



SYSTEMTHEORIE

Theorie linearer Regelsysteme

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr.-Ing. Knut Graichen

Danksagung

Ein Teil dieses Skriptes orientiert sich am Skriptum “Automatisierungstechnik” von Herrn Univ.-Prof. Dr.techn. Andreas Kugi vom Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien, für dessen freundliche Genehmigung herzlich gedankt sei.

Inhaltsverzeichnis

1	Dynamische Systeme	1
1.1	Der Systembegriff	1
1.2	Physikalische Beispiele	3
1.2.1	Elektrisches System	4
1.2.2	Mechanisches System	6
1.2.3	Hydraulisches System	8
1.2.4	Biologisches System	9
1.3	Linearität und Zeitinvarianz	10
1.4	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	12
1.5	Linearisierung nichtlinearer Systeme	14
1.5.1	Begriff der Ruhelage	15
1.5.2	Linearisierung um eine Ruhelage	16
1.5.3	Linearisierung um eine Trajektorie	20
2	Beschreibung und Eigenschaften linearer Systeme	23
2.1	Beschreibung im Zustandsraum	23
2.1.1	Transitionsmatrix	23
2.1.2	Sprung- und Impulsantwort	26
2.2	Zustandstransformation	27
2.2.1	Transformation auf Diagonalform	28
2.2.2	Nichtdiagonalähnliche Systemmatrizen	31
2.2.3	Behandlung konjugiert komplexer Eigenwerte	32
2.2.4	Reelle Jordansche Normalform	33
2.3	Stabilität linearer Systeme	35
2.3.1	Bedeutung der Eigenvektoren	35
2.3.2	Asymptotische Stabilität	37
2.4	Eingangs-/Ausgangsverhalten	40
2.4.1	Übertragungsfunktion und Übertragungsmatrix	40
2.4.2	Realisierungsproblem	43
2.4.3	BIBO-Stabilität	47
2.4.4	Interpretation der Nullstellen	48

2.5	Steuerbarkeit	51
2.5.1	Steuerbarkeit nach KALMAN	51
2.5.2	Steuerbarkeit nach HAUTUS	54
2.5.3	Regelungsnormalform	54
2.6	Beobachtbarkeit	57
2.6.1	Beobachtbarkeit nach KALMAN	57
2.6.2	Beobachtbarkeit nach HAUTUS	60
2.6.3	Beobachtungsnormalform	61
2.7	Dualitätsprinzip	62
3	Zustandsregler	64
3.1	Stationäres Vorfilter	65
3.2	Direkte Eigenwertvorgabe im Eingrößenfall	66
3.3	Reglerentwurf in Regelungsnormalform	68
3.3.1	Ackermann-Formel (Eingrößenfall)	68
3.3.2	Steuerbarkeitsindizes im Mehrgrößenfall	71
3.3.3	Regelungsnormalform im Mehrgrößenfall	73
3.3.4	Entkopplung und Eigenwertvorgabe	75
3.4	Reglerentwurf durch Ein-/Ausgangsentkopplung	79
3.4.1	Relativer Grad	79
3.4.2	Ein-/Ausgangsnormalform	81
3.4.3	Entkopplung und Eigenwertvorgabe	82
3.4.4	Interpretation der Nulldynamik	86
3.5	Optimale Regelung (LQR-Problem)	87
3.5.1	Einführung in die dynamische Programmierung	89
3.5.2	RICCATI-Differenzialgleichung	91
3.5.3	Algebraische RICCATI-Gleichung	92
3.5.4	Vergleich zwischen Eigenwertvorgabe und LQR-Entwurf	95
3.6	Behandlung von Störgrößen	96
3.6.1	Störgrößenaufschaltung	97
3.6.2	PI-Zustandsregler	98
4	Beobachterentwurf	101
4.1	Trivialer Beobachter (Simulator)	101
4.2	Vollständiger Luenberger-Beobachter	102
4.3	Separationsprinzip	105
4.4	Behandlung von Störgrößen – Störbeobachter	107
4.5	Reduzierter Beobachter	109

5	Folgeregelung	112
5.1	Folgeregelung für den Ausgang	113
5.1.1	Fehlerdynamik und Regelgesetz	113
5.1.2	Folgeregelung mit Integralanteil	115
5.2	Zwei-Freiheitsgrade-Regelung	116
5.2.1	Definition des flachen Ausgangs	117
5.2.2	Flacher Ausgang bei linearen Systemen	119
5.2.3	Flachheitsbasierte Vorsteuerung	121
5.2.4	Polynomiale Solltrajektorien	122
5.2.5	Stabilisierende Regelung um die Trajektorie	125

Kapitel 1

Dynamische Systeme

1.1 Der Systembegriff

Der Begriff eines *Systems* wird in den verschiedensten wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Bereichen verwendet, wobei dessen Bedeutung oft nicht klar definiert ist. Einfach formuliert ist *ein System die Verbindung unterschiedlicher Komponenten, die miteinander in Interaktion stehen*, zu einem Ganzen zum Zwecke der Durchführung bestimmter Aufgaben. Die Wechselwirkung eines Systems mit der Systemumgebung erfolgt über die so genannten *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen*, siehe Abbildung 1.1.

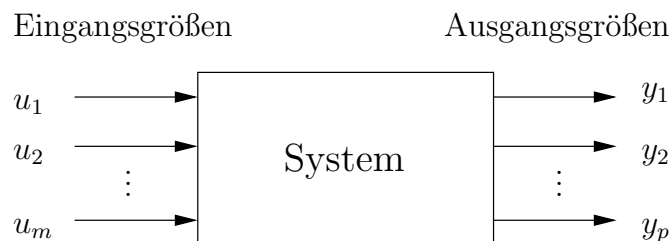


Abbildung 1.1: Systemdarstellung mit Ein- und Ausgangsgrößen.

Die Eingangsgrößen $u_1, u_2, \dots, u_m$ sind dabei Größen, die von der Systemumgebung auf das System einwirken und nicht vom Verhalten des Systems selbst beeinflusst werden. Man unterscheidet dabei zwischen Eingangsgrößen, mit denen man das System gezielt (regelungstechnisch) beeinflussen kann (*Stellgrößen*) und Eingangsgrößen, die nicht unserer Kontrolle unterliegen (*Störgrößen*). Die Ausgangsgrößen $y_1, y_2, \dots, y_p$ sind Größen, die vom System generiert werden und ihrerseits die Systemumgebung beeinflussen. Ausgangsgrößen, die messtechnisch erfassbar sind, nennt man auch *Messgrößen*.

Im Folgenden betrachte man die zwei einfachen elektrischen Systeme von Abbildung 1.2, nämlich einen Widerstand und einen idealen Kondensator, mit der Eingangsgröße $i(t)$ (Strom), der Ausgangsgröße $u(t)$ (Spannung) und der Zeit t .

Beim Widerstand R ist die Ausgangsgröße zu jedem Zeitpunkt t eindeutig durch die

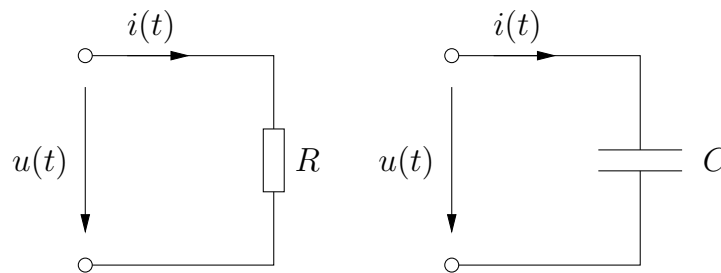


Abbildung 1.2: Beispiel zu statischen und dynamischen Systemen.

Eingangsgröße zum Zeitpunkt t bestimmt, es gilt nämlich

$$u(t) = R i(t). \quad (1.1)$$

Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen lediglich vom Augenblickswert der Eingangsgrößen abhängen, werden als *statische Systeme* bezeichnet.

Im Gegensatz dazu muss zur Berechnung der Spannung $u(t)$ des Kondensators C zum Zeitpunkt t der Eingangsstrom $i(\tau)$ für die gesamte Vergangenheit $\tau \leq t$ bekannt sein, da gilt

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau}_{u(t_0) = u_0} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Kennt man die Eingangsgröße $i(\tau)$ lediglich für das Zeitintervall $t_0 \leq \tau \leq t$, dann muss zusätzlich die Spannung des Kondensators zum Zeitpunkt t_0 als Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$ bekannt sein. Wie man aus (1.2) erkennt, beinhaltet die Anfangsbedingung die gesamte Information über die Vergangenheit $\tau < t_0$. Man sagt auch, $u(t_0)$ beschreibt den internen *Zustand* des Systems (Kondensator) zum Zeitpunkt t_0 . Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen nicht nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen sondern auch von deren Vergangenheit abhängen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet.

Wenn für ein System nach Abbildung 1.2, wie im Falle des Widerstandes und des Kondensators, die Werte der Ausgangsgrößen $y_1, y_2, \dots, y_p$ zum Zeitpunkt t ausschließlich vom Verlauf der Eingangsgrößen $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_m(\tau)$ für $\tau \leq t$ abhängen, dann nennt man das System *kausal*. Da alle technisch realisierbaren Systeme kausal sind, werden wir uns im Folgenden auf diesen Fall beschränken.

Die bisherigen Überlegungen erlauben uns nun die allgemeine Definition der Zustandsgrößen eines dynamischen Systems anzugeben:

Definition 1.1 (Zustand) *Existieren für ein dynamisches System Größen $x_1, \dots, x_n$ mit der Eigenschaft, dass die Ausgangsgrößen $y_1, y_2, \dots, y_p$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t eindeutig durch den Verlauf der Eingangsgrößen $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_m(\tau)$ auf dem Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ und den Werten von $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ für ein beliebiges t_0 festgelegt sind, dann heißen die Größen $x_1, \dots, x_n$ Zustandsgrößen des Systems.*

Dynamische Systeme, die sich durch eine endliche Anzahl n von Zustandsgrößen charakterisieren lassen, werden auch als *Systeme mit finitem Zustand der Ordnung n* bezeichnet.

Diese Systeme mit finitem Zustand, oft auch *konzentriert-parametrische Systeme* genannt, werden durch mathematische Modelle in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen beschrieben. Im Rahmen dieser Vorlesung schränken wir uns auf jene Systemklasse mit finitem Zustand ein, die eine Beschreibung durch ein *explizites mathematisches Modell* folgender Form erlaubt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}x_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad , \quad x_1(t_0) = x_{1,0} \\
 \frac{d}{dt}x_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad , \quad x_2(t_0) = x_{2,0} \\
 &\vdots \\
 \frac{d}{dt}x_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad , \quad x_n(t_0) = x_{n,0}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Zustandsdgl. mit Anfangsbedingung

$$\begin{aligned}
 y_1 &= h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\
 y_2 &= h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\
 &\vdots \\
 y_p &= h_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)
 \end{aligned}$$

Ausgangsgleichung

Fasst man die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen zu Spaltenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

zusammen und schreibt zur Vereinfachung der Notation an Stelle von $\frac{d}{dt}$ einen Punkt über die abzuleitende Größe, dann lässt sich (1.3) in kompakter Vektorschreibweise in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{1.6}$$

angeben. Die Größen $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}$ werden einfach als *Eingang*, *Ausgang* und *Zustand* des dynamischen Systems bezeichnet.

Wird der Zustand $\mathbf{x}$ als Element eines n -dimensionalen Vektorraumes betrachtet, dann nennt man diesen Vektorraum auch *Zustandsraum*. Der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt t kann dann als Punkt im n -dimensionalen Zustandsraum dargestellt werden. Die Kurve all dieser Punkte im Zustandsraum für veränderliche Zeit t in einem Zeitintervall wird auch als *Trajektorie* bezeichnet, siehe Abbildung 1.3 zur Veranschaulichung einer Trajektorie im 3-dimensionalen Zustandsraum.

1.2 Physikalische Beispiele

In den folgenden Abschnitten werden einige Beispiele aus verschiedenen physikalischen Bereichen betrachtet und ihre Modellierung als dynamische Systeme diskutiert.

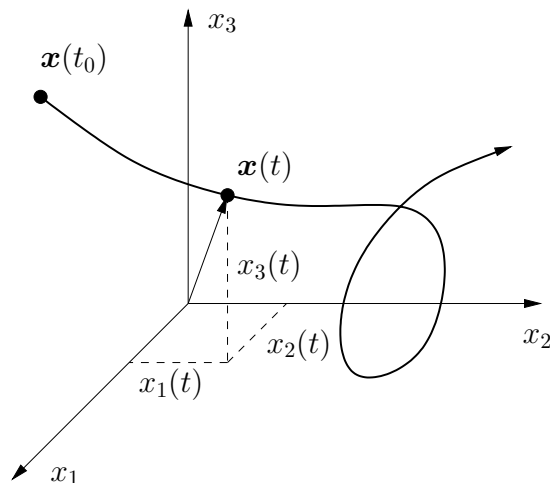


Abbildung 1.3: Veranschaulichung einer Trajektorie im Zustandsraum ($x \in \mathbb{R}^3$).

1.2.1 Elektrisches System

Abbildung 1.4 zeigt einen Serienschwingkreis mit der Eingangsspannung $u(t)$ und der Ausgangsspannung $y(t)$. Das mathematische Modell kann unmittelbar aus der Maschenregel (Kirchhoffsche Gesetze)

$$0 = -u(t) + u_C(t) + u_L(t) + y(t) \quad (1.7)$$

und den Bauelementgleichungen

$$\begin{aligned} \text{Kondensator } C: \quad & C \frac{d}{dt} u_C(t) = i(t) \quad \text{mit} \quad u_C(0) = u_{C,0} \\ \text{Induktivität } L: \quad & L \frac{d}{dt} i(t) = u_L(t) \quad \text{mit} \quad i(0) = i_0 \\ \text{Widerstand } R: \quad & R i(t) = y(t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

hergeleitet werden.

Wählt man als Zustandsgrößen den Strom $i(t)$ durch die Induktivität und die Spannung $u_C(t)$ am Kondensator, dann erhält man unmittelbar die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \quad (1.9)$$

und die Ausgangsgleichung

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Die Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen für $u(t) = 0$ unter den Anfangsbedingungen $u_C(0) = u_{C,0}$ bzw. $i(0) = i_0$ sind in der folgenden Tabelle fallabhängig dargestellt:

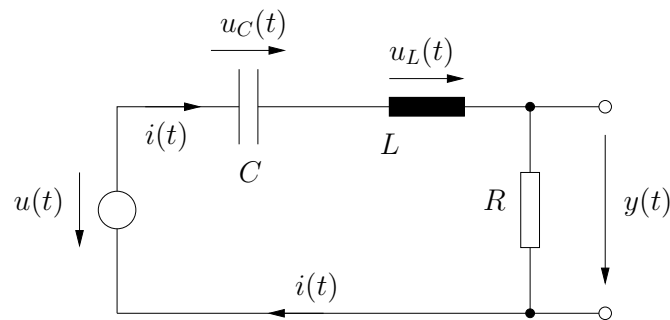


Abbildung 1.4: Serienschwingkreis.

Fall a) $\frac{1}{\sqrt{CL}} > \frac{R}{2L}$	$u_C(t) = \exp(-\tau t) \left(\left(\frac{\tau}{\omega} u_{C,0} + \frac{1}{\omega C} i_0 \right) \sin(\omega t) + u_{C,0} \cos(\omega t) \right)$ $i(t) = -\exp(-\tau t) \left(\left(\frac{\tau}{\omega} i_0 + \frac{1}{\omega L} u_{C,0} \right) \sin(\omega t) - i_0 \cos(\omega t) \right)$ (1.11)
Fall b) $\frac{1}{\sqrt{CL}} < \frac{R}{2L}$	$u_C(t) = \exp(-\tau t) \left(\left(\frac{\tau}{\omega} u_{C,0} + \frac{1}{\omega C} i_0 \right) \sinh(\omega t) + u_{C,0} \cosh(\omega t) \right)$ $i(t) = -\exp(-\tau t) \left(\left(\frac{\tau}{\omega} i_0 + \frac{1}{\omega L} u_{C,0} \right) \sinh(\omega t) - i_0 \cosh(\omega t) \right)$ (1.12)
Fall c) $\frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{R}{2L}$	$u_C(t) = \exp\left(-\frac{2}{RC}t\right) \left(\left(\frac{1}{C} i_0 + \frac{2}{RC} u_{C,0} \right) t + u_{C,0} \right)$ $i(t) = -\exp\left(-\frac{2}{RC}t\right) \left(\left(\frac{2}{RC} i_0 + \frac{4}{R^2 C} u_{C,0} \right) t - i_0 \right)$ (1.13)

wobei

$$\tau = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

gilt. Offensichtlich unterscheidet sich das Schwingverhalten in Abhängigkeit der Fälle a) bis c). In Abbildung 1.5 sind die Trajektorien für die Fälle a), b), c) mit den Parametern $L = C = 1$ und $R \in \{1, 2, 3\}$ sowie den Anfangsbedingungen $u_{C,0} = 2$, $i_0 = 1$ für das Zeitintervall $0 \leq t \leq 10$ dargestellt.

Aufgabe 1.1 Berechnen Sie zum elektrischen Kreis nach Abbildung 1.6 die Zustandsdgl. und die Ausgangsgleichung für $y = i_2$. Wählen Sie dazu geeignete Zustandsgrößen und verwenden Sie die Kirchhoffschen Gesetze.

Lösung: Wenn i_1 und u_C als Zustandsgrößen gewählt werden, ergibt sich

$$\text{Zustandsdgl.} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\text{Ausgangsgl.} \quad y(t) = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}$$

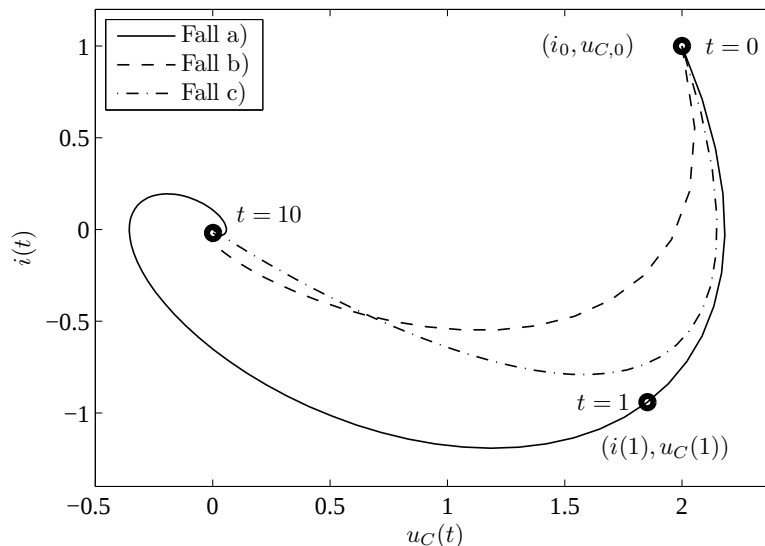


Abbildung 1.5: Trajektorien des Serienschwingkreises.

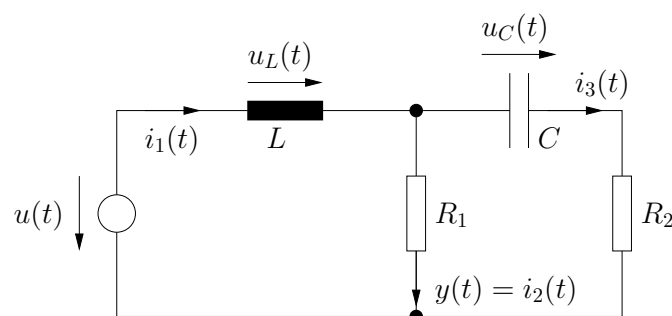


Abbildung 1.6: Elektrischer Kreis zu Aufgabe 1.1.

1.2.2 Mechanisches System

In Abbildung 1.7 ist ein einfaches Feder-Masse-Dämpfer-System mit einer auf die Masse m in x -Richtung wirkenden externen Kraft $F(t)$ dargestellt. Für die Rückstellkraft der Feder und die Dämpferkraft gelten die Beziehung

$$F_k(t) = kx(t) \quad , \quad F_d(t) = d \frac{d}{dt} x(t) \quad . \quad (1.14)$$

Damit erhält man das mathematische Modell unmittelbar aus dem Impulserhaltungssatz in x -Richtung zu

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -kx(t) - d \frac{d}{dt} x(t) + F(t) \quad . \quad (1.15)$$

Wählt man als Eingangsgröße des Systems die Kraft $F(t)$ und als Zustandsgrößen die Position $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ der Masse m , so lauten die zugehörigen Zustandsdifferentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \quad . \quad (1.16)$$

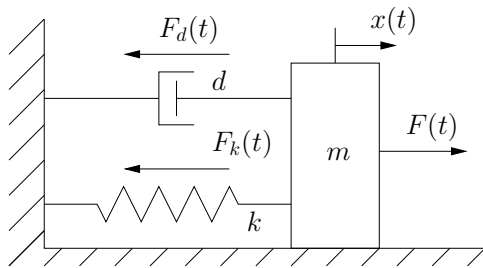


Abbildung 1.7: Feder–Masse–Dämpfer–System.

