$

erfüllen. Mit den flachen Solltrajektorien $z_i^*(t)$, $t \in [0, T]$ ergeben sich $\mathbf{x}^*(t)$ sowie die Steuerung $\mathbf{u}^*(t)$ aus der Parametrierung (5.38)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(t) &= \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}}^*(t) = [z_1^*(t), \dots, z_1^{*(\rho_1-1)}(t), \dots, z_m^{*(\rho_m-1)}(t)]^\top \\ \mathbf{u}^*(t) &= \begin{bmatrix} z_1^{*(\rho_1)}(t) \\ \vdots \\ z_m^{*(\rho_m)}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \\ y^*(t) &= \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t), \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (5.43)$$

Aus der Forderung, dass die flachen Solltrajektorien bis zur ρ_i -ten Ableitung $z_i^{*(\rho-i)}(t)$ an den Rändern $t = 0$ und $t = T$ stetig sein sollen, lässt sich schließen, dass die Steuertrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ bei $t = 0$ und $t = T$ ebenfalls stetig ist.

5.2.4 Polynomiale Solltrajektorien

Eine gebräuchliche Methode zur Konstruktion von Solltrajektorien, die stationäre Randbedingungen der Form (5.40) bzw. (5.42) miteinander verbinden, sind polynomiale Ansätze. Dazu wird der Einfachheit halber der Fall eines skalaren flachen Ausgangs z betrachtet.

n	p_{n+1}	p_{n+2}	p_{n+3}	p_{n+4}	p_{n+5}	p_{n+6}	p_{n+7}	p_{n+8}
1	3	-2						
2	10	-15	6					
3	35	-84	70	-20				
4	126	-420	540	-315	70			
5	462	-1980	3465	-3080	1386	-252		
6	1716	-9009	20020	-24024	16380	-6006	924	
7	6435	-40040	108108	-163800	150150	-83160	25740	-3432

Tabelle 5.1: Koeffizienten der polynomialen Solltrajektorie (5.44) für $n = 1, \dots, 7$.

Die Planung einer n -fach stetig differenzierbaren Solltrajektorie $z^*(t) \in \mathcal{C}^n, t \in [0, T]$, die die Randbedingungen (5.40) erfüllt, kann über das Polynom

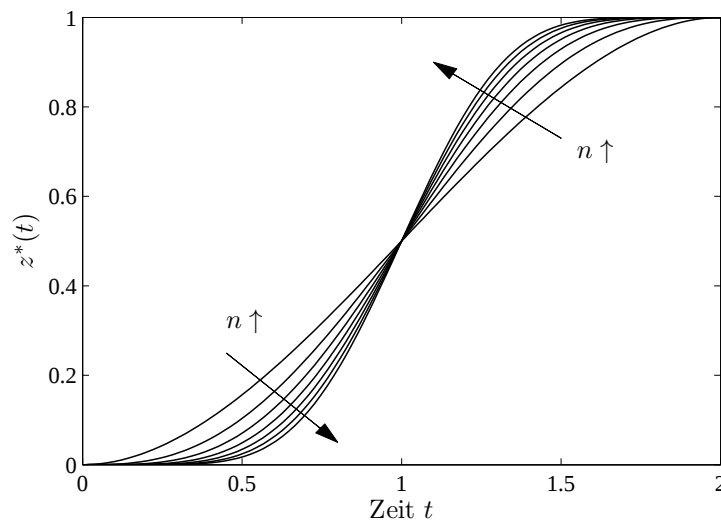
$$z^*(t) = z_A^* + (z_B^* - z_A^*) \sum_{i=n+1}^{2n+1} p_i \left(\frac{t}{T} \right)^i \quad (5.44)$$

erfolgen. Aus der speziellen Struktur von (5.44) ist erkennbar, dass die Randbedingungen an der Stelle $t = 0$ bereits erfüllt sind. Die $n + 1$ verbleibenden Parameter $p_i, i = n + 1, \dots, 2n + 1$ müssen nun so bestimmt werden, dass $z^*(t)$ die verbleibenden $n + 1$ Randbedingungen (5.40) an der Stelle $t = T$ erfüllt. Dies resultiert in einem Gleichungssystem für die Koeffizienten p_i mit der Lösung

$$p_i = \frac{(-1)^{i-n-1}(2n+1)!}{i n! (i-n-1)! (2n+1-i)!}, \quad i = n+1, \dots, 2n+1. \quad (5.45)$$