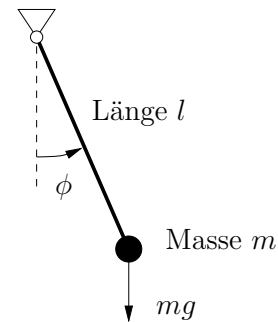


Abbildung 1.8: Einfachpendel.

Vergleicht man das mathematische Modell (1.16) mit jenem des elektrischen Serienschwingkreises (1.9), so erkennt man, dass diese die gleiche Struktur besitzen. Die zum mechanischen System analogen Größen im Serienschwingkreis lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Mechanische Größe:	$\Longleftrightarrow$	Elektrische Größe:
Weg: $x(t)$		Ladung: $q_C(t) = C u_C(t)$
Geschwindigkeit: $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$		Strom: $i_C(t) = \frac{d}{dt}q_C(t) = C \frac{d}{dt}u_C(t)$
Kraft: $F(t)$		Eingangsspannung: $u(t)$
Masse: m		Spule (Induktivität): L
Federkonstante: k		Kondensator (1/Kapazität): $1/C$
Dämpfungskonstante: d		Widerstand: R

Aufgabe 1.2 Zeigen Sie mit Hilfe obiger Tabelle, dass man durch Ersetzen der mechanischen Größen durch die äquivalenten elektrischen Größen in (1.16) unmittelbar (1.9) erhält. Bestimmen Sie die Lösung der Zustandsdifferentialgleichung (1.16) für $F(t) = 0$ und die Anfangswerte $x(0) = x_0$ sowie $v(0) = v_0$ mit Hilfe von (1.11)–(1.13).

Als weiteres mechanisches Beispiel wird das mathematische Einfachpendel mit der Stablänge l und der Punktmasse m in Abbildung 1.8 betrachtet. Als Ausgangsgröße dient die horizontale Auslenkung der Masse. Da die Punktmasse m kein Trägheitsmoment besitzt und der Stab der Länge l als masselos angenommen wird (deswegen “mathematisches” Pendel), reduziert sich das Trägheitsmoment des Pendels um den Aufhängepunkt auf den Steinerschen Anteil

$$J = ml^2.$$

Die angreifende Gewichtskraft mg bewirkt das rückstellende Moment

$$M = -mgl \sin \phi$$

in Abhängigkeit des Pendelwinkels ϕ . Das dynamische Modell des Pendels ergibt sich mit Hilfe des Drallsatzes $J\dot{\omega} = M$ und der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\phi}$ zu

$$\begin{aligned} \text{Zustandsdgl.} \quad & \frac{d}{dt}\phi = \omega \\ & \frac{d}{dt}\omega = -\frac{g}{l}\sin\phi. \\ \text{Ausgangsgleichung} \quad & y = l\sin\phi. \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.2.3 Hydraulisches System

Ein Speiserohr fördert einen Volumenstrom q in einen Behälter, dessen Pegelhöhe mit h_1 bezeichnet wird. Aus diesem Behälter fließt durch ein Abflussrohr der Volumenstrom q_1 in einen zweiten Behälter mit der Pegelhöhe h_2 , aus dem wieder ein Abfluss q_2 strömt (siehe Abbildung 1.9).

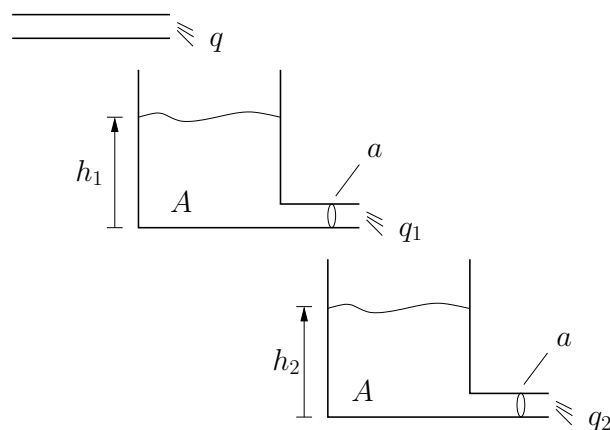


Abbildung 1.9: Zwei-Tank-System.

Die Eingangsgröße des Systems ist der Volumenstrom q und als Ausgangsgröße wird der Abfluss aus dem zweiten Behälter q_2 gewählt. Einfachheitshalber sei angenommen, dass sämtliche Behälter die gleiche Querschnittsfläche A haben und die Querschnitte der Abflussrohre generell den gleichen Wert a aufweisen. Die Bilanzgleichungen für die beiden Behälter lauten dann

$$A\frac{d}{dt}h_1 = q - q_1, \quad A\frac{d}{dt}h_2 = q_1 - q_2. \tag{1.18}$$

Der Zusammenhang zwischen Pegelhöhe und Abfluss kann in guter Näherung durch die Ausflussformel von Torricelli

$$q_1 = a\sqrt{2gh_1}, \quad q_2 = a\sqrt{2gh_2}, \quad h_1, h_2 \geq 0 \tag{1.19}$$

berechnet werden, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Damit errechnen sich die Zustandsdifferentialgleichungen zu

$$\begin{aligned} A\frac{d}{dt}h_1 &= -a\sqrt{2g}\sqrt{h_1} + q & h_1 &\geq 0 \\ A\frac{d}{dt}h_2 &= a\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right) & h_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

und die Ausgangsgleichung ergibt sich in der Form

$$q_2 = a\sqrt{2gh_2} . \quad (1.21)$$

Aufgabe 1.3 Erweitern Sie das Zwei-Tank-System von Abbildung 1.9 zu einem Drei-Tank-System. Nehmen Sie dabei an, dass A_3 die Fläche und h_3 die Pegelhöhe des dritten Behälters ist und dass das Abflussrohr aus dem dritten Behälter eine Querschnittsfläche a_3 aufweist. Berechnen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen und die Ausgangsgleichung für den Abfluss q_3 aus dem dritten Behälter.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{Zustandsdgl.} \quad A \frac{d}{dt} h_1 &= -a\sqrt{2g}\sqrt{h_1} + q & h_1 &\geq 0 \\ A \frac{d}{dt} h_2 &= a\sqrt{2g} \left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \right) & h_2 &\geq 0 \\ A_3 \frac{d}{dt} h_3 &= \sqrt{2g} \left(a\sqrt{h_2} - a_3\sqrt{h_3} \right) & h_3 &\geq 0 \\ \text{Ausgangsgl.} \quad q_3 &= a_3\sqrt{2gh_3} \end{aligned}$$

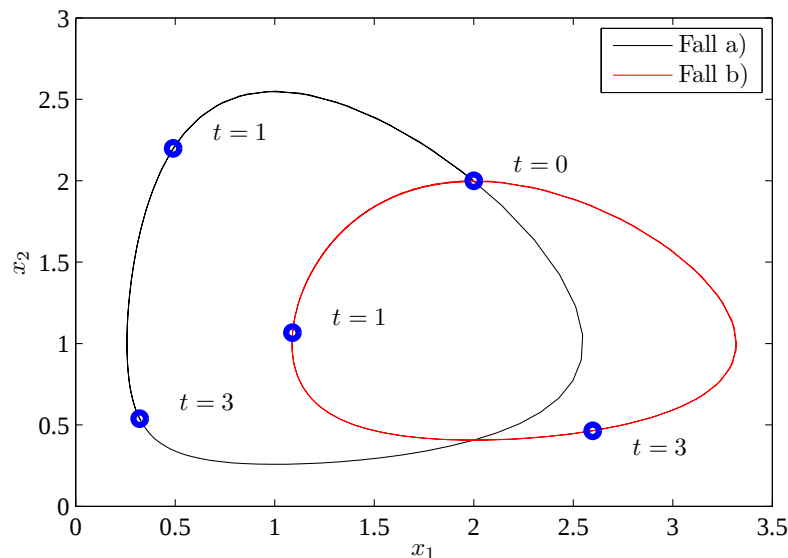
1.2.4 Biologisches System

Betrachtet man die Räuber-Beute-Beziehung zweier Populationen, so kann die dynamische Populationsentwicklung mit Hilfe der Lotka–Volterra–Differentialgleichungen beschrieben werden. Bezeichnet man nun die Anzahl der Beutetiere mit x_1 und die der Räuber mit x_2 , dann lautet das zugehörige mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1 &= ax_1 - bx_1x_2, & x_1(0) &= x_{1,0} \\ \frac{d}{dt} x_2 &= -cx_2 + dx_1x_2, & x_2(0) &= x_{2,0}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Das mathematische Modell beruht dabei auf der Annahme, dass die Anzahl der Beutetiere exponentiell mit der Wachstumsrate $a > 0$ zunimmt, wenn keine Räuber vorhanden sind. Umgekehrt nimmt man an, dass bei Nicht-Vorhandensein von Beutetieren die Anzahl der Räuber exponentiell mit der Rate $c > 0$ abnimmt (Eigenkonkurrenz). Für den Fall, dass beide Populationen vorhanden sind, setzt man die Anzahl der “feindlichen” Begegnungen proportional dem Produkt der beiden Populationen an. Dabei liegt dem Modell der Ansatz zu Grunde, dass die Anzahl der Beutetiere mit den “feindlichen” Begegnungen dezimiert (Proportionalitätskonstante $b > 0$) und die Anzahl der Räuber erhöht (Proportionalitätskonstante $d > 0$) werden.

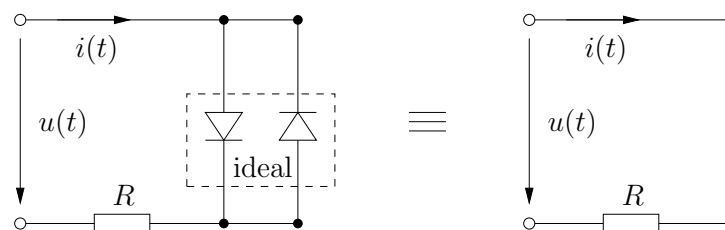
Abbildung 1.10 zeigt das Verhalten der Populationen in der (x_1, x_2) –Ebene für die spezielle Wahl $a = b = d = 1$ und $c = 1$ (Fall a) bzw. $c = 2$ (Fall b). Die Anfangsbedingungen in (1.22) sind $x_{1,0} = x_{2,0} = 2$. Wie man erkennt, weist das Räuber-Beute-Modell eine *geschlossene Trajektorie*, auch *Grenzzyklus* genannt, auf. Im Fall b) profitiert offensichtlich die Beutepopulation von der höheren Eigenkonkurrenzrate $c = 2$ der Räuber.



Abbildungung 1.10: Trajektorien des Räuber-Beute-Systems mit $x_{1,0} = x_{2,0} = 2$ sowie den Parametern $a = b = d = 1$ und $c = 1$ (Fall a) bzw. $c = 2$ (Fall b).

1.3 Linearität und Zeitinvarianz

Wie man sich an Hand des Beispiels von Abbildung 1.11 einfach überzeugen kann, ist es nicht möglich, die Linearität eines Systems in der Form zu beurteilen, dass man sagt “Ein System ist nichtlinear, wenn es ein nichtlineares Element beinhaltet.”



Abbildungung 1.11: Äquivalente Schaltungen.

Daher soll zunächst mathematisch korrekt klassifiziert werden, wann ein System der Form (siehe auch (1.5))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.23)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.24)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ linear ist. Dafür sei angenommen, dass $\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t)$ die Lösung der Differentialgleichung (1.23) zum Zeitpunkt t für den Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ und die Eingangsgröße $\mathbf{u}(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, bezeichnet.

Definition 1.2 (Linearität) Das System (1.23), (1.24) nennt man linear, wenn für alle (zulässigen) Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und jeden beliebigen Anfangszeitpunkt $t_0 \geq 0$ die

Ausgangsgröße $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{h}(\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t), \mathbf{u}(t), t)$ zu jedem Zeitpunkt $t \geq t_0$ die folgenden Bedingungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt:

$$\mathbf{y}(\alpha_1 \mathbf{x}_{0,1} + \alpha_2 \mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t) = \alpha_1 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{0}, t) + \alpha_2 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t) \quad (1.25)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{0}, \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2, t) = \beta_1 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, t) + \beta_2 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_2, t) \quad (1.26)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}, t) + \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t) \quad (1.27)$$

Dabei bezeichnet man die Eigenschaft (1.25) auch als das *Superpositionsprinzip* oder *Zerlegungseigenschaft* hinsichtlich der Anfangswerte (*Nulleingangslinearität*), (1.26) als das Superpositionsprinzip hinsichtlich der Eingangsgrößen (*Nullzustandslinearität*) und (1.27) als das Superpositionsprinzip hinsichtlich der Eingangsgrößen mit den Anfangswerten.

Aufgabe 1.4 Ist das System

$$\dot{x} = 2 + u, \quad y = x$$

mit dem Eingang u , dem Ausgang y und dem Zustand x linear? (**Lösung:** nein)

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 1.1 Das System (1.23), (1.24) ist genau dann linear, wenn es sich in die Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x} + \mathbf{D}(t) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.28)$$

überführen lässt.

Dabei bezeichnet die Matrix $\mathbf{A}(t)$ eine $(n \times n)$ -Matrix, $\mathbf{B}(t)$ eine $(n \times m)$ -Matrix, $\mathbf{C}(t)$ eine $(q \times n)$ -Matrix und $\mathbf{D}(t)$ eine $(p \times m)$ -Matrix, deren Einträge lediglich von der Zeit t abhängen dürfen.

Aufgabe 1.5 Sind die Systeme der Abschnitte 1.2.1–1.2.4 linear oder nichtlinear?

Eine weitere wichtige Eigenschaft dynamischer Systeme betrifft die *Zeitinvarianz*. Bevor dieser Begriff erläutert wird, sei festgehalten, dass mit $f(t - T)$, $T > 0$ im Folgenden die um die Zeit T nach rechts verschobene Zeitfunktion $f(t)$ gemeint ist, siehe dazu Abbildung 1.12.

Definition 1.3 (Zeitinvarianz) Man nennt das System (1.23)–(1.24) zeitinvariant, wenn für alle (zulässigen) Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und jeden beliebigen Anfangszeitpunkt $t_0 \geq 0$ nachfolgende Bedingung für alle $t \geq t_0$ erfüllt ist: Bezeichnet $\mathbf{y}(t)$ die Ausgangsgröße des Systems zum Zeitpunkt t für den Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ und die Eingangsgröße $\mathbf{u}(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, dann ist $\mathbf{y}(t - T)$ die Ausgangsgröße des Systems für den Anfangswert $\mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x}_0$ und die Eingangsgröße $\mathbf{u}(\tau - T)$, $t_0 + T \leq \tau \leq t + T$.

Aufgabe 1.6 Ist das System

$$\dot{x} = 2 + u, \quad y = x$$

mit dem Eingang u , dem Ausgang y und dem Zustand x zeitinvariant? (**Lösung:** ja)

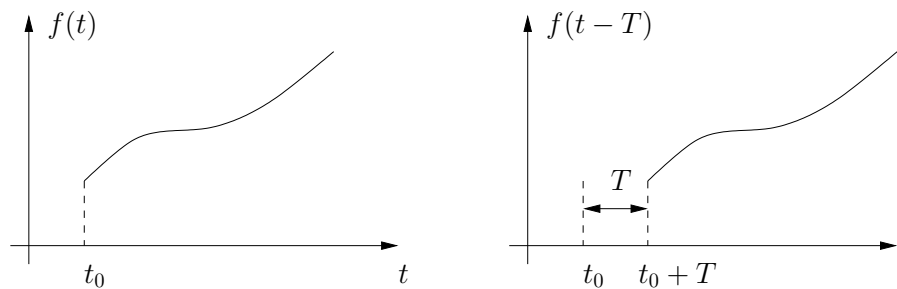


Abbildung 1.12: Zur Verschiebung einer Zeitfunktion.

Es gilt nun nachstehender Satz:

Satz 1.2 Das System (1.23), (1.24) ist genau dann linear und zeitinvariant, wenn es sich in die Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{1.29}$$

überführen lässt.

Aufgabe 1.7 Sind die Systeme der Abschnitte 1.2.1–1.2.4 zeitvariant oder zeitinvariant?

Aufgabe 1.8 Betrachten Sie ein Förderband. Die am Bandanfang pro Zeiteinheit aufgebrachte Materialmenge wird mit $u(t)$ bezeichnet, die am Ende pro Zeiteinheit abgeworfene mit $x(t)$. Für den Transportvorgang vom Bandanfang bis zum Bandende benötigt das Material die Zeit t_T (Totzeit). Das System lässt sich vereinfacht durch die Gleichung $x(t) = u(t - t_T)$ beschreiben. Ist das System linear und zeitinvariant? (**Lösung:** ja) Lässt es sich durch ein Modell der Form (1.23), (1.24) beschreiben? (**Lösung:** nein)

1.4 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wann die Lösung eines Differentialgleichungssystems überhaupt existiert und unter welchen Voraussetzungen diese Lösung eindeutig ist. Dazu sollen im ersten Schritt noch ein paar Begriffe eingeführt werden. Sind $\mathbf{f}$ und $\mathbf{h}$ in (1.23), (1.24) nicht explizit von der Zeit t abhängig, dann ist das System zeitinvariant. Ein *zeitinvariantes, nichtlineares* System hat also die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.30}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{1.31}$$

Wirken auf das System (1.23), (1.24) keine Eingangsgrößen $\mathbf{u}$ ein, oder ist der zeitliche Verlauf der Eingangsgrößen festgelegt, dann heißt das System *frei*. Ein *freies, nichtlineares* System kann man also in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.32}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \tag{1.33}$$

anschreiben. Ist das System (1.23), (1.24) frei und zeitinvariant, dann nennt man es *autonom*, und es hat die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.34)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) . \quad (1.35)$$

Im Folgenden betrachte man das freie, nichtlineare System (1.32). Ohne Beweis sei festgehalten, dass die Stetigkeit von $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ in den Argumenten $\mathbf{x}$ und t zwar die Existenz einer Lösung garantiert, aber diese keinesfalls eindeutig sein muss.

Beispiel 1.1 *Gegeben ist das System*

$$\dot{x} = x^{1/3} \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0 = 0 . \quad (1.36)$$

Man überzeugt sich leicht, dass $x^{1/3}$ zwar stetig ist, aber die Differentialgleichung (1.36) die folgenden zwei Lösungen zulässt:

$$x(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2} \quad \text{und} \quad x(t) = 0, \quad (1.37)$$

Der nachstehende Satz gibt nun eine hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (1.32) an:

Satz 1.3 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit) *Es sei $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ stückweise stetig in t und genüge der Abschätzung*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad 0 < L < \infty \quad (1.38)$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ und alle $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.39)$$

genau eine Lösung für $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ besitzt. Dabei wird (1.38) auch als Lipschitz-Bedingung und L als Lipschitz-Konstante bezeichnet.

Für das Beispiel (1.36) findet man in der Nähe von $x_0 = 0$ tatsächlich keine Lipschitz-Konstante L , für die gilt $|x^{1/3}| \leq L|x|$.

Wenn $\mathbf{x}(t)$ Lösung des Differentialgleichungssystems (1.32) ist, genau dann genügt diese auch der Integralgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau . \quad (1.40)$$

Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt für die *Methode der sukzessiven Approximation nach Picard*. Erfüllt nämlich $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ von (1.32) die Bedingungen von Satz 1.3, dann

konvergiert die nachstehende Folge von Funktionen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 \\
 \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(\tau), \tau) d\tau \\
 \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(\tau), \tau) d\tau \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}_k(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}(\tau), \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

gegen die eindeutige Lösung von (1.32), es gilt also

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t) . \tag{1.42}$$

Beispiel 1.2 Als Beispiel berechne man die Lösung des Systems

$$\dot{x} = ax \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad a \in \mathbb{R} \tag{1.43}$$

mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation nach Picard. Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Fall die Folge von Funktionen gemäß (1.41) wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned}
 x_0(t) &= x_0 \\
 x_1(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0 d\tau = x_0(1 + at) \\
 x_2(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0(1 + a\tau) d\tau = x_0 \left(1 + at + a^2 \frac{t^2}{2} \right) \\
 &\vdots \\
 x_k(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0 \left(1 + a\tau + \dots + a^{k-1} \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} \right) d\tau .
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Damit erhält man unmittelbar für $k \rightarrow \infty$ die bekannte Lösung

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^k}{k!} \right) = x_0 e^{at} . \tag{1.45}$$

Die Beschreibung der Lösung mit Hilfe der Picard-Iteration wird in Kapitel 2 wieder aufgegriffen werden, um die Lösung der Transitionsmatrix für lineare dynamische Systeme anzugeben.

1.5 Linearisierung nichtlinearer Systeme

Im Allgemeinen ist die gezielte Beeinflussung linearer, zeitinvarianter Systeme durch Regelung bzw. Steuerung wesentlich einfacher als die nichtlinearer Systeme. Falls jedoch nur kleine Auslenkungen des nichtlinearen Systems um eine *Ruhelage* bzw. einen *Arbeitspunkt* oder von einer *Solltrajektorie* betrachtet werden, kann das nichtlineare System sehr häufig durch ein lineares mathematisches Modell hinreichend gut angenähert werden.

1.5.1 Begriff der Ruhelage

In einem ersten Schritt betrachte man das freie, nichtlineare System nach (1.32)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) . \quad (1.46)$$

Definition 1.4 (*Ruhelage*) Man sagt $\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^n$ ist eine Ruhelage des Systems (1.46), wenn die folgende Bedingung für alle Zeiten $t \geq 0$ erfüllt ist:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, t) = \mathbf{0} \quad (1.47)$$

Wie man erkennt, hat die Ruhelage $\mathbf{x}_R$ die Eigenschaft, dass das System (1.46) für alle Zeiten $t \geq 0$ in dieser Ruhelage verharret, sofern man in der Ruhelage startet. Nichtlineare Systeme können eine beliebige Anzahl von Ruhelagen aufweisen.

Beispiel 1.3 Die folgenden drei Beispiele nichtlinearer Systeme besitzen eine unterschiedliche Anzahl an Ruhelagen:

- 1) $\dot{x} = (x-1)(x-2)(x-3) \quad \Rightarrow \quad x_{R,1} = 1, x_{R,2} = 2, x_{R,3} = 3$
- 2) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 e^{-x_1} \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \text{ und } x_1 \text{ ist beliebig}\}$
- 3) $\dot{x} = (x^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad \text{keine Ruhelage}$

Bei linearen, zeitinvarianten autonomen Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.48)$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und der $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ gibt es *entweder genau eine* Ruhelage, nämlich $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, oder *unendlich viele* Ruhelagen, wobei man die zwei Fälle wie folgt unterscheidet:

$\mathbf{A}$ ist regulär	$\det(\mathbf{A}) \neq 0$	$\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ist die einzige Ruhelage
$\mathbf{A}$ ist singulär	$\det(\mathbf{A}) = 0$	es gibt unendlich viele Ruhelagen

Aufgabe 1.9 Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des Räuber-Beute-Modells (1.22) in Abschnitt 1.2.4. (**Lösung:** $x_{1,R} = x_{2,R} = 0$ und $x_{1,R} = c/d$, $x_{2,R} = a/b$)

Aufgabe 1.10 Berechnen Sie die Ruhelage(n) des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} .$$

Lösung: $ba \neq 1: \quad \mathbf{x}_R = \mathbf{0}$
 $ba = 1: \quad \mathbf{x}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_{1,R} = -ax_{2,R} \text{ und } x_{2,R} \text{ ist beliebig}\}$

Im Falle von nichtlinearen Systemen (1.30) mit einem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ muss man zur Bestimmung der Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ für ein festgelegtes konstantes $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$ die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0} \quad (1.49)$$

bestimmen. In diesem Fall nennt man das Paar $(\mathbf{u}_R, \mathbf{x}_R)$ auch einen *Arbeitspunkt* des Systems (1.30). Bei linearen, zeitinvarianten Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1.50)$$

gelten zur Bestimmung der Ruhelagen für konstantes $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$ die folgenden Bedingungen:

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$	$\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_R$ einzige Ruhelage
$\det(\mathbf{A}) = 0$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}([\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R])$	es gibt unendlich viele Ruhelagen
$\det(\mathbf{A}) = 0$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) \neq \text{rang}([\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R])$	es gibt keine Ruhelage

Aufgabe 1.11 Wie lauten die Ruhelage(n) des linearen, zeitinvarianten Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u$$

mit den reellen Parametern a, b und der Eingangsgröße $u = u_R$.

Lösung: $b \neq -2a$: keine Ruhelage
 $b = -2a$: $\mathbf{x}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_{1,R} = -2x_{2,R} - au_R \text{ und } x_{2,R} \text{ ist beliebig}\}$

1.5.2 Linearisierung um eine Ruhelage

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden im Folgenden einige Abkürzungen vereinbart. Für die partielle Ableitung einer Funktion $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nach x_i an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ schreibt man einfach

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}_R) . \quad (1.51)$$

Die Ableitung der skalaren Funktion $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ ist der Zeilenvektor

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_R) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}_R) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(\mathbf{x}_R) \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x}_R) \right] \quad (1.52)$$

und die Ableitung einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ an einer Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$, also die *Jacobimatrix* von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ist durch

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}_R) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(\mathbf{x}_R) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\mathbf{x}_R) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(\mathbf{x}_R) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(\mathbf{x}_R) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(\mathbf{x}_R) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\mathbf{x}_R) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m(\mathbf{x}_R) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(\mathbf{x}_R) \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

gegeben.

Für die Linearisierung eines nichtlinearen Systems um eine Ruhelage oder Trajektorie wird noch nachstehender Satz benötigt:

Satz 1.4 (Taylorformel zweiter Ordnung) *Es sei angenommen, dass die vektorwertige Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ zweifach stetig differenzierbar ist und die Punkte $\mathbf{x}_R$ sowie $\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}$ mitsamt ihrer Verbindungsstrecke in $\mathcal{D}$ liegen. Dann ist*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) \Delta\mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x}) , \quad (1.54)$$

wobei für das Restglied $\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})$ eine Konstante K so existiert, dass folgende Abschätzung gilt:

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})\| \leq K \|\Delta\mathbf{x}\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\|\Delta\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})\|}{\|\Delta\mathbf{x}\|} = 0 . \quad (1.55)$$

Als Nächstes betrachte man das zeitinvariante, nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & \text{mit} & \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.56)$$

mit der Ruhelage (Arbeitspunkt) $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$, die definitionsgemäß die Gleichungen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_R = \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \quad (1.57)$$

erfüllt. Betrachtet man nun nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage, dann lassen sich die Größen $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ und $\mathbf{y}$ in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}(t) , \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}(t) , \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y}(t) \quad (1.58)$$

anschreiben, wobei Δ die jeweiligen Abweichungen von der Ruhelage symbolisieren.

Setzt man (1.58) in (1.56) ein, erhält man mit der abgekürzten Schreibweise

$$\begin{aligned} \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_R}_{=0} + \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}) & \text{mit} & \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.59)$$

bzw. durch Anwendung der Taylorformel zweiter Ordnung nach Satz 1.4 und Vernachlässigung der Restglieder ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \Delta\mathbf{x}}_{=A} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \Delta\mathbf{u}}_{=B} , \quad \Delta\mathbf{x}(t_0) = \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R \\ \mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{y}_R} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \Delta\mathbf{x}}_{=C} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \Delta\mathbf{u}}_{=D} . \end{aligned} \quad (1.60)$$

Zusammenfassend lässt sich folgender Satz formulieren:

Satz 1.5 (Linearisierung um eine Ruhelage) Es sei $\mathbf{x}_R, \mathbf{y}_R$ eine Ruhelage des Systems (1.56) für $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$. Die Änderung der Lösung $\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}$ bei hinreichend kleinen Abweichungen $\Delta \mathbf{u}$ von $\mathbf{u}_R$ und $\Delta \mathbf{x}_0$ von $\mathbf{x}_R$ wird durch das lineare, zeitinvariante System

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} & \text{mit} & \quad \Delta \mathbf{x}(t_0) = \Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.61)$$

mit

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), \quad \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), \quad \mathbf{C} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), \quad \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$$

beschrieben. Das System (1.61) wird auch als Linearisierung von (1.56) um die Ruhelage (Arbeitspunkt) $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ bezeichnet.

Beispiel 1.4 Als Beispiel betrachte man das mathematische Pendel von Abbildung 1.8 mit dem mathematischen Modell (1.17) in Zustandsdarstellung

$$\frac{d}{dt} \phi = \omega, \quad \frac{d}{dt} \omega = -\frac{g}{l} \sin \phi \quad (1.62)$$

und der horizontalen Position der Pendelspitze als Ausgangsgröße

$$y = l \sin \phi. \quad (1.63)$$

Die Ruhelagen errechnen sich zu $\phi_{R,1} = 0, \omega_{R,1} = 0$ (Pendel in der unteren Ruhelage) und $\phi_{R,2} = \pi, \omega_{R,2} = 0$ (Pendel in der oberen Ruhelage). Gemäß (1.61) erhält man für die Linearisierung um eine allgemeine Ruhelage ϕ_R, ω_R das linearisierte Modell in der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \phi_R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \omega \end{bmatrix}, \quad \Delta y = [l \cos \phi_R \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

Durch Einsetzen von $\phi_{R,1} = 0, \omega_{R,1} = 0$ in (1.64) ergibt sich das linearisierte Modell um die untere Ruhelage zu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \omega \end{bmatrix}, \quad \Delta y = [l \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

und analog erhält man für die obere Ruhelage $\phi_{R,2} = \pi, \omega_{R,2} = 0$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \omega \end{bmatrix}, \quad \Delta y = [-l \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

Man beachte, dass die oft übliche Näherung für kleine Winkel $\sin(\phi) \approx \phi$ und $\cos(\phi) \approx 1$ nur für Betrachtungen um die Ruhelage $\phi = 0$ gültig ist!

Aufgabe 1.12 Eine Erweiterung des mathematischen Pendels in Abbildung 1.8 ist das Pendel-Wagen-System in Abbildung 1.13 mit den Massen m und M von Wagen und

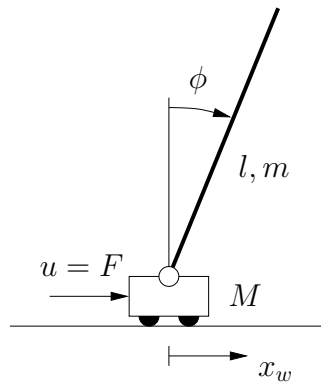


Abbildung 1.13: Wagen mit inversem Pendel.

Pendel, der Stablänge l und der angreifenden Kraft $u = F$. Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus kann das folgende nichtlineare dynamische Modell hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= \frac{6g(m+M)\sin(\phi) - 3\cos(\phi)(2u + lm\dot{\phi}^2\sin(\phi))}{l(m+4M+3m\sin^2(\phi))} \\ \ddot{x}_w &= \frac{8u + 4lm\dot{\phi}^2\sin(\phi) - 3mg\sin(2\phi)}{5m+8M-3m\cos(2\phi)}\end{aligned}\quad (1.67)$$

Bringen Sie das System auf die Zustandsraumdarstellung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ mit dem Zustand $\mathbf{x} = [\phi, \dot{\phi}, x_w, \dot{x}_w]^T$. Linearisieren Sie anschließend das System um die obere Ruhelage $\mathbf{x}_R = [0, 0, x_{R,w}, 0]^T$ mit $x_{R,w}$ konstant aber beliebig.

Lösung:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3mg}{m+4M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{l(m+4M)} \\ 0 \\ \frac{4}{m+4M} \end{bmatrix} \Delta u \quad (1.68)$$

Aufgabe 1.13 Berechnen Sie für das Zwei-Tank-System von Abbildung 1.9 die Ruhelage für einen stationären Zufluss q_R . Linearisieren Sie das System (1.20), (1.21) um diese Ruhelage.

Lösung: Ruhelage $h_{1,R} = h_{2,R} = \frac{q_R^2}{2ga^2}$ und Linearisierung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} = \frac{a^2 g}{A q_R} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \Delta q_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2 g}{q_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix}$$

1.5.3 Linearisierung um eine Trajektorie

Neben der Linearisierung um eine Ruhelage ist auch die Linearisierung um eine Trajektorie von Bedeutung. Dabei wird die Abweichung eines nichtlinearen Systems der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\quad (1.69)$$

von einer vorgegebenen Lösungskurve (Trajektorie) betrachtet. Sind für (1.69) die Bedingungen von Satz 1.3 erfüllt, dann weiß man, dass für eine vorgegebene Eingangsgröße $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ auf einem Intervall $0 \leq t \leq T$ und einen vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*$ die Lösung $\mathbf{x}^*(t)$ von (1.69) eindeutig festliegt. Es gelten also die Beziehungen

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0^* \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)). \quad (1.70)$$

Für hinreichend kleine Abweichungen der Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ und des Anfangswertes $\mathbf{x}_0$ von $\mathbf{u}^*(t)$ bzw. $\mathbf{x}_0^*$ stellen sich nur kleine Abweichungen der Lösung $\mathbf{x}(t)$ von $\mathbf{x}^*(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq T$ ein. Schreibt man $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \Delta\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) + \Delta\mathbf{y}(t) \quad (1.71)$$

und setzt dies in (1.69) ein, dann erhält man mit $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x}(t)$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x}^* + \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^*(t_0) + \Delta\mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}^* + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u})\end{aligned}\quad (1.72)$$

bzw. durch Anwendung der Taylorformel zweiter Ordnung nach Satz 1.4 und Vernachlässigung der Restglieder ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x}^* + \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}_{\frac{d}{dt}\mathbf{x}^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\Delta\mathbf{x}}_{\mathbf{A}(t)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\Delta\mathbf{u}}_{\mathbf{B}(t)}, \quad \Delta\mathbf{x}(t_0) = \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^* \\ \mathbf{y}^* + \Delta\mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}_{\mathbf{y}^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\Delta\mathbf{x}}_{\mathbf{C}(t)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\Delta\mathbf{u}}_{\mathbf{D}(t)}.\end{aligned}\quad (1.73)$$

Zusammenfassend lässt sich folgender Satz angeben:

Satz 1.6 (Linearisierung um eine Trajektorie) *Es sei $\mathbf{x}^*(t)$ eine Trajektorie des Systems (1.69) für eine vorgegebene Eingangsgröße $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ und einen vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*$. Die Änderung der Lösung $\Delta\mathbf{x}(t)$, $\Delta\mathbf{y}(t)$ bei hinreichend kleinen Abweichungen $\Delta\mathbf{u}(t)$ von $\mathbf{u}^*(t)$ und $\Delta\mathbf{x}_0$ von $\mathbf{x}_0^*$ wird durch das lineare, zeitvariante System*

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\Delta\mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{x}(t_0) = \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^* \\ \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\Delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad (1.74)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), & \mathbf{B}(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), \\ \mathbf{C}(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), & \mathbf{D}(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \end{aligned}$$

beschrieben. Das System (1.74) wird auch als Linearisierung von (1.69) um die Trajektorie $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ bezeichnet.

Man beachte, dass die Linearisierung eines *zeitinvarianten*, nichtlinearen Systems der Form (1.56) *um eine Solltrajektorie* im Allgemeinen ein *zeitvariantes*, lineares System ergibt!

Beispiel 1.5 Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \alpha \omega_2(t) \omega_3(t) + u_1(t), & \omega_1(0) &= \omega_{1,0} \\ \dot{\omega}_2(t) &= -\alpha \omega_1(t) \omega_3(t) + u_2(t), & \omega_2(0) &= \omega_{2,0} \\ \dot{\omega}_3(t) &= u_3(t), & \omega_3(0) &= \omega_{3,0} \end{aligned}$$

mit dem konstanten Parameter $\alpha > 0$. Für die Eingangsgrößen $u_1^*(t) = u_2^*(t) = u_3^*(t) = 0$ und die Anfangsbedingungen $\omega_{1,0} = \omega_{2,0} = \omega_{3,0} = 0$ ergibt sich die Trajektorie

$$\omega_1^*(t) = \omega_{2,0} \sin(\alpha \omega_{3,0} t), \quad \omega_2^*(t) = \omega_{2,0} \cos(\alpha \omega_{3,0} t), \quad \omega_3^*(t) = \omega_{3,0}.$$

Die Linearisierung gemäß (1.74) führt auf das lineare zeitvariante System

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\omega}_1 \\ \Delta \dot{\omega}_2 \\ \Delta \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \omega_3^*(t) & \alpha \omega_2^*(t) \\ -\alpha \omega_3^*(t) & 0 & -\alpha \omega_1^*(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \omega_1 \\ \Delta \omega_2 \\ \Delta \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix}.$$

Zu guter Letzt sei auf eine wichtige Anwendung hingewiesen, bei der sich die Linearisierung um eine Trajektorie als nützlich erweist. Im Rahmen der sogenannten *Zwei-Freiheitsgrade-Regelung* wird ein Regelkreis bestehend aus Strecke und Regelung durch eine *Vorsteuerung* ergänzt, siehe Abbildung 1.14. Der Vorteil dieses Ansatzes besteht in der separaten Auslegung des Störverhaltens durch die Regelung und des Führungsverhaltens durch die Vorsteuerung.

Die Vorsteuerung stellt eine Steuertrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ zur Verfügung, so dass das nominelle System einer gewünschten Ausgangstrajektorie $\mathbf{y}^*(t)$ exakt nachfährt, siehe (1.70). Somit muss die unterlagerte Regelung lediglich die Abweichungen

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t)$$

von der Solltrajektorie $\mathbf{y}^*(t)$ ausregeln, die z.B. im Falle von Störungen oder Modellungenauigkeiten auftreten können. Die gesamte Stellgröße ergibt sich somit additiv aus den Steuer- und Regelanteilen zu

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \Delta \mathbf{u}(t) \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}(\Delta \mathbf{y}(t)).$$

Zur Auslegung des Regelgesetzes $\mathbf{u} = \mathbf{q}(\Delta \mathbf{y})$ kann das linearisierte zeitvariante Modell (1.74) verwendet werden. Dies ist in der Regel einfacher als das nichtlineare Modell $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ des Systems für den Reglerentwurf zu verwenden.

Ein Beispiel für diese Methodik wird in der Vorlesung “Methoden der Optimierung und Optimalsteuerung” behandelt. Auf die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung für *lineare* Systeme wird im späteren Teil dieser Vorlesung noch näher eingegangen.

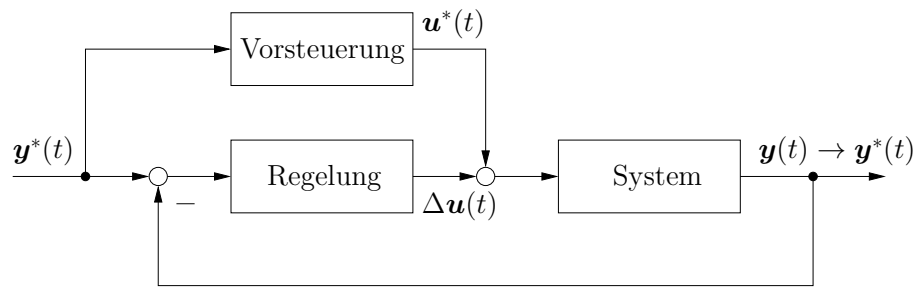


Abbildung 1.14: Zwei-Freiheitsgrade-Regelungsstruktur mit Ausgangsregelung für ein allgemeines (nichtlineares) System.

Literatur

- [1] S.W. Director und R.A. Rohrer. *Introduction to System Theory*. McGraw-Hill, New York, 1972.
- [2] O. Föllinger und D. Franke. *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*. Oldenbourg, München, 1982.
- [3] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 3rd edition, 2002.
- [4] G. Ludyk. *Theoretische Regelungstechnik 1*. Springer, Berlin, 1995.
- [5] D.G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [6] L. Padulo und M.A. Arbib. *System Theory*. W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1974.
- [7] W.J. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York, 1991.
- [8] W.J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2nd edition, 1996.

Kapitel 2

Beschreibung und Eigenschaften linearer Systeme

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Konzepte zur Beschreibung linearer dynamischer Systeme behandelt. Einige Punkte wurden bereits in den Vorlesungen “Einführung in die Regelungstechnik” und “Signale und Systeme” angesprochen und werden an dieser Stelle der Vollständigkeit halber wiederholt bzw. vertieft, z.B. im Hinblick auf lineare Mehrgrößensysteme.

Im Folgenden wird von der Zustandsraumdarstellung eines linearen (zeitinvarianten) Mehrgrößensystems der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ und den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ausgegangen.

2.1 Beschreibung im Zustandsraum

Lineare dynamische Systeme lassen sich im Zustandsraum mit Hilfe der *Transitionsmatrix* beschreiben. Im Folgenden wird diese Vorgehensweise erläutert und der Bezug zur Sprung- und Impulsantwort hergestellt.

2.1.1 Transitionsmatrix

Im Weiteren betrachte man zunächst das lineare, autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 .\tag{2.2}$$

Wegen der Zeitinvarianz darf man hier den Anfangszeitpunkt t_0 beliebig festlegen, weshalb er einfachheitshalber im Folgenden auf $t_0 = 0$ gesetzt wurde.

Mit Hilfe von Satz 1.3 aus Abschnitt 1.4 kann leicht auf die Existenz und Eindeutigkeit

der Lösung von (2.2) geschlossen werden. Dazu wird die Abschätzung

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.3)$$

mit $\|\mathbf{A}\|$ als der induzierten Matrixnorm der Matrix $\mathbf{A}$ betrachtet. Es ist somit direkt ersichtlich, dass das System (2.2) mit der Lipschitz-Konstanten $L = \|\mathbf{A}\|$ die Lipschitz-Bedingung (1.38) von Satz 1.3 erfüllt.