In Tabelle 5.1 sind die Koeffizienten p_i für die Differenzierbarkeitsordnungen $n = 1, \dots, 7$ aufgelistet. Die daraus resultierenden Trajektorien (5.44) sind in Abbildung 5.4 dargestellt.

Im Mehrgrößenfall kann (5.44) zur Planung der einzelnen Trajektorien $z_i^*(t) \in \mathcal{C}^{\rho_i}$ des flachen Ausgangs $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^T$ verwendet werden, indem die Differenzierbarkeitsordnung n im Polynomansatz (5.44) durch ρ_i ersetzt wird.

Abbildung 5.4: Polynomiale Solltrajektorie (5.44) für $n \in \{1, \dots, 7\}$.

Beispiel 5.5 (Simulationsbeispiel) Für das inverse Pendel in Abbildung 1.15 sollen eine Vorsteuerung und Solltrajektorien berechnet werden, um das Pendel in $T = 2.5$ s um 1 m zu versetzen. Mit dem Zustand $\Delta \mathbf{x} = [\Delta \phi, \Delta \dot{\phi}, \Delta x_w, \Delta \dot{x}_w]^\top$ lauten die stationären Punkte

$$\Delta \mathbf{x}_A^* = [0, 0, 0, 0]^\top, \quad \Delta \mathbf{x}_B^* = [0, 0, 1 \text{ m}, 0]^\top. \quad (5.46)$$

bzw. für den flachen Ausgang (5.35) gilt

$$\mathbf{z}_A^* = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}_A^*, \quad \mathbf{z}_B^* = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}_B^*. \quad (5.47)$$

Die Solltrajektorie $\mathbf{z}^*(t) \in \mathcal{C}^n$ muss ($n = 4$)-mal stetig differenzierbar sein und folgt aus (5.44) und den entsprechenden Koeffizienten aus Tabelle 5.1 mit der Übergangszeit $T = 2.5$ s. Mit den Parametern $l = 1$ m, $m = 1$ kg, $M = 1$ kg und $g = 9.81$ m/s² und der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ in (2.130) können die Solltrajektorien $\mathbf{x}^*(t)$ für die Zustände aus (5.41) berechnet werden

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \phi^*(t) \\ \Delta \dot{\phi}^*(t) \\ \Delta x_w^*(t) \\ \Delta \dot{x}_w^*(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^*(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2 \\ -11.772 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & -11.772 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} z^*(t) \\ \dot{z}^*(t) \\ \ddot{z}^*(t) \\ z^{*(3)}(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}^*(t)}, \quad t \in [0, T], \quad (5.48)$$

während sich die Steuerung zu

$$u^*(t) = z^{*(4)}(t) - \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^4 \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} z^*(t) \\ \vdots \\ z^{*(3)}(t) \end{bmatrix} = z^{*(4)}(t) - 23.544 \ddot{z}^*(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.49)$$

ergibt. Abbildung 5.5 stellt die Solltrajektorien und die Vorsteuerung $u^*(t)$ für das seitliche Versetzen des inversen Pendels dar, die gemäß den obigen Beziehungen mit Hilfe von