Damit lässt sich nach der *Methode der sukzessiven Approximation nach Picard* (Abschnitt 1.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_0 d\tau = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t) \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A}\tau) \mathbf{x}_0 d\tau = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2}\right) \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k(t) &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}\right) \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

mit der $(n \times n)$ -Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ die Lösung von (2.2) in der folgenden Form anschreiben:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 \quad \text{mit} \quad \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}} \quad (2.5)$$

Die $(n \times n)$ -Matrix $\Phi(t)$ wird als *Transitionsmatrix* bezeichnet. Wegen der großen Ähnlichkeit zur Exponentialreihe (1.45) im skalaren Fall schreibt man auch

$$\boxed{\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)} \quad (2.6)$$

Beispiel 2.1 Als Beispiel berechne man die Transitionsmatrix des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Die Reihendarstellung (2.5) der Transitionsmatrix liefert unmittelbar das Ergebnis

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2}}_{= \mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Aufgabe 2.1 Berechnen Sie die Transitionsmatrix des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Es kann gezeigt werden, dass die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ die folgende Beziehungen erfüllt:

$$\begin{aligned}
 1) \text{ Anfangswert} & \quad \Phi(0) = I \\
 2) \text{ Produkteigenschaft} & \quad \Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s) \\
 3) \text{ Invertierbarkeit} & \quad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \\
 4) \text{ Differenzierbarkeit} & \quad \frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t) .
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Im nächsten Schritt soll nun ein allgemeines lineares, zeitinvariantes System der Form (siehe auch (1.29))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.10}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} . \tag{2.11}$$

betrachtet werden. Die Herleitung der allgemeinen Lösung von (2.10), (2.11) erfolgt über die *Methode der Variation der Konstanten*. Dazu setzt man in (2.10) die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems mit der zeitabhängigen Größe $\mathbf{x}_0(t)$ der Form

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0(t) \tag{2.12}$$

ein. Damit erhält man

$$\dot{\Phi}(t)\mathbf{x}_0(t) + \Phi(t)\dot{\mathbf{x}}_0(t) = A\Phi(t)\mathbf{x}_0(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{2.13}$$

bzw. mit $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$ (Eigenschaft (4) von (2.9)) ergibt sich

$$\Phi(t)\dot{\mathbf{x}}_0(t) = B\mathbf{u}(t) \tag{2.14}$$

und mit $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ (Eigenschaft (3) von (2.9)) folgt

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \Phi(-t)B\mathbf{u}(t) . \tag{2.15}$$

Durch Integration von (2.15) errechnet sich $\mathbf{x}_0(t)$ zu

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(0) + \int_0^t \Phi(-\tau)B\mathbf{u}(\tau) d\tau \tag{2.16}$$

bzw. wegen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_0$ und $\Phi(t)\Phi(-\tau) = \Phi(t-\tau)$ (Eigenschaft (2) von (2.9)) folgt

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau) d\tau . \tag{2.17}$$

Dieses Ergebnis ist im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 2.1 Die allgemeine Lösung des Systems (2.10), (2.11) lautet

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau) d\tau \\
 \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)
 \end{aligned}$$

(2.18)

mit der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ von (2.6).

Die Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t)$ als auch der Ausgang $\mathbf{y}(t)$ setzen sich also aus zwei überlagerten Anteilen zusammen, die die freie Bewegung und die durch den Eingangsverlauf $\mathbf{u}(t)$ erzwungene Bewegung charakterisieren:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\Phi(t)\mathbf{x}_0}_{\text{homogene Lsg.}} + \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0}_{\text{freie Bewegung}} + \underbrace{\int_0^t \mathbf{C}\Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{\text{erzwungene Bewegung}} + \underbrace{\mathbf{D}\mathbf{u}(t)}_{\text{Durchgriff}} \quad (2.20)$$

Es existieren eine Reihe von analytischen und numerischen Verfahren, um die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ zu berechnen, z.B. das Entwicklungstheorem von *Sylvester*. Ein weiteres Verfahren basiert auf der Zustandstransformation in die *Diagonalform* – bzw. allgemeiner – in die *Jordansche Normalform*. Diese Transformation wird im nächsten Abschnitt näher betrachtet.

Vollständigkeitshalber sei ebenfalls erwähnt, dass für lineare, *zeitvariante* Systeme der Form (1.28) vollkommen analoge Überlegungen angestellt werden können, die aber an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden sollen.

2.1.2 Sprung- und Impulsantwort

Die allgemeine Darstellung (2.18) vereinfacht sich erheblich, wenn die Impuls- und Sprungantwort für das System (2.10), (2.11) betrachtet wird. Es sei daran erinnert, dass der *Dirac-Impuls* bzw. die *Dirac Delta-Funktion* als der Grenzwert

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(t), \quad r_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.21)$$

mit den Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(a-\tau) d\tau = f(a) \quad (2.22)$$

definiert ist. Für den *Einheitssprung* gilt

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Die Impulsantwort $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t)$ für einen (vektoriellen) Dirac-Impuls $\mathbf{u}(t) = [\delta(t), \dots, \delta(t)]^T$ mit verschwindenden Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und ohne Durchgriff $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ergibt sich direkt aus (2.20) zu

$$\boxed{\mathbf{g}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}(t) = \mathbf{c}^T\Phi(t)\mathbf{b} \quad (m = p = 1)} \quad (2.24)$$

Die Funktion $\mathbf{g}(t)$ wird auch als *Gewichtsfunktion* bezeichnet. Mit Hilfe von $\mathbf{g}(t)$ ist auch ersichtlich, dass das Ausgangsverhalten $\mathbf{y}(t)$ in (2.20) durch das Faltungsintegral ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

beschrieben werden kann. Die Sprungantwort $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t)$ des Systems (2.10), (2.11) auf einen Einheitssprung $\mathbf{u}(t) = [\sigma(t), \dots, \sigma(t)]^T$ kann aus der Integration der Impulsantwort $\mathbf{g}(t)$ gewonnen werden, d.h.

$$\mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{C}\Phi(\tau)\mathbf{B} d\tau \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T \Phi(\tau) \mathbf{b} d\tau \quad (m = p = 1). \quad (2.26)$$

Für $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ lässt sich dieses Integral in der geschlossenen Form

$$\boxed{\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}(\Phi(t) - \mathbf{I})\mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1}(\Phi(t) - \mathbf{I})\mathbf{b} \quad (m = p = 1)} \quad (2.27)$$

darstellen.

2.2 Zustandstransformation

Die Wahl der Zustandsgrößen ist keinesfalls eindeutig bei einem dynamischen System. Es ist daher häufig von Vorteil, das lineare System mit Hilfe einer *regulären Zustandstransformation*

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t)} \quad (2.28)$$

und dem *neuen Zustand* $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ in eine einfachere Darstellung zu bringen, in der z.B. die Berechnung der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ oder der Entwurf eines Reglers einfacher wird. Abbildung 2.1 veranschaulicht grafisch diese Vorgangsweise.

Anhand der regulären Zustandstransformation (2.28) mit einer regulären $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{V}$ lässt sich das lineare, zeitinvariante System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in die Form

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \mathbf{u}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{C}}} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{D}}} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.30)$$

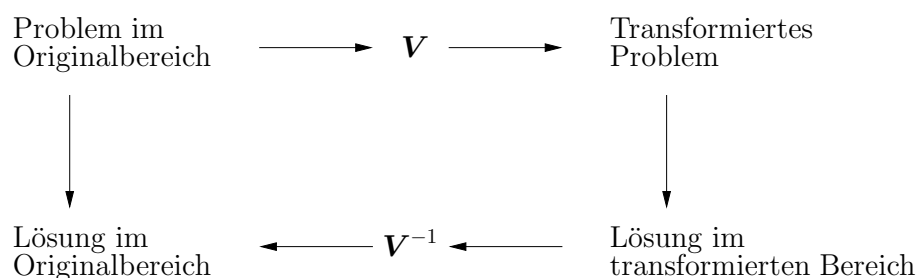


Abbildung 2.1: Reguläre Zustandstransformation.

mit dem Zustand $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ überführen. Man sagt dann auch, die beiden mathematischen Beschreibungen $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ von (2.29) und $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$ von (2.30) sind *äquivalent*. Man beachte, dass in diesem Fall die beiden quadratischen *Dynamikmatrizen* $\mathbf{A}$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ gemäß Definition ähnlich sind, und die Transformation $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}$ somit *Ähnlichkeits-transformation* heißt.

Von elementarer Bedeutung ist dabei, dass die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}$ bei einer regulären $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{V}$ die gleichen Eigenwerte und die gleiche Determinante besitzen, d.h.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}), \\ \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Wie bereits oben erwähnt wurde, kann man diese Transformation zu einem neuen Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ nun verwendet werden, um die Lösung des Systems (2.29) gemäß Satz 2.1

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

zu vereinfachen, siehe auch Abbildung 2.1. Dazu wählt man die Zustandstransformation (2.28) so, dass die Struktur von $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems (2.30) eine einfache Berechnung der Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ von (2.30) zulässt. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $\tilde{\mathbf{A}}$ Diagonalstruktur aufweist oder in *Jordanscher Normalform* vorliegt.

Die Lösung des transformierten Systems (2.30) lautet dann

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t) &= \tilde{\Phi}(t) \tilde{\mathbf{x}}_0 + \int_0^t \tilde{\Phi}(t - \tau) \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Transformiert man (2.33) mit der Vorschrift (2.28) in den Zustand $\mathbf{x}$ unter Verwendung der Ausdrücke für $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ von (2.30) zurück, erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t - \tau) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Durch Vergleich mit (2.32) ergibt sich der Zusammenhang zwischen $\Phi(t)$ und $\tilde{\Phi}(t)$ zu

$$\Phi(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1}.$$

(2.35)

Im Folgenden werden zwei Spezialfälle betrachtet, nämlich die Transformation auf *Diagonalform* bzw. auf *Jordan-Form*.

2.2.1 Transformation auf Diagonalform

Eine wichtige Ähnlichkeitstransformation ist die Transformation auf *Diagonalform*. Die Spalten der zugehörigen Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \quad (2.36)$$

setzen sich aus den Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ zusammen, die mit Hilfe der Eigenwerte λ_i , $i = 1, \dots, n$ durch

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

definiert sind. Damit die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ regulär ist, sei im Folgenden sei angenommen, dass die Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ linear unabhängig sind. Dies ist insbesondere dann gegeben, wenn die Eigenwerte λ_i einfach sind.

Dann gilt offensichtlich

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = [\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n] = [\lambda_1 \mathbf{v}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{v}_n] = \mathbf{V} \text{diag}(\lambda_i)$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \text{diag}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Das transformierte System in $\tilde{\mathbf{x}}$ -Koordinaten lässt sich also in der Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B} \quad (2.38)$$

darstellen, wobei die Dynamik jedes Zustandes $\tilde{x}_i$, $i = 1, \dots, n$ durch den entsprechenden Eigenwert λ_i bestimmt ist. Gemäß (2.5) ergibt sich die transformierte Transitionsmatrix

$$\tilde{\Phi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}^k \frac{t^k}{k!} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}}^k = \text{diag}(\lambda_i^k),$$

wobei die einzelnen Diagonalelemente durch die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ausgedrückt werden können (siehe auch (1.45) in Beispiel 1.2):

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Die Transitionsmatrix des Originalproblems erhält man aus (2.35). Es sei angemerkt, dass die vorher getroffene Annahme, nämlich dass alle Eigenwerte einfach sind, nur hinreichend, nicht aber notwendig ist, um ein lineares System in Diagonalform zu transformieren.

Algebraische und geometrische Vielfachheit: Um von der obigen Annahme der einfachen Eigenwerte abzurücken, sei in Erinnerung gerufen, was algebraische und geometrische Vielfachheit bedeutet: das *charakteristische Polynom* $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ der Matrix $\mathbf{A}$ habe m verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ mit den entsprechenden Vielfachheiten $n_1, \dots, n_m$. Dann gelten folgende Bezeichnungen:

- n_i ist die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_i , $i = 1, \dots, m$,
- g_i ist die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_i , $i = 1, \dots, m$, die als die *Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert λ_i* definiert ist, d.h.

$$g_i = \dim(\text{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})).$$

Einfacher ausgedrückt stellt g_i die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}$ dar, die $\lambda_i \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}$ erfüllen. Für die geometrische Vielfachheit g_i eines Eigenwertes λ_i gilt $1 \leq g_i \leq n_i$.

Mit Hilfe dieser Definitionen lässt sich zeigen, dass eine $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ genau dann durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform gebracht werden kann, wenn für jeden Eigenwert λ_i die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist, d.h. $n_i = g_i$, $i = 1, \dots, m$. In diesem Fall spannen die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ den $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ auf.

Beispiel 2.2 Als Beispiel betrachte man das autonome lineare zeitinvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.40)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ lauten $\lambda_1 = 3$ mit der algebraischen Vielfachheit $n_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit $n_2 = 2$. Wegen $\text{Rang}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = 2$ und $\text{Rang}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = 1$ folgt unmittelbar die geometrische Vielfachheit von λ_1 zu $g_1 = 1$ und von λ_2 zu $g_2 = 2$. Da die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von λ_1 und λ_2 gleich sind, existiert eine Eigenbasis der Matrix $\mathbf{A}$. Der Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$ folgt aus

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

zu $\mathbf{v}_1^T = [1, 0, 0]$ und die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 1$ errechnen sich aus

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad , \quad k = 2, 3 \quad (2.42)$$

zu $\mathbf{v}_2^T = [0, 1, 1]$ und $\mathbf{v}_3^T = [-1, 1, 0]$. Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

ergibt sich das System (2.40) im transformierten Zustand $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}(t)$ zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0. \quad (2.44)$$

Die Transitionsmatrix des transformierten Systems (2.44) lautet dann

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

und damit errechnet sich die Transitionsmatrix des Originalsystems (2.40) zu

$$\Phi(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} - e^t & e^t - e^{3t} \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Man kann natürlich die soeben besprochene Methode der Diagonalisierung auch für Systeme mit konjugiert komplexen Eigenwerten anwenden. Wie man in der folgenden Aufgabe allerdings sieht, sind in diesem Fall sowohl die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ als auch die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ komplexwertige Matrizen.

Aufgabe 2.2 Transformieren Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x} \quad (2.47)$$

auf Diagonalform und berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ zu (2.47).

2.2.2 Nichtdiagonalähnliche Systemmatrizen

Im vorigen Abschnitt wurde für die Transformation auf Diagonalform angenommen, dass die Eigenwerte λ_i der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ die gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen, was vor allem bei einfachen Eigenwerten der Fall ist. Diese Annahme soll nun gelockert werden.

Im Folgenden wird angenommen, λ sei ein Eigenwert der $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit 1, so dass aus der Eigenwertgleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1 \quad (2.48)$$

lediglich ein Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ bestimmt werden kann. In diesem Fall können $(n-1)$ zusätzliche linear unabhängige Hauptvektoren $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ durch Lösung der Gleichungen

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.49)$$

bestimmt werden. Bildet man nun die Transformationsmatrix (2.36), so kann gezeigt werden, dass nach der Ähnlichkeitstransformation die neue Matrix

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{N}}. \quad (2.50)$$

entsteht. Zur Berechnung der Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t}$ ist es hilfreich, $\tilde{\mathbf{A}}$ in die Diagonalmatrix $\lambda\mathbf{I}$ und die Matrix $\mathbf{N}$ aufzuspalten. Somit erhält man¹

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t} = e^{\lambda\mathbf{I}t} e^{\mathbf{N}t}, \quad (2.51)$$

Zur Berechnung von $e^{\mathbf{N}t}$ kann die Reihendarstellung (2.5)

$$e^{\mathbf{N}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{N}^k \frac{t^k}{k!}$$

¹ Die Aufspaltung (2.51) ist möglich, da die Matrizen $\mathbf{I}$ und $\mathbf{N}$ kommutieren, d.h. die Beziehung $\mathbf{I}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{I}$ erfüllt ist.

verwendet werden. Genauere Betrachtung von $\mathbf{N}$ zeigt dabei, dass die Nebendiagonalen bei $\mathbf{N}^k$ jeweils um eine Zeile nach oben wandern, z.B. $\mathbf{N}^2$ ergibt sich zu

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit kann die Transitionsmatrix (2.51) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & t \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Aufgabe 2.3 Transformieren Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

auf die Form von (2.50). Berechnen Sie anschließend die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$.

2.2.3 Behandlung konjugiert komplexer Eigenwerte

Eine $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ mit reellen Koeffizienten kann nur Eigenwerte besitzen, die entweder reell oder konjugiert komplex sind. Die komplexwertigen Matrizen, die im Falle von konjugiert komplexen Eigenwerten entstehen (siehe Aufgabe 2.2), stören zwar nicht weiter, doch besteht oft der Wunsch, dass die Matrizen des transformierten Systems ($\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}}$) von (2.30) ebenfalls reellwertig sind.

Wie diese Transformation dann im Detail aussieht, wird im Folgenden anhand einer Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ besprochen, die $r = n/2$ paarweise verschiedene konjugiert komplexe Eigenwerte der Form

$$\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i, \quad \lambda_i^- = \alpha_i - j\beta_i, \quad i = 1, \dots, r$$

besitzt. Mit Hilfe der regulären Matrix

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j & \dots & 0 & 0 \\ 1 & j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -j \\ 0 & 0 & \dots & 1 & j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ j & -j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & j & -j \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

und den konjugiert komplexen Eigenvektoren $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i^-)$, $i = 1, \dots, r$ wird die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ wie folgt angesetzt

$$\mathbf{V} = \underbrace{[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^-, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_r^-]}_{\tilde{\mathbf{V}}} \mathbf{T} = \underbrace{\left[\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^-), \frac{j}{2}(\mathbf{v}_1^- - \mathbf{v}_1), \dots, \frac{1}{2}(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_r^-), \frac{j}{2}(\mathbf{v}_r^- - \mathbf{v}_r) \right]}_{\substack{\text{Re}(\mathbf{v}_1) \quad \text{Im}(\mathbf{v}_1) \quad \dots \quad \text{Re}(\mathbf{v}_r) \quad \text{Im}(\mathbf{v}_r)}}. \quad (2.54)$$

Die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems errechnet sich damit zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\tilde{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}}}_{=\mathbf{\Lambda}} \mathbf{T} \quad (2.55)$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 + j\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 - j\beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r + j\beta_r & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_r - j\beta_r \end{bmatrix}}_{=\mathbf{\Lambda}} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r & \beta_r \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_r & \alpha_r \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ des transformierten Systems mit der Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ von (2.56) kann in geschlossener Form angegeben werden

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ -e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) \\ 0 & 0 & \cdots & -e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

2.2.4 Reelle Jordansche Normalform

Die Ergebnisse der Abschnitte 2.2.1–2.2.3 lassen sich nun wie folgt für ein allgemeines lineares, zeitinvariantes System (2.29) kombinieren.

Satz 2.2 (Reelle Jordansche Normalform) *Es sei die reellwertige $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ die Dynamikmatrix des linearen, zeitinvarianten Systems (2.29). Angenommen, $\mathbf{A}$ habe k reelle und $(n - k)/2$ konjugiert komplexe Eigenwerte. Dann existiert eine reguläre Zustandstransformation der Form (2.28)*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \text{Re}(\mathbf{v}_{k+1}), \text{Im}(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, \text{Re}(\mathbf{v}_r), \text{Im}(\mathbf{v}_r)] \quad (2.58)$$

bestehend aus linear unabhängigen (komplexwertigen) Eigen- und Hauptvektoren $\mathbf{v}_j$, $j = 1, \dots, r$ mit $r = (n + k)/2$ so, dass die Dynamikmatrix des transformierten Systems folgende Form

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_l \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

annimmt. Dabei bezeichnen $\mathbf{J}_i$, $i = 1, \dots, l$ die so genannten Jordanblöcke, deren Struktur für reelle Eigenwerte λ_i in der Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

bzw. für konjugiert komplexe Eigenwerte $\alpha_i \pm j\beta_i$ in der folgenden Form gegeben ist:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{I}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{W} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Beispiel 2.3 Die Kombination der drei betrachteten Fälle in den Abschnitten 2.2.1–2.2.3 soll für das Beispiel

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -6 & -8 & -10 \\ -\frac{3}{2} & 4 & 8 & 12 & 15 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & -4 & -\frac{9}{4} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.62)$$

gezeigt werden. Die Systemmatrix besitzt die folgenden Eigenwerte:

Eigenwert λ_i	algebr. Vielfachheit n_i	geom. Vielfachheit $g_i \leq n_i$
$\lambda_1 = -3$	1	1
$\lambda_2 = 1 \pm j2$	2	1

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 1 + j2$ lauten

$$\mathbf{v}_1 = \left[0, 0, 0, -\frac{5}{4}, 1 \right]^T, \quad \mathbf{v}_2 = \left[-\frac{2}{3}, 1, 0, -\frac{1}{3} + j\frac{1}{6}, 0 \right]^T. \quad (2.63)$$

Da für λ_2 die algebraische und geometrische Vielfachheit nicht übereinstimmen, wird mit Hilfe der Beziehung (2.49) ein zusätzliche Hauptvektor

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_3^T = \left[-\frac{8}{9}, 1, j\frac{2}{3}, -\frac{5}{18} - j\frac{5}{18}, 0 \right] \quad (2.64)$$

berechnet. Damit lautet die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_2), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_2), \operatorname{Re}(\mathbf{v}_3), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_3)] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{18} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

und die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}$ in der reellen Jordanschen Normalform errechnet sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_2) & \operatorname{Im}(\lambda_2) \\ -\operatorname{Im}(\lambda_2) & \operatorname{Re}(\lambda_2) \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Aus den Überlegungen der Abschnitte 2.2.1–2.2.3 folgt die Transitionsmatrix des transformierten Systems zu

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) & te^t \cos(2t) & te^t \sin(2t) \\ 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) & -te^t \sin(2t) & te^t \cos(2t) \\ 0 & 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

bzw. für das Originalsystem (2.62) nach (2.35)

$$\Phi(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} \quad (2.68)$$

mit $\mathbf{V}$ von (2.65).

Aufgabe 2.4 Transformieren Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

in die Jordansche Normalform und berechnen Sie die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$.

2.3 Stabilität linearer Systeme

Mit den bisherigen Erkenntnissen soll in diesem Abschnitt die Stabilität linearer dynamischer Systeme betrachtet werden. Da dieses Thema bereits Bestandteil der Vorlesung “Einführung in die Regelungstechnik” war, wird es im Folgenden nur kompakt dargestellt.

2.3.1 Bedeutung der Eigenvektoren

Die Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$, die bereits für die Transformation auf Diagonalform bzw. auf die Jordansche Normalform in Abschnitt 2.2 von Bedeutung waren, lassen sich anschaulich geometrisch interpretieren. Dazu wird von einem autonomen System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.69)$$

ausgegangen und zunächst der Begriff eines *invarianten Unterraums* definiert.

Definition 2.1 Es sei $\mathcal{V}$ ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit der Basis $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k\}$. Man nennt $\mathcal{V}$ invariant gegenüber einer $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$, wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ auch $\mathbf{Ax} \in \mathcal{V}$ gilt.

Aus der Definition des Eigenvektors $\mathbf{Av}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ zu einem Eigenwert λ_i sieht man unmittelbar, dass $\mathbf{v}_i$ invariant gegenüber $\mathbf{A}$ ist. Mit anderen Worten heißt dies, dass wenn man mit einem Anfangswert $\mathbf{x}_0$ auf einem Eigenvektor startet, also z.B.

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_0 \mathbf{v}_1, \quad \gamma_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.70)$$

dann verbleibt die Trajektorie für alle Zeiten in dieser Richtung des Eigenvektors, d.h. die Lösung hat die Form

$$\mathbf{x}(t) = \gamma(t) \mathbf{v}_1. \quad (2.71)$$

Um dies zu zeigen, setzt man (2.71) in das System (2.69) ein und erhält

$$\dot{\gamma}(t) \mathbf{v}_1 = \gamma(t) \mathbf{Av}_1 = \gamma(t) \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad (2.72)$$

bzw.

$$(\dot{\gamma}(t) - \gamma(t) \lambda_1) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}. \quad (2.73)$$

Da der Eigenvektor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ ist, muss demnach gelten

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t) \lambda_1 \quad (2.74)$$

bzw.

$$\gamma(t) = \gamma_0 e^{\lambda_1 t}. \quad (2.75)$$

Dies bedeutet, dass sich das System entlang eines Eigenvektors durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben lässt. Die spezielle Lösung (2.71) mit (2.75)

$$\mathbf{x}(t) = \gamma_0 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \quad (2.76)$$

wird auch als *Eigenschwingung des Systems* (2.69) bezeichnet.

Beispiel 2.4 Als Beispiel betrachte man folgendes System zweiter Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1.4 & -1.2 \\ -1.2 & -0.4 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (2.77)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ errechnen sich zu $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$, die Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.447 \\ -0.894 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

und die zugehörige Jordansche Normalform ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{AV} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Abbildung 2.2 zeigt den Verlauf der Trajektorien mit den zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

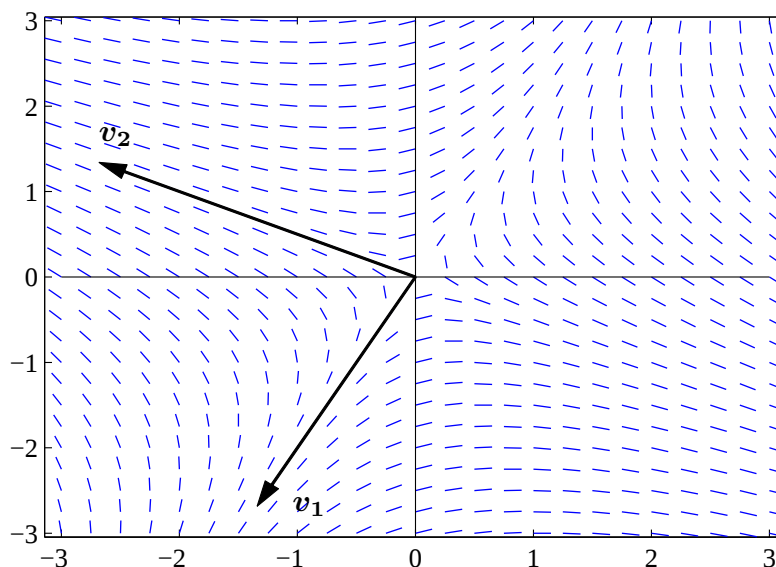


Abbildung 2.2: Verlauf der Trajektorien in Beispiel 2.4.

2.3.2 Asymptotische Stabilität

Aus dem bisher Gesagten lässt sich auf einfache Art und Weise das Lösungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten autonomen Systems der Form (2.69) schließen. Die asymptotische Stabilität ist dabei wie folgt definiert:

Definition 2.2 (Asymptotische Stabilität) *Das dynamische System (2.69) heißt asymptotisch stabil, wenn für alle $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ gilt.*

Zur Vereinfachung wird zunächst davon ausgegangen, dass das System (2.69) einfache Eigenwerte λ_i besitzt, so dass die Lösung $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$ über die Diagonalform

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 = \mathbf{V} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0$$

bestimmt ist. Offensichtlich gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\lambda_i t}| = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \\ 1 & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \end{cases}$$

Somit strebt $\mathbf{x}(t)$ genau dann gegen $\mathbf{0}$, wenn $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ gilt.

Bei mehrfachen Eigenwerten folgt aus Abschnitt 2.2.2 und (2.52), dass für die Anteile der Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t^k e^{\lambda_i t}| = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \\ 1 & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \quad (\text{falls } \lambda_i \text{ einfach}) \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \quad (\text{falls } \lambda_i \text{ mehrfach}) \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \end{cases}$$

gelten muss. Somit ist die Bedingung $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für die asymptotische Stabilität von $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\Phi(t)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0$ auch bei mehrfachen Eigenwerten gültig.

Diese Betrachtungen lassen sich auch auf konjugiert komplexe Eigenwerte übertragen, siehe (2.57). Allgemein lässt sich im Hinblick auf die Jordansche Normalform in (2.59)–(2.61) folgender Satz herleiten:

Satz 2.3 Jede Lösung $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ des Systems (2.69) ist eine Linearkombination der Funktionen

$$t^{k_1}e^{\lambda t}, \quad t^{k_2}e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{und} \quad t^{k_3}e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2.80)$$

für die reellen Eigenwerte λ , die konjugiert komplexen Eigenwerte $\alpha \pm j\beta$ und $k_1, k_2, k_3 = 0, \dots, (r-1)$ mit r als der jeweiligen Dimension der Jordanblöcke.

Als direkte Konsequenz von Satz 2.3 lassen sich die Bedingungen für asymptotische Stabilität wie folgt angeben:

Satz 2.4 (Asymptotische Stabilität) Für alle Anfangswerte $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ des Systems (2.69) gilt genau dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad (2.81)$$

wenn alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ negativen Realteil besitzen. Man sagt dann auch, die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ist asymptotisch stabil.

In Abbildung 2.3 sind einige Beispiele von Eigenwerten dargestellt, um das allgemeine Lösungsverhalten zu illustrieren:

- a) die Zeitvorgänge klingen monoton ab, das System ist asymptotisch stabil; der langsamste Vorgang (Eigenwert λ_1) dominiert den Zeitvorgang
- b) das System ist instabil, bei einer Anfangsstörung strebt $|x(t)|$ ohne Schwingungen ins Unendliche
- c) das System ist asymptotisch stabil, der Zeitvorgang hat oszillatorische Anteile
- d) das System ist instabil, es treten aufklingende oszillatorische Zeitvorgänge auf.

Aufgabe 2.5 Ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ der folgenden Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

global asymptotisch stabil? (**Lösung:** nein, nein)

Aufgabe 2.6 Berechnen Sie für das linearisierte Modell (1.68) des Wagen–Pendel–Systems in Aufgabe 1.12 die Eigenwerte. Was folgt daraus für die Stabilität des Systems in der oberen Ruhelage?

Lösung: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{6g(m+M)}{l(m+4M)}} \Rightarrow$ obere Ruhelage ist instabil

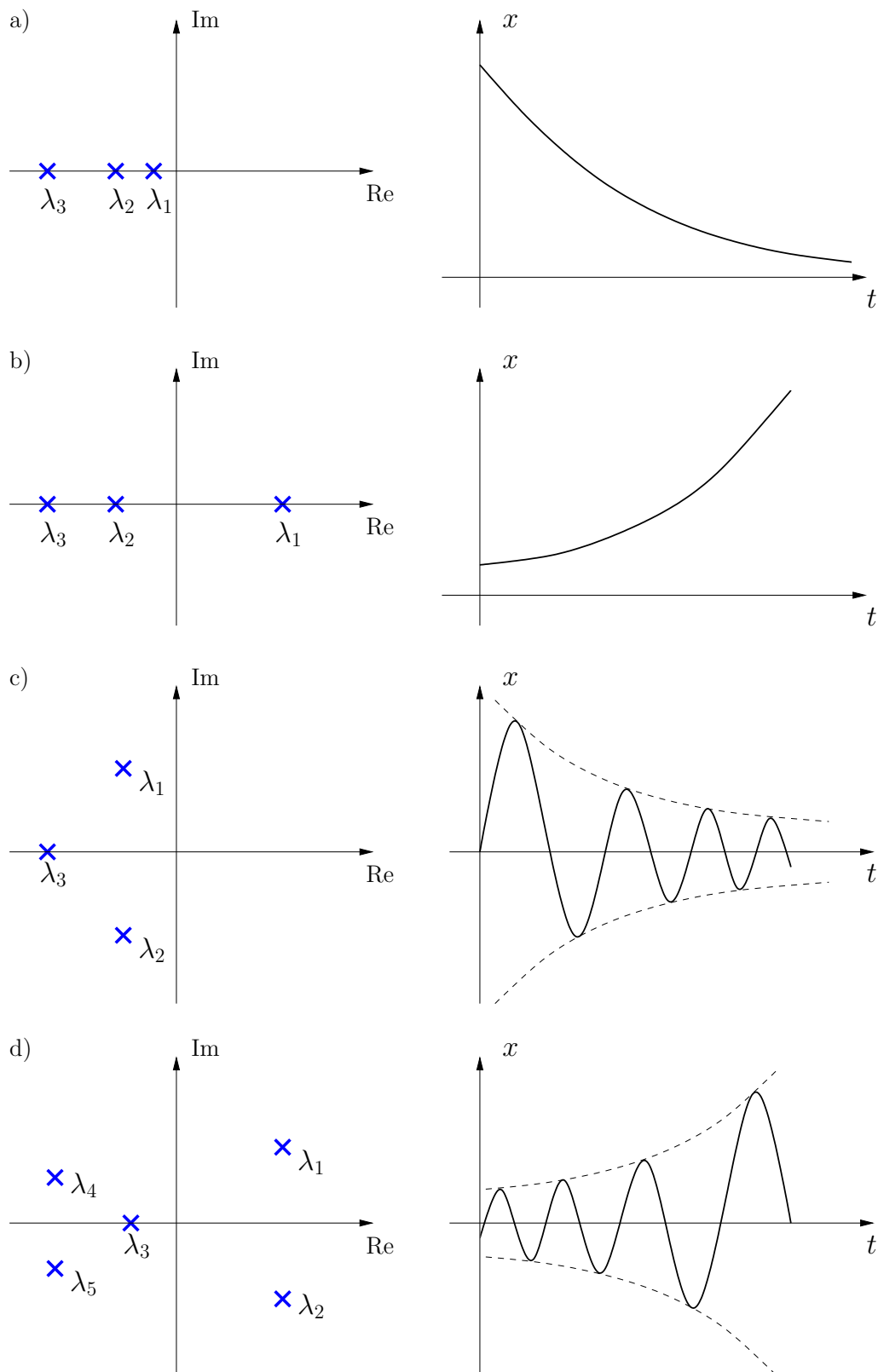


Abbildung 2.3: Lösungsverhalten bei unterschiedlichen Eigenwerten.

2.4 Eingangs-/Ausgangsverhalten

Neben der bisher behandelten mathematischen Formulierung linearer, zeitinvarianter Systeme in Form von Zustandsdifferentialgleichungen und Ausgangsgleichungen (siehe (2.29)) ist sehr häufig eine Beschreibung des Systemverhaltens vom Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ zum Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ohne Kenntnis des Zustandes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gewünscht. Dieses so genannte *Eingangs-Ausgangsverhalten* kann in Form von Übertragungsfunktionen im Eingrößenfall ($m = p = 1$) bzw. Übertragungsmatrizen im Mehrgrößenfall beschrieben werden.

Die Grundlagen von Übertragungsfunktionen waren bereits Bestandteil der Vorlesung “Einführung in die Regelungstechnik” und werden deshalb im Folgenden nicht im Detail beschrieben. Dies betrifft insbesondere die Grundlagen der Laplace-Transformation $\mathcal{L}$, von deren Kenntnis ausgegangen wird.

2.4.1 Übertragungsfunktion und Übertragungsmatrix

Wendet man die Laplace-Transformation auf das lineare zeitinvariante Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + du\end{aligned}\quad (2.82)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem skalaren Eingang $u \in \mathbb{R}$ und dem skalaren Ausgang $y \in \mathbb{R}$ an, so erhält man

$$\begin{aligned}s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{c}^\top \mathbf{X}(s) + dU(s).\end{aligned}\quad (2.83)$$

Berechnet man nun aus der ersten Gleichung von (2.83) die Größe $\mathbf{X}(s)$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(s) \quad (2.84)$$

und setzt dies in die zweite Gleichung ein, ergibt sich

$$Y(s) = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (\mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d) U(s). \quad (2.85)$$

Daraus lässt sich unmittelbar der Begriff der *Übertragungsfunktion* definieren:

Definition 2.3 (*Übertragungsfunktion*) Für das lineare zeitinvariante Eingrößensystem von (2.82) mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der Eingangsgröße $u \in \mathbb{R}$ und der Ausgangsgröße $y \in \mathbb{R}$ gelte $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Die von der speziellen Wahl von u unabhängige Funktion $G(s)$ mit

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2.86)$$

heißt Übertragungsfunktion von (2.82).

Im Abschnitt 2.1 wurde festgestellt (Satz 2.1), dass sich die allgemeine Lösung von (2.82) in der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}(t) + du(t)\end{aligned}\quad (2.87)$$

mit der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ anschreiben lässt. Wendet man nun auf die erste Zeile von (2.87) die Laplace-Transformation an, so ergibt sich unter Verwendung des Faltungssatzes die Beziehung

$$\mathbf{X}(s) = \hat{\Phi}(s)\mathbf{x}_0 + \hat{\Phi}(s)\mathbf{b}U(s). \quad (2.88)$$

Durch Vergleich von (2.84) mit (2.88) zeigt sich unmittelbar, dass sich die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ in der Form

$$\hat{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (2.89)$$

errechnet. Damit ist neben der im vorigen Kapitel diskutierten Transformation auf Jordansche Normalform eine weitere Möglichkeit zur effizienten Berechnung der Transitionsmatrix gegeben.

Aufgabe 2.7 Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Mit Hilfe von (2.88) und (2.89) lässt sich nun die Übertragungsfunktion $G(s)$ wie folgt berechnen:

Satz 2.5 (Übertragungsfunktion) Die Übertragungsfunktion $G(s)$ des linearen, zeitinvarianten Eingrößensystems (2.82) errechnet sich zu

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (2.90)$$

mit den Polynomen $Z(s)$ und $N(s)$. Sind die Polynome $Z(s)$, auch Zählerpolynom genannt, und $N(s)$, auch Nennerpolynom genannt, teilerfremd, dann gilt $\text{grad}(Z(s)) \leq \text{grad}(N(s)) \leq n$ und die Nullstellen des Nennerpolynoms $N(s)$, die so genannten Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$, sind auch Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht (siehe Beispiel 2.5). Der Grad des Nennerpolynoms $\text{grad}(N(s))$ gibt auch die Ordnung der Übertragungsfunktion $G(s)$ an.

Beweis: Die Beziehung (2.90) erhält man unmittelbar indem man in (2.85) $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ setzt. Um die restlichen Aussagen in Satz 2.5 bewerten zu können, wird die Inverse der Matrix $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ in der Form

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (2.91)$$

ausgedrückt, wobei mit $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ die Adjunkte der Matrix $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ bezeichnet wird.² Setzt man (2.91) in die Übertragungsfunktion (2.90) ein

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{\mathbf{c}^\top \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + d \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}, \quad (2.92)$$

erkennt man unmittelbar, dass

²Anmerkung: Die Elemente A_{ij} der Adjunkten $\text{adj}(\mathbf{A}) = [A_{ij}]$ einer Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ entsprechen den Subdeterminanten der $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen von $\mathbf{A}$, die durch Streichen der j -ten Zeile und der i -ten Spalte hervorgehen, multipliziert mit dem Faktor $(-1)^{i+j}$.

- die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ auch Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind, da $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ dem charakteristischen Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ entspricht,
- das Nennerpolynom $N(s)$ von $G(s)$ maximal die Ordnung n haben kann und
- der Grad des Zählerpolynoms $Z(s)$ kleiner oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms $N(s)$ sein muss, da $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ zufolge der Definition lediglich aus Polynomen $(n-1)$ -ter Ordnung in s besteht. ■

Aufgabe 2.8 Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des linearisierten Zweitankelements von Aufgabe 1.13

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} = \frac{a^2 g}{A q_R} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/A \\ 0 \end{bmatrix} \Delta q, \quad \Delta q_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2 g}{q_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix}$$

mit der Eingangsgröße Δq und der Ausgangsgröße Δq_2 .

Lösung: Die Übertragungsfunktion lautet $G(s) = \frac{1}{\left(s \frac{A q_R}{a^2 g} + 1\right)^2}$.

Das folgende Beispiel greift die Aussage in Satz 2.5 auf, dass im Allgemeinen nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Eigenwerte einer Systemmatrix $\mathbf{A}$ auch die Pole der zugehörigen Übertragungsfunktion sind.

Beispiel 2.5 Betrachtet wird das Pendel–Wagen–System aus Aufgabe 1.12. Nach Aufgabe 2.6 ergeben sich die Eigenwerte des linearisierten Modells (1.68) in der oberen Ruhelage zu

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{6g(m+M)}{l(m+4M)}}$$

Wenn man nun wahlweise die Wagenposition bzw. den Pendelwinkel als Ausgang betrachtet, d.h.

$$\Delta y_1 = \Delta x_w \quad \text{bzw.} \quad \Delta y_2 = \Delta \phi,$$

so ergeben sich die Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{\Delta Y_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{4ls^2 - 6g}{l(m+4M)s^4 - 6g(m+M)s^2} \\ G_2(s) &= \frac{\Delta Y_2(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-6}{l(m+4M)s^2 - 6g(m+M)}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Offensichtlich findet im Fall von $G_2(s)$ eine Pol–Nullstellen–Kürzung statt, die dafür verantwortlich ist, dass die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 0$ nicht mehr als Pole von $G_2(s)$ in Erscheinung treten.

Mehrgrößenfall: Im Falle von m Eingängen und p Ausgängen tritt an Stelle der Übertragungsfunktion $G(s)$ die sogenannte Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$. Die Herleitung erfolgt vollkommen analog zur Übertragungsfunktion. Die Laplace-Transformation angewandt auf das lineare, zeitinvariante System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.94)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ergibt

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Durch Elimination der Größe $\mathbf{X}(s)$ mit

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (2.96)$$

folgt unmittelbar

$$\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{U}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0, \quad (2.97)$$

und für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ erhält man die $(p \times m)$ -Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\hat{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (2.98)$$

die sich aus den einzelnen Übertragungsfunktionen

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \dots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \quad (2.99)$$

zusammensetzt.

2.4.2 Realisierungsproblem

Im Satz 2.5 wurde gezeigt, dass es sehr einfach ist, zu einem linearen, zeitinvarianten Eingrößensystem (2.82) die Übertragungsfunktion $G(s)$ zu berechnen. Unter dem *Realisierungsproblem* versteht man die umgekehrte Aufgabe, nämlich zu einer gegebenen Übertragungsfunktion $G(s)$ eine Zustandsdarstellung der Form (2.82) mit den Größen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ und d zu suchen. Jene Zustandsrealisierungen, die eine minimale Anzahl von Zuständen haben, werden auch als *Minimalrealisierung* der Übertragungsfunktion $G(s)$ bezeichnet. Es sei an dieser Stelle nochmals betont, dass die Zustandsrealisierung einer Übertragungsfunktion $G(s)$ natürlich keinesfalls eindeutig ist.