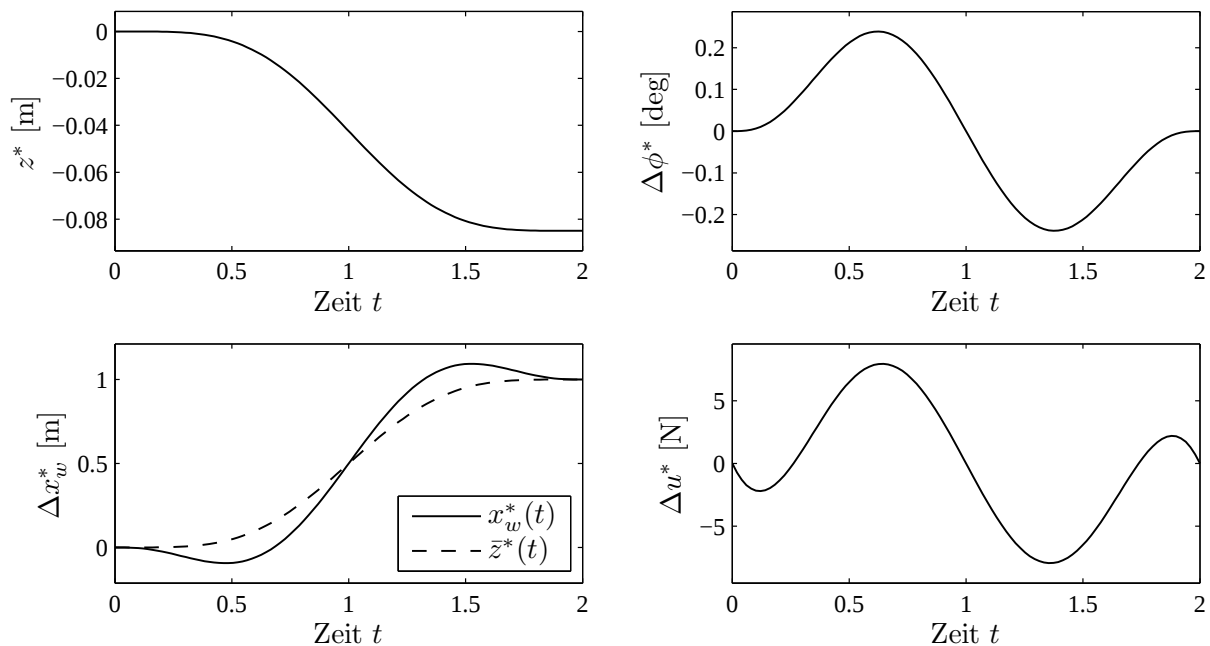


Abbildung 5.5: Flachheitsbasierte Solltrajektorien für das seitliche Versetzen des inversen Pendels um 1 m in $T = 2.5$ s (Beispiel 5.5).

MATLAB berechnet wurden. Zusätzlich ist die Trajektorie des normierten flachen Ausgangs (5.36)

$$\begin{aligned}\bar{z}^*(t) &= -\frac{6g}{l(m+4M)} z^*(t) = \Delta x_w^*(t) + \frac{2}{3}l \Delta \phi^*(t) \\ &= \Delta x_w^*(t) + 0.667 \Delta \phi^*(t), \quad t \in [0, T]\end{aligned}$$

dargestellt, der für $\phi \ll 1$, d.h. $\sin \phi \approx \phi$, den Punkt

$$P_{\frac{2}{3}l} = \left[x_w + \frac{2}{3}l \sin \phi, \frac{2}{3}l \cos \phi \right]^T$$

des Pendels auf der Höhe $\frac{2}{3}l$ beschreibt. In den Momentaufnahmen in Abbildung 5.6 ist $P_{\frac{2}{3}l}$ ebenfalls dargestellt, um den flachen Ausgang z bzw. $\bar{z}$ zu illustrieren.