Satz 2.6 (Realisierbarkeit) *Eine Übertragungsfunktion*

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \quad (2.100)$$

mit dem Zähler- und Nennerpolynom $Z(s)$ und $N(s)$ ist genau dann realisierbar, wenn $\text{grad}(Z(s)) \leq \text{grad}(N(s))$ oder äquivalent dazu gilt $\lim_{s \rightarrow \infty} |G(s)| < \infty$.

In der englischsprachigen Literatur bezeichnet man eine Übertragungsfunktion (2.100) mit $\text{grad}(Z(s)) \leq \text{grad}(N(s))$ auch als *proper* bzw. für $\text{grad}(Z(s)) < \text{grad}(N(s))$ als *strictly proper*. Durch Polynomdivision von $Z(s)$ durch $N(s)$ ist es unmittelbar einsichtig, dass für $\text{grad}(Z(s)) > \text{grad}(N(s))$ in der zugehörigen Zustandsdarstellung Ableitungen der Eingangsgröße u auftreten müssen, und man somit nicht mehr direkt die Struktur

von (2.82) erhält. Um für $G(s)$ von (2.100) eine Minimalrealisierung zu finden, müssen die Polynome $Z(s)$ und $N(s)$ teilerfremd sein.

Im Folgenden werden zwei *kanonische Minimalrealisierungen* der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1} + b_ns^n}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} \quad (2.101)$$

angegeben, wobei vorausgesetzt wird, dass die Polynome $Z(s)$ und $N(s)$ teilerfremd sind, und das Nennerpolynom *monisch* ist, d.h. der höchstwertigste Koeffizient von $N(s)$ ist 1.

Die Übertragungsfunktion (2.101) kann in der Form (unter Vernachlässigung des Arguments s)

$$Y = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ns^n}{N(s)} U$$

geschrieben werden. Durch Umstellung und Einführung der Größen X_i

$$Y = b_0 \underbrace{\frac{1}{N(s)} U}_{X_1} + b_1 \underbrace{\frac{s}{N(s)} U}_{X_2} + \dots + b_{n-1} \underbrace{\frac{s^{n-1}}{N(s)} U}_{X_n} + b_n \frac{s^n}{N(s)} U \quad (2.102)$$

folgen die einfachen Zusammenhänge

$$sX_1 = X_2, \quad \dots \quad sX_{n-1} = X_n. \quad (2.103)$$

Weiterhin folgt aus

$$X_1 = \frac{1}{N(s)} U \Rightarrow s^n X_1 + a_{n-1}s^{n-1} X_1 + \dots + a_1 s X_1 + a_0 X_1 = U$$

bzw. im Hinblick auf (2.103)

$$sX_n + a_{n-1}X_n + \dots + a_1 X_2 + a_0 X_1 = U. \quad (2.104)$$

Die Ausgangsgleichung erhält man aus (2.102) und Ersetzen von sX_n gemäß (2.104)

$$Y = \underbrace{(b_0 - a_0 b_n)}_{\tilde{b}_0} X_1 + \dots + \underbrace{(b_{n-1} - a_{n-1} b_n)}_{\tilde{b}_{n-1}} X_n + b_n U. \quad (2.105)$$

Die Gleichungen (2.103) und (2.104) lassen sich in der Matrixform

$$\begin{aligned} s \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} U \\ Y &= \underbrace{[\tilde{b}_0 \quad \dots \quad \tilde{b}_{n-1}]}_{\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{b_n}_{\mathbf{d}} U. \end{aligned} \quad (2.106)$$

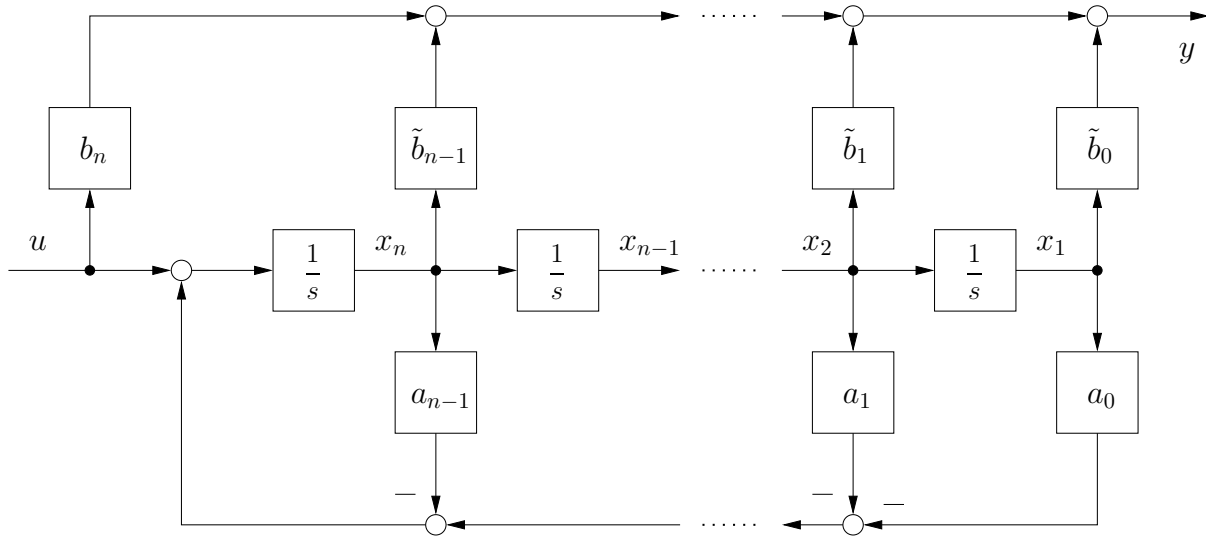


Abbildung 2.4: 1. Standardform bzw. Regulationsnormalform (2.106).

schreiben. Durch die inverse Laplace-Transformation von (2.106) ist aber unmittelbar eine Zustandsrealisierung der Übertragungsfunktion $G(s)$ von (2.101) gefunden. Man nennt diese Realisierung (2.106) auch *1. Standardform* oder *Regelungsnormalform*.³ Abbildung 2.4 zeigt das zugehörige Strukturschaltbild. Diese Normalform wird in Abschnitt 2.5.3 im Zusammenhang mit der Eigenschaft der *Steuerbarkeit* noch näher untersucht.

Die Herleitung einer zweiten Realisierung kann einfach über einen Trick erfolgen. Die Übertragungsfunktion $G(s)$ als skalare rationale Funktion in s bleibt unverändert, wenn man sie transponiert, d.h.

$$G(s) = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = (\mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d)^\top = \mathbf{b}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{c} + d. \quad (2.107)$$

Gleichung (2.107) besagt offensichtlich, dass das Eingrößensystem (2.82) und

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{c}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + du \end{aligned} \quad (2.108)$$

die gleiche Übertragungsfunktion $G(s)$ haben. Das System (2.108) nennt man auch das zu (2.82) *duale System*. Wendet man dies auf (2.106) an, erhält man die Realisierung

$$\begin{aligned} s \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} U \\ Y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{b_n}_d U. \end{aligned} \quad (2.109)$$

³Häufig werden auch die Begriffe *Steuerbarkeitsnormalform* oder *Steuerungsnormalform* verwendet.

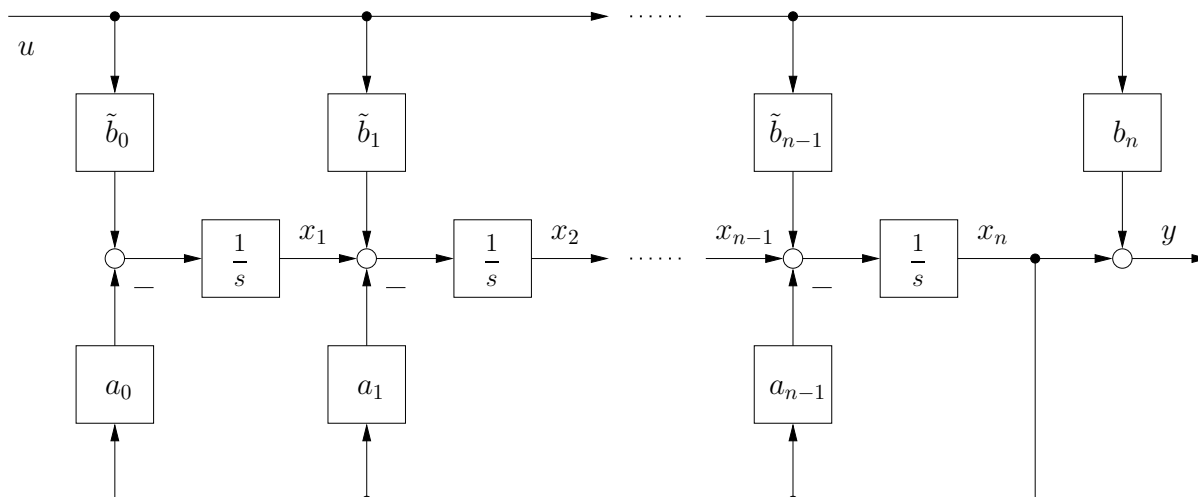


Abbildung 2.5: 2. Standardform bzw. Beobachtungsnormalform (2.109).

Die Form (2.109) heißt auch *2. Standardform* oder *Beobachtungsnormalform*.⁴ Abbildung 2.5 zeigt das zugehörige Strukturschaltbild. Diese Normalform wird in Abschnitt 2.6.3 im Zusammenhang mit der Eigenschaft der *Beobachtbarkeit* noch näher untersucht.

Beispiel 2.6 Als Beispiel bestimme man für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^3 + 2s}{(s-1)(-2+3s)(s+1)} \quad (2.110)$$

die *Regelungsnormalform*. Dazu bringt man die Übertragungsfunktion in die monische Form (2.101)

$$G(s) = \frac{\frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{3}s}{s^3 - \frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3}} \quad (2.111)$$

Die *Regelungsnormalform* lässt sich nun unmittelbar aus (2.106) ablesen und lautet im Zeitbereich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & 1 & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} u. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Die betrachteten Standardformen (2.106) und (2.109) sind sogenannte *Minimalrealisierungen*. Man nennt nun eine Zustandsrealisierung minimal, wenn es die geringst mögliche Anzahl von Zuständen unter allen möglichen Realisierungen aufweist. Wie der folgende Satz zeigt, sind die Minimalrealisierbarkeit eng mit den Eigenschaften der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit verknüpft, die in den Abschnitten 2.5 und 2.6 behandelt werden.

Satz 2.7 (Minimalrealisierung) Eine Zustandsrealisierung $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\}$ zu einer Übertragungsfunktion $G(s)$ ist genau dann minimal, wenn das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ vollständig steuerbar und das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ vollständig beobachtbar ist.

⁴Häufig werden auch die Begriffe *Beobachtbarkeitsnormalform* oder *Beobachternormalform* verwendet.

2.4.3 BIBO–Stabilität

Die *asymptotische Stabilität der Ruhelage* nach Satz 2.4 bezieht sich auf ein lineares, zeitinvariantes, autonomes System. Mit Hilfe der so genannten *BIBO-Stabilität* (**BIBO** – **B**ounded **I**ntput **B**ounded **O**utput) lässt sich die Stabilität des Eingangs-Ausgangsverhaltens eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form (2.82) beurteilen.

Definition 2.4 (BIBO-Stabilität) Für ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem (2.82) mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y gelte $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Das System heißt BIBO-stabil, wenn zu jeder beschränkten Eingangsfunktion $u(t)$ eine beschränkte Ausgangsfunktion $y(t)$ gehört, d.h. zu jedem finiten $a > 0$ mit $|u(t)| \leq a$ existiert ein finites $b > 0$ so, dass $|y(t)| \leq b$ gilt.

Die BIBO-Stabilität lässt sich einfach anhand der Impulsantwort (2.24)

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)1\} = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b}, \quad t > 0 \quad (2.113)$$

mit der Dirac Delta-Funktion $\delta(t)$ überprüfen. Es gilt nun folgender Satz:

Satz 2.8 (BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort) Ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem der Form (2.82) ist genau dann BIBO-stabil, wenn die Impulsantwort $g(t)$ nach (2.113) absolut integrabel ist, d.h. die folgende Ungleichung gilt

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty. \quad (2.114)$$

Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der BIBO-Stabilität erfolgt über die Übertragungsfunktion $G(s)$ von (2.90).

Satz 2.9 (BIBO-Stabilität anhand der Übertragungsfunktion) Ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem der Form (2.82) ist genau dann BIBO-stabil, wenn für alle Pole $s_i = \alpha_i + j\omega_i$ der zugehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$ von (2.90) gilt

$$\operatorname{Re}(s_i) = \alpha_i < 0. \quad (2.115)$$

Da nach Satz 2.5 jeder Pol von $G(s)$ ein Eigenwert der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ ist, folgt aus der *asymptotischen Stabilität* der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (siehe Satz 2.4), dass das System auch *BIBO-stabil* ist. Die Umkehrung gilt nur dann, wenn die Ordnung der Übertragungsfunktion $G(s)$ und die des Systems übereinstimmen!

Aufgabe 2.9 Geben Sie für das nicht BIBO-stabile, lineare, zeitinvariante Eingrößensystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

eine beschränkte Eingangsgröße $u(t)$ so an, dass die Ausgangsgröße $y(t)$ unbeschränkt ist. (**Lösung:** $u(t) = A \sin(t)$)

Aufgabe 2.10 Überprüfen Sie anhand der Sätze 2.8 und 2.9, ob die Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1}{s}, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+2}, \quad G_3(s) = s, \quad G_4(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$$

BIBO-stabil sind.

Lösung: $G_1(s)$, $G_3(s)$ sind nicht BIBO-stabil, $G_2(s)$, $G_4(s)$ sind BIBO-stabil.

2.4.4 Interpretation der Nullstellen

In der Vorlesung “Einführung in die Regelungstechnik” wurde bereits darauf eingegangen, dass die Nullstellen $s_{0,i}$ einer Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{0,i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}, \quad (2.116)$$

zwar nicht die Stabilität des Systems beeinflussen, wohl aber die Geschwindigkeit und Amplituden der Systembewegung. An dieser Stelle soll auf weitere regelungstechnisch relevante Aspekte von Nullstellen eingegangen werden.

Blockadeeigenschaft: Im Bildbereich sind die Nullstellen diejenigen (komplexen) Frequenzen $s = s_{0,i}$, für die

$$G(s_{0,i}) = 0$$

gilt, d.h., dass die Ausgangsgröße keine Komponente mit der Nullstellenfrequenz $s_{0,i}$ besitzt. Um diesen Umstand näher zu betrachten, wird ein stabiles System mit der Übertragungsfunktion (2.116) und (der Einfachheit halber) einer bestimmten reellen Nullstelle $s_{0,i}$ betrachtet. Die zu der Nullstelle korrespondierende Eingangsfunktion ist

$$u(t) = c e^{s_{0,i}t} \quad \text{bzw.} \quad U(s) = \frac{c}{s - s_{0,i}}$$

im Bildbereich mit der Konstanten $c > 0$. Die zugehörige Antwort lautet dann

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{(s - s_{0,1}) \cdots (s - s_{0,i-1})(s - s_{0,i+1}) \cdots (s - s_{0,m})}{N(s)}$$

woraus direkt ersichtlich ist, dass das zur Nullstelle korrespondierende Signal $u(t) = c e^{s_{0,i}t}$ durch das System nicht übertragen wird. Die Eigenschaft wird als *Blockadeeigenschaft* von Nullstellen bezeichnet und wird in der Nachrichtentechnik z.B. beim *Kerbfilter* ausgenutzt, um Frequenzen innerhalb eines engen Frequenzbereiches auszufiltern.

Beispiel 2.7 Betrachtet wird wieder das Pendel–Wagen–System in Aufgabe 1.12 bzw. Abbildung 1.13. Wenn man das Pendel um die obere Ruhelage linearisiert und als Ausgang die Pendelspitze

$$\Delta y = \Delta x_w + l \Delta \phi$$

betrachtet, so ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{2ls^2 + 6g}{-l(m + 4M)s^4 + 6g(m + M)s^2}.$$

Dabei ist ersichtlich, dass $G(s)$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar

$$s_0 = j\omega, \quad s_0^- = -j\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{6g}{2l}}$$

besitzt. Wenn das Eingangssignal entsprechend der Nullstellenfrequenz

$$u(t) = e^{s_0 t} + e^{s_0^- t} = \cos(\omega t)$$

gewählt wird, so ist diese Frequenz am Ausgang $y(t)$ nicht mehr vorhanden. Insbesondere kann durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen $\Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0$ erreicht werden, dass der Ausgang, also die Pendelspitze in Ruhe ist, während das Eingangssignal $u(t) = \cos(\omega t)$ eine Dauerschwingung des Wagens und des Pendels bewirkt! Abbildung 2.6 zeigt dieses Verhalten beispielhaft für eine halbe Periode $t \in [0, \frac{\pi}{\omega}]$.

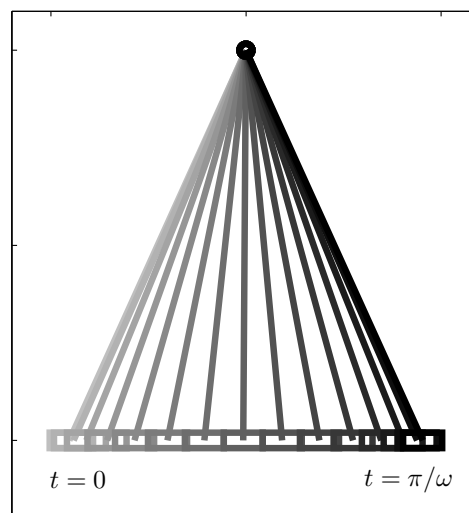


Abbildung 2.6: Stationärer Ausgang bei Nullstellenfrequenz in Beispiel 2.7.

Gegenläufiges Ein-/Ausgangsverhalten: Eine regelungstechnische Schwierigkeit tritt bei Nullstellen in der rechten Halbebene auf, d.h. wenn Nullstellen $s_{0,i}$ mit $\text{Re}(s_{0,i}) > 0$ existieren. In diesem Fall spricht man auch von einem *nichtminimalphasigen* System. Dazu wird die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - c}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.117)$$

mit der Nullstelle $s_0 = c$ betrachtet. Es wird angenommen, dass das Nennerpolynom ein Hurwitzpolynom ist und somit asymptotische Stabilität vorliegt.

Im Folgenden soll die Sprungantwort von $G(s)$ genauer betrachtet werden. Anhand des Anfangswertsatzes der Laplace-Transformation

$$\lim_{t \rightarrow 0+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) U(s)$$

kann man sich leicht davon überzeugen, dass für die Ableitung $y^{(i)}(t) = \frac{d^i}{dt^i}y(t)$ mit $y^{(j)}(0+) = 0, j = 0, 1, \dots, i-1$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} y^{(i)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{i+1} G(s) U(s), \quad i > 0 \quad (2.118)$$

gelten muss. Im Hinblick auf den Differenzgrad $n-1$ der Übertragungsfunktion (2.117) gilt für die Sprungantwort $h(t)$ offensichtlich

$$\lim_{t \rightarrow 0+} h^{(i)}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} h^{(n-1)}(t) = 1. \quad (2.119)$$

Betrachtet man zusätzlich den stationären Endwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) U(s) = -\frac{c}{a_0}$$

so fällt im Vergleich zur Anfangsableitung $y^{(n-1)}(t) = h^{(n-1)}(t) = 1$ auf, dass die Sprungantwort für eine Nullstelle in der rechten Halbebene ($c > 0$) zunächst in die *falsche Richtung* startet.

Auch wenn diese Untersuchung für mehrfache Nullstellen in der rechten Halbebene schwieriger wird, so kann man doch festhalten, dass das Gegenschwingverhalten charakteristisch ist für nichtminimalphasige Systeme.

Beispiel 2.8 Betrachtet wird die Sprungantwort der Übertragungsfunktion

$$G(s) = -\frac{2}{c} \frac{s-c}{(s+1)(s+2)}$$

mit der Nullstelle $s_0 = c$ und den Polstellen $s_1 = -1$ und $s_2 = -2$. Für $c \geq 0$ bzw. $c < 0$ ist das System also nichtminimalphasig bzw. minimalphasig. Der stationäre Wert der Sprungantwort ergibt sich aufgrund der Normierung zu $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$, während die Anfangssteigung

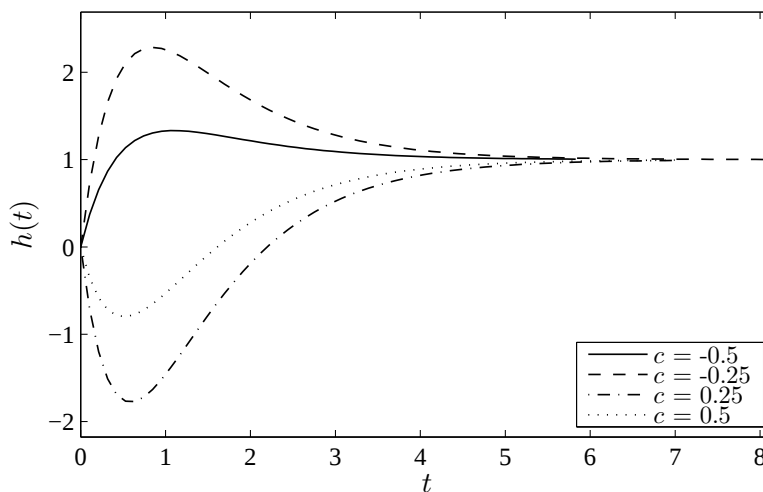
$$\lim_{t \rightarrow 0+} \dot{h}(t) = -\frac{2}{c} \begin{cases} < 0 & \text{falls } c > 0 \\ > 0 & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

beträgt. Abbildung 2.7 zeigt die Sprungantwort für verschiedene Parameterwerte c , für die das gleich- bzw. gegenläufige Ein-/Ausgangsverhalten gut zu erkennen ist.

Nullstellen im Mehrgrößenfall: Bei Mehrgrößensystemen (2.94), bei denen das Eingangs-/Ausgangsverhalten durch eine Übertragungsmatrix (2.98) bzw. (2.99) beschrieben wird, ist die Definition und Untersuchung von Nullstellen ungleich komplizierter. Man unterscheidet in diesem Fall zwischen

- Übertragungsnullstellen,
- invariante Nullstellen,
- Eingangs-/Ausgangs-Entkopplungsnullstellen .

Für weitergehende Informationen zu Nullstellen im Mehrgrößenfall sei auf die einschlägige Literatur am Ende des Kapitels verwiesen.

Abbildung 2.7: Sprungantwort von $G(s)$ in Beispiel 2.8.

2.5 Steuerbarkeit

Den nachfolgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.120)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sowie den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ zu Grunde.

Definition 2.5 (Steuerbarkeit) *Man nennt das lineare System (2.120) vollständig steuerbar, wenn ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ eine stückweise stetige Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$, $0 \leq t \leq T$ mit der endlichen Zeit T so existiert, dass gilt $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$.*

2.5.1 Steuerbarkeit nach Kalman

Um die Eigenschaft der Steuerbarkeit eines linearen Systems (2.120) zu untersuchen, betrachte man zunächst die allgemeine Lösung von (2.120) zum Zeitpunkt t

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.121)$$

mit der Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ (vergleiche dazu Satz 2.1). Setzt man nun $t = T$ und o.B.d.A. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ in (2.121) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \int_0^T \Phi(T - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{(T - \tau)^k}{k!} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \underbrace{\int_0^T \frac{(T - \tau)^k}{k!} \mathbf{u}(\tau) d\tau}_{\mathbf{r}_k} . \end{aligned} \quad (2.122)$$

Für eine beliebige Steuertrajektorie $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, T]$ mit der festen Endzeit T sind die Vektoren $\mathbf{r}_k$ konstante m -dimensionale Vektoren. Aus (2.122) erkennt man also, dass sich $\mathbf{x}(T)$ als Linearkombination der Spaltenvektoren von $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots$ darstellen lässt. Da wegen der Steuerbarkeit von (2.120) $\mathbf{x}(T)$ ein beliebiger Punkt des $\mathbb{R}^n$ ist, müssen die Spaltenvektoren von $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots$ den $\mathbb{R}^n$ aufspannen. Mit anderen Worten, die Matrix

$$[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}, \mathbf{A}^n\mathbf{B}, \mathbf{A}^{n+1}\mathbf{B}, \dots] \quad (2.123)$$

muss den Rang n besitzen. Um dieses Zwischenergebnis weiterzuführen, kann das *Cayley–Hamilton–Theorem* verwendet werden:

Satz 2.10 (Satz von Cayley–Hamilton) *Bezeichnet*

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \dots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so genügt $\mathbf{A}$ der Beziehung

$$p(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + \dots + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0}. \quad (2.124)$$

Der Satz von Cayley–Hamilton besagt, dass die Matrix $\mathbf{A}^n$ durch eine Linearkombination der niedrigeren Potenzen ausgedrückt werden kann, bei der die Koeffizienten denen des charakteristischen Polynoms entsprechen.

Da die Matrizen $\mathbf{A}^n\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{B}, \dots$ gemäß Satz 2.10 offensichtlich keine weiteren linear unabhängigen Einträge in der Matrix (2.123) liefern, ist es also ausreichend, in der Rangüberprüfung von (2.123) lediglich die Matrixeinträge $\mathbf{B}$ bis $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ zu betrachten. Diese Überlegungen führen auf den nachfolgenden Satz:

Satz 2.11 (Steuerbarkeitskriterium nach Kalman) *Das System (2.120) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die sogenannte Steuerbarkeitsmatrix*

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (2.125)$$

den Rang n hat.

Um zu zeigen, dass Satz 2.11 auch hinreichend ist, also die Rangbedingung $\text{Rang}(\mathbf{Q}_S) = n$ auch die Steuerbarkeit impliziert, wird die sogenannte *Gramsche Matrix (controllability gramian)*

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}\tau})^\top d\tau \quad (2.126)$$

betrachtet. Mit ähnlichen Argumenten wie im oberen Teil kann gezeigt werden, dass $\mathbf{G}$ für alle Zeiten $T > 0$ regulär ist, wenn $\text{Rang}(\mathbf{Q}_S) = n$ erfüllt ist. Damit kann man für eine gewünschte Zeit T durch Einsetzen der Eingangsfunktion

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}(T-t)})^\top \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{x}(T) - e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0) \quad (2.127)$$

in die Gleichung (2.122)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(T) &= \Phi(T)\mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
 &= \Phi(T)\mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(T-\tau)\mathrm{d}\tau \\
 &= \Phi(T)\mathbf{x}_0 + \underbrace{\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}\tau})^\top \mathrm{d}\tau}_{=\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{x}(T) - e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(T)
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

zeigen, dass das System (2.120) in den gewünschten Zustand $\mathbf{x}(T)$ übergeführt wird.

Wenn die Steuerbarkeit gegeben ist, so existieren – neben (2.127) – unendlich viele Steuerungen, um das System (2.120) von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{x}_T$ zu steuern. Ein interessanter Aspekt der speziellen Steuerung (2.127) ist, dass sie den Übergang im Zeitintervall $[0, T]$ mit minimalen Energieaufwand realisiert und somit das Kostenfunktional

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T \mathbf{u}^\top(\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

minimiert.

Beispiel 2.9 Das linearisierte Modell des inversen Pendel–Wagen–Systems in Aufgabe 1.12 soll auf Steuerbarkeit untersucht werden. Mit der Systemmatrix $\mathbf{A}$ und dem Steuervektor $\mathbf{b}$ aus (1.68) ergibt sich die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-6}{l(m+4M)} & 0 & \frac{-36g(m+M)}{l^2(m+4M)^2} \\ \frac{-6}{l(m+4M)} & 0 & \frac{-36g(m+M)}{l^2(m+4M)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{m+4M} & 0 & \frac{18mg}{l(m+4M)^2} \\ \frac{4}{m+4M} & 0 & \frac{18mg}{l(m+4M)^2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.129}$$

Die Determinante

$$\det(\mathbf{Q}_S) = \frac{1296g^2}{l^4(m+4M)^4} \neq 0$$

zeigt, dass $\mathbf{Q}_S$ regulär und das linearisierte Pendel in der oberen Ruhelage steuerbar ist.

Die Überprüfung der Steuerbarkeit anhand der Steuerbarkeitsmatrix von (2.125) (siehe auch den MATLAB-Befehl `ctrb`) kann insbesondere bei größeren Systemen numerisch problematisch werden. Aus diesem Grund wird die Erreichbarkeit bei diesen Systemen sehr oft direkt über die Gramsche Matrix von (2.126) untersucht. Dazu nachfolgender Satz:

Satz 2.12 (Steuerbarkeit über die Gramsche Matrix) Das System (2.120) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Gramsche Matrix (controllability gramian)

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}\tau})^\top \mathrm{d}\tau \tag{2.130}$$

regulär ist.

Wenn die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ von (2.120) lauter Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt (man nennt $\mathbf{A}$ dann auch *Hurwitz-Matrix*), dann kann die Gramsche Matrix (2.130) numerisch stabil mit Hilfe einer *Lyapunov-Gleichung* berechnet werden. Da nun angenommen wurde, dass die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist, ist die Existenz des Integrals $\mathbf{G}_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{G}$ garantiert und $\mathbf{G}_\infty$ ist Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_\infty + \mathbf{G}_\infty\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \mathbf{0} \quad (2.131)$$

(man vergleiche dazu den MATLAB-Befehl `gram`). Um (2.131) zu zeigen, setze man $\mathbf{G}_\infty$ von (2.130) in (2.131) ein

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \underbrace{\mathbf{A}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}\tau})^\top + e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top (\mathbf{A}e^{\mathbf{A}\tau})^\top}_{\frac{d}{d\tau} (e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}\tau})^\top)} d\tau + \mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \mathbf{0} \quad (2.132)$$

und erhält schlussendlich das Ergebnis

$$\underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}T}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top (e^{\mathbf{A}T})^\top - \mathbf{B}\mathbf{B}^\top + \mathbf{B}\mathbf{B}^\top}_{= \mathbf{0}} = \mathbf{0} . \quad (2.133)$$

2.5.2 Steuerbarkeit nach Hautus

Ein weiteres Steuerbarkeitskriterium wurde von *Hautus* hergeleitet, das zusätzlich zur Aussage ob das System (2.120) steuerbar ist, gegebenenfalls auch angibt, welcher Eigenwert nicht steuerbar ist.

Satz 2.13 (Steuerbarkeitskriterium nach Hautus) *Das System (2.120) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Bedingung*

$$\text{Rang}([\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}]) = n \quad (2.134)$$

für alle Eigenwerte λ_i , $i = 1, \dots, n$ der Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt ist.

Im Gegensatz zum Kalman-Kriterium (Satz 2.11), bei dem der Rang einer $(n \times nm)$ -Matrix überprüft werden muss, werden beim Hautus-Kriterium die einzelnen $(n \times n+m)$ -Matrizen $[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}]$ auf ihren Rang überprüft.

Somit kann man durch das Hautus-Kriterium eine Aussage darüber erhalten, welche Eigenwerte nicht steuerbar sind. Des Weiteren bietet sich das Hautus-Kriterium für Systeme an, bei denen Parameter in den Systemmatrizen vorkommen, siehe Beispiel 2.9.

2.5.3 Regelungsnormalform

Im Folgenden wird das lineare Eingrößensystem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + du \end{aligned} \quad (2.135)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem skalaren Eingang $u \in \mathbb{R}$ und dem skalaren Ausgang $y \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Die Regelungsnormalform wurde bereits in Abschnitt 2.4.2 als Realisierung einer Übertragungsfunktion $G(s)$ betrachtet. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie ein lineares System (2.135) im Zustandsraum mittels einer regulären Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1} \quad (2.136)$$

auf die Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}\mathbf{b}} u \\ y &= [b_0 - a_0 b_n \quad \cdots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n] \tilde{\mathbf{x}} + b_n u \end{aligned} \quad (2.137)$$

transformiert werden kann. Die Steuerbarkeitsmatrix spielt dabei eine wichtige Rolle.

Aus (2.137) ist ersichtlich, dass der erste Zustand $\tilde{x}_1$ von $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]^\top$ n -mal differenziert werden kann, bevor der Eingang u auftaucht. Im Folgenden wird $\tilde{x}_1$ durch die Gleichung

$$\tilde{x}_1 = \mathbf{t}^\top \mathbf{x} \quad (2.138)$$

angesetzt, wobei der Vektor $\mathbf{t}$ so bestimmt werden soll, dass der Eingang u erst in der n -ten Zeitableitung auftritt. Sukzessive Ableitung von $\tilde{x}_1$ nach der Zeit t und Vergleich mit (2.137) liefert

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}^\top \mathbf{b} u & \text{mit} & \quad \mathbf{t}^\top \mathbf{b} \stackrel{!}{=} 0 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \mathbf{t}^\top \mathbf{A}\mathbf{b} u & & \quad \mathbf{t}^\top \mathbf{A}\mathbf{b} \stackrel{!}{=} 0 \\ &\vdots & & \\ \tilde{x}_1^{(n-1)} &= \tilde{x}_n = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x} + \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b} u & & \quad \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b} \stackrel{!}{=} 0 \\ \tilde{x}_1^{(n)} &= \dot{\tilde{x}}_n = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^n \mathbf{x} + \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} u & & \quad \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Die Zwangsbedingungen lassen sich in der Vektorform

$$\mathbf{t}^\top \underbrace{[\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]}_{\mathbf{Q}_S} = [0, \dots, 0, 1]$$

in Abhängigkeit der Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ zusammenfassen. Falls $\mathbf{Q}_S$ regulär ist, ergibt sich

$$\mathbf{t}^\top = [0, \dots, 0, 1] \mathbf{Q}_S^{-1}. \quad (2.140)$$

Offensichtlich bestimmt sich der erste Zustand $\tilde{x}_1 = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}$ der Regelungsnormalform mit Hilfe der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$. Somit gilt der folgende Satz:

Satz 2.14 (Transformation auf Regelungsnormalform) *Das lineare System (2.135) kann durch die Transformation (2.136) mit der Transformationsmatrix*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^\top \\ \mathbf{t}^\top \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^\top = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_S^{-1}, \quad \mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (2.141)$$

auf die Regelungsnormalform (2.137) gebracht werden, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ regulär ist. Dabei stellt $\mathbf{t}^\top$ die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix dar.

Vorteilhaft bei der Regelungsnormalform ist, dass sie einfach aus einer Übertragungsfunktion $G(s)$ bestimmt werden kann, wie in Abschnitt 2.4.2 gezeigt wurde. Des Weiteren ist es charakteristisch für die Regelungsnormalform, dass der Eingang u nur den letzten Zustand von $\tilde{\mathbf{x}}$ beeinflusst, was insbesondere für den Reglerentwurf von Vorteil ist.

Die Regelungsnormalform lässt sich auch für Mehrgrößensysteme (2.120) angeben. Dies wird im nächsten Kapitel im Rahmen des Entwurfs von Zustandsreglern behandelt.

Beispiel 2.10 *Betrachtet wird erneut das inverse Pendel in Abbildung 1.13 mit der regulären Steuerbarkeitsmatrix (2.129). Die inverse Steuerbarkeitsmatrix lautet*

$$\mathbf{Q}_S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ml}{2} & 0 & m+M \\ \frac{ml}{2} & 0 & m+M & 0 \\ 0 & -\frac{l^2(m+4M)}{9g} & 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} \\ -\frac{l^2(m+4M)}{9g} & 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.142)$$

Mit der letzten Zeile

$$\mathbf{t}^\top = \begin{bmatrix} -\frac{l^2(m+4M)}{9g} & 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

und der Dynamikmatrix aus (1.68) lautet die Transformationsmatrix (2.141)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{l^2(m+4M)^2}{9g} & 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} & 0 \\ 0 & -\frac{l^2(m+4M)^2}{9g} & 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} \\ -\frac{l(m+4M)}{6g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l(m+4M)}{6g} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

und schließlich die Regelungsnormalform (2.137)

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (2.145)$$

2.6 Beobachtbarkeit

Über die Steuerbarkeit eines linearen Systems erhält man Aussagen über die Wirkung des Einganges auf den Systemzustand. Mit Hilfe der Beobachtbarkeit wird untersucht, welche Kenntnis über den Systemzustand man prinzipiell erhalten kann, wenn ausschließlich die Ausgangsgrößen eines dynamischen Systems gemessen werden können.

Den nachfolgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.146}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ sowie den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ zu Grunde.

Definition 2.6 (Beobachtbarkeit) *Man nennt das System (2.146) vollständig beobachtbar, wenn aus der Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ auf dem Intervall $0 \leq t \leq T$ sowie der Systemmatrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ errechnet werden kann.*

2.6.1 Beobachtbarkeit nach Kalman

Nachfolgender Satz gibt nun ein auf Basis der Systemmatrizen $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ überprüfbares Kriterium für die Beobachtbarkeit des Systems (2.146) an:

Satz 2.15 (Beobachtbarkeit nach Kalman) *Das System (2.146) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die sogenannte Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}\tag{2.147}$$

den Rang n hat.

Der Beweis von Satz 2.15 orientiert sich im Wesentlichen am Vorgehen bei der Steuerbarkeit und soll deswegen lediglich skizziert werden. In einem ersten Schritt betrachte man die allgemeine Lösung für die Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ von (2.146) zum Zeitpunkt t

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 + \underbrace{\int_0^t \mathbf{C}\Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)}_{\mathbf{v}(t)}\tag{2.148}$$

mit der Transitionsmatrix $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ (vergleiche dazu Satz 2.1). Da in (2.148) nach Definition 2.6 der Ausdruck $\mathbf{v}(t)$ für $0 \leq t \leq T$ bekannt ist, kann (2.148) in der Form

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{y}}(t)}_{\mathbf{y}(t) - \mathbf{v}(t)} = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0$$

umgeschrieben werden und die Untersuchung der Beobachtbarkeit reduziert sich auf die Frage, ob aus Gleichung (2.149) $\mathbf{x}_0$ eindeutig bestimmt werden kann, wobei $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq T$ bekannt ist. Aus diesem Grund kann im Weiteren ohne Einschränkung der Allgemeinheit bei der Beobachtbarkeitsuntersuchung des Systems (2.146) der Eingang $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$, $0 \leq t \leq T$, gesetzt werden, d.h.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0. \quad (2.149)$$

Beweis von Satz 2.15 (Notwendigkeit): Die Beweisführung erfolgt durch Widerspruch, d.h., man nimmt an, $\text{Rang}(\mathbf{Q}_B) < n$. Dann existiert ein nichttrivialer Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ so, dass gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.150)$$

Dabei sei angemerkt, dass über das Cayley–Hamilton–Theorem jede weitere Matrixpotenz $\mathbf{A}^k$, $k \geq n$ durch eine Linearkombination (2.124) ausgedrückt werden kann, so dass (2.150)

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad k = n, n+1, \dots \quad (2.151)$$

impliziert. Mit der Reihendarstellung

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}$$

der Transitionsmatrix erkennt man unmittelbar, dass für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ und $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$, $t \in [0, T]$ die Beziehung (2.149) in der Form

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}\mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (2.152)$$

geschrieben werden kann. Dies bedeutet, dass zwei verschiedene Anfangswerte, nämlich $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, zur selben Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ führen und daher am Ausgang nicht unterschieden werden können. Da aber vorausgesetzt wurde, dass das System (2.146) vollständig beobachtbar ist und da wegen der Linearität von (2.146) die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewährleistet ist, muss gelten $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, was aber ein Widerspruch zur Annahme ist. ■

Beweis von Satz 2.15 (Hinlänglichkeit): Um zu zeigen, dass Satz 2.15 auch hinreichend ist, also die Rangbedingung $\text{Rang}(\mathbf{Q}_B) = n$ die Beobachtbarkeit impliziert, wird die zugehörige *Gramsche Matrix* (*observability gramian*)

$$\bar{\mathbf{G}} = \int_0^T (e^{\mathbf{A}\tau})^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (2.153)$$

eingeführt. Wie im Falle der Steuerbarkeit kann gezeigt werden, dass $\bar{\mathbf{G}}$ regulär ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ den Rang n besitzt. Multipliziert man nun (2.149) von links mit $\bar{\mathbf{G}}^{-1} (e^{\mathbf{A}t})^\top \mathbf{C}^\top$ und integriert von 0 bis T , dann erhält man

$$\int_0^T \bar{\mathbf{G}}^{-1} (e^{\mathbf{A}t})^\top \mathbf{C}^\top \tilde{\mathbf{y}}(t) dt = \underbrace{\bar{\mathbf{G}}^{-1} \int_0^T (e^{\mathbf{A}t})^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt}_{\bar{\mathbf{G}}} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \quad (2.154)$$

und hat damit eine explizite Vorschrift gegeben, wie man $\mathbf{x}_0$ berechnet. ■

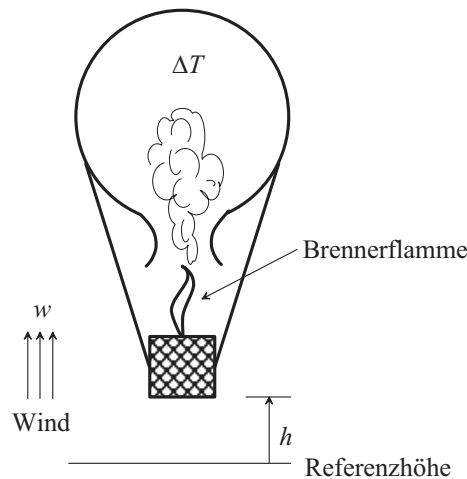


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung eines Heißluftballons (Aufgabe 2.12).

Aufgabe 2.11 Leiten Sie die Rangbedingung für die Beobachtbarkeitsmatrix (2.147) auf einem alternativen Weg her, indem Sie aus Kenntnis der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, n-1$ und der Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u}^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, n-1$ versuchen, den Zustand $\mathbf{x}(t)$ des Systems (2.146) zum Zeitpunkt t zu rekonstruieren.