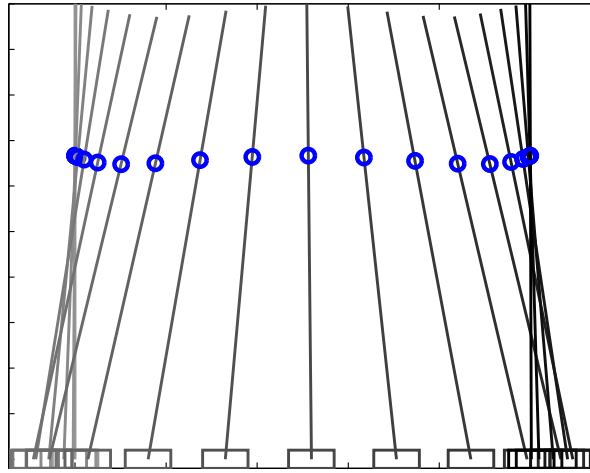


Abbildung 5.6: Momentaufnahmen des inversen Pendels mit Darstellung des Punktes $P_{\frac{2}{3}l}$ zur Veranschaulichung des flachen Ausgangs (Beispiel 5.5).

5.2.5 Stabilisierende Regelung um die Trajektorie

In der Zwei-Freiheitsgrade-Regelkreisstruktur (Abbildung 5.2) wird die Regelung zur Stabilisierung und Robustifizierung des Systems um die Solltrajektorie $\mathbf{x}^*(t)$ verwendet. Das geregelte System in Abbildung 5.2 sowie die Vorsteuertrajektorien $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ erfüllen die Systemgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{u}^*(t) - \mathbf{K}\mathbf{e}_x(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t).\end{aligned}\tag{5.50}$$

mit dem Zustandsfolgefehler $\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$. Wenn man nun die Beziehungen (5.50) voneinander abzieht, erhält man das *Zustandsfehlersystem*

$$\dot{\mathbf{e}}_x(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e}_x(t), \quad \mathbf{e}_x(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*(0).\tag{5.51}$$

Die Reglermatrix $\mathbf{K}$ kann also mit den in Kapitel 3 beschriebenen Verfahren entworfen werden, um das Fehlersystem (5.51) asymptotisch zu stabilisieren. Im Falle von Störungen kann alternativ ein PI-Zustandsregler gemäß Abschnitt 3.6.2 entworfen werden.

Beispiel 5.6 (Simulationsbeispiel) *Im Sinne der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung soll die Vorsteuerung für das inverse Pendel (Beispiel 5.5) durch einen Regler unterstützt werden. In Beispiel 3.8 wurde bereits ein LQR-Regler mit der Reglerverstärkung (3.119)*

$$\mathbf{k}^T = [-64.21 \quad -15.01 \quad -3.16 \quad -6.22]$$

entworfen, so dass die Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ im geschlossenen Kreis asymptotisch stabil ist. Für die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung in Abbildung 5.2 ergibt sich somit das Regelgesetz

$$\Delta u_R(t) = \mathbf{k}^T (\Delta \mathbf{x}^*(t) - \Delta \mathbf{x}(t)).$$

5.3 Literatur

- [1] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61:1327–1361, 1995.
- [2] K. Graichen, V. Hagenmeyer und M. Zeitz. A new approach to inversion-based feed-forward control design for nonlinear systems. *Automatica*, 41:2033–2041, 2005.
- [3] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 1995.
- [4] A. Piazzzi und A. Visioli. Optimal noncausal set-point regulation of scalar systems. *Automatica*, 37:121–127, 2001.
- [5] R. Rothfuß. *Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Fortschrittberichte Nr. 8/664, 1997. http://elib.uni-stuttgart.de/opus/frontdoor.php?source_opus=3335&la=de.
- [6] R. Rothfuß, J. Rudolph und M. Zeitz. Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. *at-Automatisierungstechnik*, 45(11):517–525, 1997.
- [7] H. Sira-Ramírez und S.K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker Inc., New York, 2004.
- [8] M. Zeitz. Differenzielle Flachheit: Eine nützliche Methodik auch für lineare SISO-systeme. *at-Automatisierungstechnik*, 58(1):5–13, 2010.