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit an Hand der Beobachtbarkeitsmatrix von (2.147) (siehe auch den MATLAB-Befehl `obsv`) kann insbesondere bei größeren Systemen numerisch problematisch werden. Aus diesem Grund wird die Beobachtbarkeit bei diesen Systemen oft direkt über die Gramsche Matrix von (2.153) untersucht (man vergleiche dazu wiederum den MATLAB-Befehl `gram`). Dazu nachfolgender Satz:

Satz 2.16 (Beobachtbarkeit über die Gramsche Matrix) Das System (2.146) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Gramsche Matrix (observability gramian)

$$\bar{\mathbf{G}} = \int_0^T (e^{\mathbf{A}\tau})^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (2.155)$$

regulär ist. Wenn die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist, dann lässt sich $\bar{\mathbf{G}}_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{G}}$ aus der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{G}}_\infty + \bar{\mathbf{G}}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{C}^\top \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (2.156)$$

errechnen.

Aufgabe 2.12 Die Bewegung eines Heißluftballons nach Abbildung 2.8 wird näherungsweise durch ein mathematisches Modell der Form

$$\begin{aligned} \Delta \dot{T} &= -\frac{1}{\tau_1} \Delta T + u \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\tau_2} (v - w) + \sigma \Delta T \\ \dot{h} &= v \end{aligned} \quad (2.157)$$

mit der Temperaturdifferenz zur Gleichgewichtstemperatur ΔT , der Höhe des Ballons h , der Vertikalgeschwindigkeit des Ballons v , der vertikalen Windgeschwindigkeit w (Störgröße) sowie der zur zugeführten Wärme proportionalen Stellgröße u .

- (1) Ist es möglich, die Temperaturänderung ΔT und eine konstante Windgeschwindigkeit w allein auf Grund der Messung der Höhe h zu beobachten?

Lösung: Erweitern Sie für die konstante Windgeschwindigkeit w das mathematische Modell um die Differenzialgleichung $\dot{w} = 0$. Für das erweiterte Modell lautet die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma & -\frac{1}{\tau_2} & 0 & \frac{1}{\tau_2} \\ -\frac{\sigma}{\tau_1} - \frac{\sigma}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_2} & 0 & -\frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\mathbf{Q}_B) = \frac{-\sigma}{\tau_1 \tau_2}$$

und damit ist das erweiterte System für $\sigma \neq 0$ mit der Messgröße $y = h$ vollständig beobachtbar.

- (2) Ist das System (2.157) mit der Eingangsgröße u vollständig steuerbar?

Lösung: ja für $\sigma \neq 0$

- (3) Ist das System (2.157) mit der Eingangsgröße w vollständig steuerbar?

Lösung: nein

Aufgabe 2.13 Untersuchen Sie die Beobachtbarkeit des linearisierten Modells (1.12) des Pendel–Wagen–Systems in Abbildung 1.13 für die Ausgänge

$$\Delta y_1 = \Delta x_w \quad \text{bzw.} \quad \Delta y_2 = \Delta \phi.$$

Lösung: beobachtbar bzgl. Δy_1 , nicht beobachtbar bzgl. Δy_2 – direkt ersichtlich an

$$\mathbf{Q}_{B,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3mg}{m+4M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3mg}{m+4M} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{B,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.6.2 Beobachtbarkeit nach Hautus

Wie im Falle der Steuerbarkeit gibt es auch bei der Beobachtbarkeit neben dem Kalman–Kriterium noch weitere Kriterien, um die Beobachtbarkeit zu untersuchen. An dieser Stelle sei zusätzlich das *Hautus–Kriterium* erwähnt.

Satz 2.17 Das System (2.120) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (2.158)$$

für alle Eigenwerte λ_i , $i = 1, \dots, n$ der Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt ist.

Ähnlich dem Hautus-Kriterium bei der Steuerbarkeit (Satz 2.13), kann mit Hilfe die Rangbedingung (2.158) gegebenenfalls überprüft werden, welche Eigenvorgänge des Systems nicht beobachtbar sind.

2.6.3 Beobachtungsnormalform

In Analogie zu Abschnitt 2.5.3 wird im Folgenden von einem linearen Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + du\end{aligned}\quad (2.159)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem skalaren Eingang $u \in \mathbb{R}$ und dem skalaren Ausgang $y \in \mathbb{R}$ ausgegangen.

Die Beobachtungsnormalform wurde bereits in Abschnitt 2.4.2 als Realisierung einer Übertragungsfunktion $G(s)$ betrachtet. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie ein lineares System (2.159) im Zustandsraum mittels einer regulären Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} \quad (2.160)$$

auf die Beobachtungsnormalform

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{b}} u \\ y &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \tilde{\mathbf{x}} + b_n u\end{aligned}\quad (2.161)$$

transformiert werden kann. Die Beobachtbarkeitsmatrix spielt dabei eine wichtige Rolle, wie im folgenden Satz zu sehen ist:

Satz 2.18 (Transformation auf Beobachtungsnormalform) *Das lineare zeitinvariante System (2.159) kann durch die Transformation (2.160) mit*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v} \quad \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{v}], \quad \mathbf{v} = \mathbf{Q}_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

auf die Beobachtungsnormalform (2.161) gebracht werden, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ regulär ist. Dabei stellt $\mathbf{v}$ die letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix dar.

In Analogie zur Regelungsnormalform (2.137) ist die Beobachtungsnormalform besonders gut für den *Beobachterentwurf* geeignet, der im späteren Verlauf der Vorlesung behandelt wird. Charakteristisch für die Beobachtungsnormalform ist, dass die Ausgangsgröße y lediglich von der letzten Komponente des Zustands $\tilde{\mathbf{x}}$ abhängt.

Die Beobachtungsnormalform lässt sich auch für Mehrgrößensysteme (2.146) angeben. Dafür sei auf die am Ende des Kapitels angegebene Literatur verwiesen.

2.7 Dualitätsprinzip

Es wurde bereits in Abschnitt 2.4.2 gezeigt, dass eine skalare Übertragungsfunktion $G(s)$ unverändert bleibt, wenn man sie transponiert, es gilt also

$$G(s) = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{b}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{c} + d. \quad (2.163)$$

Mit dieser Motivation kann man auch im Mehrgrößensystem ($m \geq 1$) das sogenannte *primale* und *duale* System

$$\underbrace{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}}_{\text{primales System}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_D &= \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_D + \mathbf{C}^\top \mathbf{u}_D \\ \mathbf{y}_D &= \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_D + \mathbf{D}^\top \mathbf{u}_D \end{aligned}}_{\text{duales System}} \quad (2.164)$$

definieren. Für die Übertragungsmatrizen gilt $\mathbf{G}_D(s) = \mathbf{G}^\top(s)$, wie sich durch Transponieren von $\mathbf{G}(s)$ leicht zeigen lässt:

$$\mathbf{G}^\top(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D})^\top = \mathbf{B}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{C}^\top + \mathbf{D}^\top = \mathbf{G}_D(s). \quad (2.165)$$

Darüberhinaus gilt die Eigenschaft, dass die Steuerbarkeit (Beobachtbarkeit) des primalen Systems äquivalent zur Beobachtbarkeit (Steuerbarkeit) des dualen Systems ist. Dies ist anhand der transponierten Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrizen

$$\mathbf{Q}_S^\top = \mathbf{Q}_{B,D}, \quad \mathbf{Q}_B^\top = \mathbf{Q}_{S,D}$$

leicht zu zeigen und lässt sich in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2.19 (Steuerbarkeit/Beobachtbarkeit des dualen Systems) *Das duale System ist genau dann steuerbar (beobachtbar), wenn das primale System beobachtbar (steuerbar) ist.*

Literatur

- [1] C.T. Chen. *Control System Design*. Pond Woods Press, New York, 1987.
- [2] S.W. Director und R.A. Rohrer. *Introduction to System Theory*. McGraw-Hill, New York, 1972.
- [3] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig, Heidelberg, 8th edition, 1994.
- [4] G. Ludyk. *Theoretische Regelungstechnik 1*. Springer, Berlin, 1995.
- [5] D.G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [6] J. Lunze. *Regelungstechnik 1*. Springer, Berlin, 5th edition, 2005.
- [7] J. Lunze. *Regelungstechnik 2*. Springer, Berlin, 4th edition, 2006.
- [8] L. Padulo und M.A. Arbib. *System Theory*. W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1974.
- [9] W.J. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York, 1991.
- [10] W.J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2nd edition, 1996.
- [11] M. Zeitz. Differenzielle Flachheit: Eine nützliche Methodik auch für lineare SISO-systeme. *at-Automatisierungstechnik*, 58(1):5–13, 2010.

Kapitel 3

Zustandsregler

In der Vorlesung “Einführung in die Regelungstechnik” wurden vorrangig *Ausgangsregelungen* für Eingrößensysteme ($m = p = 1$) betrachtet, bei denen die Ausgangsgröße y gemessen wird. Mit der Kenntnis von y und der vorgegebenen Führungsgröße w berechnet der Regler als dynamisches System die Stellgröße u , siehe Abbildung 3.1.

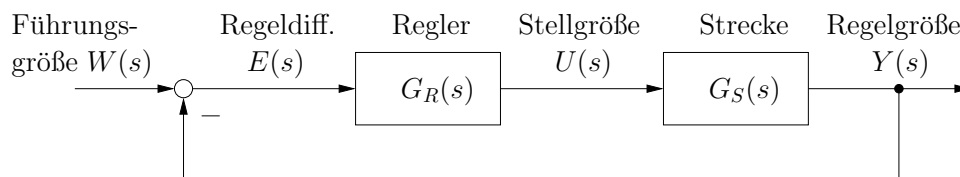


Abbildung 3.1: Ausgangsregelung (Eingrößenfall $m = p = 1$).

Setzt man nun voraus, dass der gesamte Zustand eines Systems messtechnisch erfassbar ist, dann ist es möglich, einen so genannten *Zustandsregler* zu entwerfen. Unter einem linearen Zustandsregelgesetz versteht man eine dynamiklose, lineare Abhängigkeit der Stellgröße $\mathbf{u}$ von den Zustandsgrößen $\mathbf{x}$ und Führungsgrößen $\mathbf{w}$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w}. \quad (3.1)$$

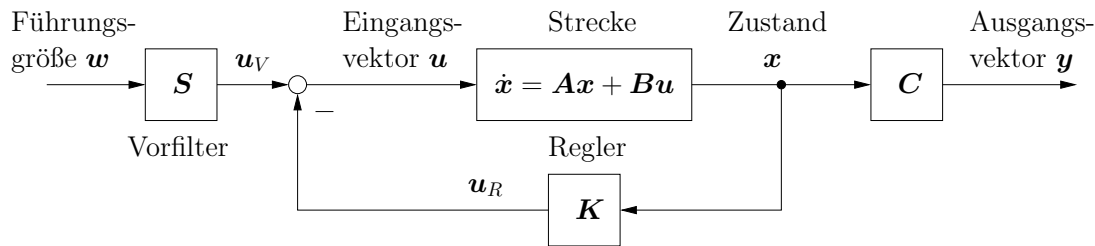
In Abbildung 3.2 ist der Regelkreis mit der $(m \times n)$ -Rückführmatrix $\mathbf{K}$ und der $(m \times p)$ -Vorfiltermatrix $\mathbf{S}$ dargestellt.

In den folgenden Betrachtungen wird ein lineares Mehrgrößensystem mit dem Eingangsvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und ohne Durchgriff ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) im Ausgangsvektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ betrachtet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Beim Auslegen eines Zustandsreglers sind insbesondere die folgenden regelungstechnischen Ziele von Interesse:

- (a) Stabilität des geregelten Systems

Abbildung 3.2: Zustandsregler (Mehrgrößenfall $m, p \geq 1$).

- (b) Verbesserung des Eingangs-/Ausgangsverhaltens
- (c) Erhöhung der Dämpfung
- (d) Erzielung eines verbesserten transienten Verhaltens
- (e) Kompensation von Störungen
- (f) Genaue Führungsgrößenfolge.

Insbesondere im Hinblick auf Punkt (a) soll die Reglermatrix $\mathbf{K}$ so ausgelegt werden, dass der geschlossene Kreis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w}) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BS}\mathbf{w} \quad (3.3)$$

asymptotisch stabil ist, die Eigenwerte λ_i der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ also in der linken Halbebene liegen.

Der Punkt (e) wird in Abschnitt 3.6 behandelt, während Punkt (f) im letzten Kapitel des Skriptes betrachtet wird. An dieser Stelle wird davon ausgegangen, dass die Führungsgröße $\mathbf{w}$ konstant ist und dass keine Störungen auf das System (3.2) wirken.

3.1 Stationäres Vorfilter

Falls mit einem Zustandsregler der Ursprung eines linearen Systems (3.2) stabilisiert werden soll, ist es ausreichend, die Verstärkungsmatrix $\mathbf{K}$ im Rückführgesetz (3.1) zu bestimmen. Im allgemeinen Fall einer Führungsgröße $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ kommt ein *Vorfilter* zum Einsatz, siehe Abbildung 3.2.

Wenn davon ausgegangen wird, dass die Reglermatrix $\mathbf{K}$ bekannt ist, gilt im geschlossenen Kreis (3.3). Das Vorfilter soll nun so entworfen werden, dass keine bleibende Regelabweichung am stationären Ausgang

$$\mathbf{y}_\infty = \mathbf{C}\mathbf{x}_\infty + \mathbf{D}\mathbf{u}_\infty, \quad (3.4)$$

d.h. für $t \rightarrow \infty$, auftritt. Mit der stationären Rückführung $\mathbf{u}_\infty = -\mathbf{K}\mathbf{x}_\infty + \mathbf{S}\mathbf{w}$ ist der stationäre Zustand $\mathbf{x}_\infty$ durch

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}_\infty + \mathbf{BS}\mathbf{w}$$

bestimmt. Wenn der geschlossene Kreis (3.3) asymptotisch stabil ist, liegen alle Eigenwerte λ_i der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ in der linken Halbebene. Somit ist $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ regulär, so dass

$$\mathbf{x}_\infty = (\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{BS} \mathbf{w}$$

gilt. Der stationäre Ausgang (3.4) lautet also

$$\mathbf{y}_\infty = \mathbf{C}(\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{BS} \mathbf{w} \stackrel{!}{=} \mathbf{I} \mathbf{w}. \quad (3.5)$$

Aus der Zwangsbedingung $\mathbf{y}_\infty = \mathbf{I} \mathbf{w} = \mathbf{w}$ kann die Vorfiltermatrix $\mathbf{S}$ durch Inversion bestimmt werden

$$\boxed{\mathbf{S} = [\mathbf{C}(\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}]^{-1}}. \quad (3.6)$$

Die Invertierbarkeit des Klammerausdruckes folgt aus der Annahme, dass jedes gewünschte $\mathbf{y}_\infty$ in (3.5) durch geeignete Wahl von $\mathbf{u}_V = \mathbf{S} \mathbf{w}$ (siehe Abbildung 3.2) einstellbar ist.

3.2 Direkte Eigenwertvorgabe im Eingrößenfall

Der Grundgedanke der Eigenwert- bzw. Polvorgabe besteht darin, die Eigenwerte des geschlossenen Kreises (3.3) vorzugeben, um z.B. eine gewünschte Dynamik zu erzielen. In diesem Abschnitt wird ein lineares System mit skalarer Stellgröße u

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

betrachtet. Setzt man nun das Zustandsregelgesetz

$$u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} + S w \quad (3.8)$$

an, so wird beim Reglerentwurf durch Polvorgabe die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^\top$ so gewählt, dass die Matrix $\mathbf{A}_R$ des geschlossenen Kreises

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^\top)}_{\mathbf{A}_R} \mathbf{x} + S \mathbf{b} w, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

die gewünschten Eigenwerte λ_i^* , $i = 1, \dots, n$ besitzt.

Die einfachste Möglichkeit der Polvorgabe besteht darin, die Reglerverstärkung durch Koeffizientenvergleich des gewünschten charakteristischen Polynoms und des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises (3.9) zu berechnen.

Dazu betrachtet man das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises (3.9)

$$\begin{aligned} q(\lambda, \mathbf{k}) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^\top) \\ &= q_0(\mathbf{k}) + q_1(\mathbf{k}) \lambda + \dots + q_{n-1}(\mathbf{k}) \lambda^{n-1} + \lambda^n, \end{aligned} \quad (3.10)$$

bei dem die Koeffizienten $q_i(\mathbf{k})$ von den (noch unbekannten) Elementen der Reglerverstärkung $\mathbf{k}^\top = [k_1, \dots, k_n]$ abhängen. Durch Polvorgabe soll sich das charakteristische Polynom

$$p^*(\lambda) = p_0 + p_1 \lambda + \dots + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) \quad (3.11)$$

mit den vorgegebenen Eigenwerten λ_i^* einstellen. Gleichsetzen von (3.10) und (3.11)

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^\top) \stackrel{!}{=} \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*)$$

bzw.

$$q_0(\mathbf{k}) + q_1(\mathbf{k})\lambda + \dots + q_{n-1}(\mathbf{k})\lambda^{n-1} + \lambda^n \stackrel{!}{=} p_0 + p_1\lambda + \dots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

sowie anschließender Koeffizientenvergleich führt zu

$$q_0(\mathbf{k}) = p_0, \quad q_1(\mathbf{k}) = p_1, \quad \dots \quad q_{n-1}(\mathbf{k}) = p_{n-1}. \quad (3.12)$$

Das Gleichungssystem (3.12) besteht aus n Gleichungen für die n Elemente k_i der Reglerverstärkung $\mathbf{k}$, die eindeutig durch (3.12) bestimmt sind.

Im Falle mehrerer Stellgrößen $m > 1$ ist das Gleichungssystem für die Elemente k_{ij} der Reglermatrix $\mathbf{K}$ unterbestimmt (n Gleichungen, nm Unbekannte k_{ij}). Es existieren also unendlich viele Lösungen, sofern das System (3.2) steuerbar ist. Zudem sind die Gleichungen (3.12) im Mehrgrößenfall nichtlinear, da jetzt Produkte und Potenzen der Unbekannten k_{ij} auftreten. Die direkte Eigenwertvorgabe ist somit nur für Eingrößensysteme empfehlenswert.

Beispiel 3.1 Betrachtet wird das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.13)$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Mit der Rückführung $u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x}$ und der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^\top = \begin{bmatrix} k_1 - 2 & k_2 & 3 + k_3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -k_1 & -k_2 & 1 - k_3 \end{bmatrix}$$

ergibt sich das charakteristische Polynom (3.10)

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_R) = \underbrace{4 - 8k_1 + 8k_2 - 4k_3}_{q_0(\mathbf{k})} + \underbrace{(-4 + 6k_1 + k_2)}_{q_1(\mathbf{k})} \lambda + \underbrace{(-1 - k_1 + k_3)}_{q_2(\mathbf{k})} \lambda^2 + \lambda^3. \quad (3.14)$$

Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises sollen nun auf $\lambda_1^* = -2$ (unverändert), $\lambda_2^* = -1$ und $\lambda_3^* = -3$ platziert werden. Das zugehörige charakteristische Polynom (3.11) lautet

$$p^*(\lambda) = \prod_{i=1}^2 (\lambda - \lambda_i^*) = 6 + 11\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3. \quad (3.15)$$

Ein Koeffizientenvergleich zwischen (3.14) und (3.15) führt auf ein lineares Gleichungssystem für $\mathbf{k}^\top = [k_1, k_2, k_3]$ mit der Lösung

$$k_1 = \frac{3}{2}, \quad k_2 = 6, \quad k_3 = \frac{17}{2}.$$

Aufgabe 3.1 Unter MATLAB kann die Funktion `place` für die direkte Eigenwertvorgabe verwendet werden. Informieren Sie sich über die Funktion mit Hilfe des MATLAB-Aufrufs “`help place`” bzw. “`doc place`”. Überprüfen Sie die Ergebnisse aus Beispiel 3.1.

3.3 Reglerentwurf in Regelungsnormalform

Der Entwurf eines Zustandsreglers durch Transformation auf die Regelungsnormalform stellt einen allgemeineren Ansatz dar als die direkte Eigenwertvorgabe im vorherigen Abschnitt.

3.3.1 Ackermann-Formel (Eingrößenfall)

In Abschnitt 2.5.3 wurde gezeigt, dass das System (3.7) auf die Regelungsnormalform (2.137) gebracht werden kann, indem die Transformation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \mathbf{x}, \quad \mathbf{t}^\top = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_S^{-1} \quad (3.16)$$

mit der letzten Zeile $\mathbf{t}^\top$ der inversen Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$ verwendet wird. Für einen Reglerentwurf mittels Eigenwertvorgabe ist die Regelungsnormalform besonders gut geeignet, da die Stellgröße u gezielt die letzte Zeile der Normalform beeinflusst.

Eine kompaktere Darstellung der Regelungsnormalform (2.137) ist

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} &= \tilde{x}_n \\ \dot{\tilde{x}}_n &= \mathbf{g}^\top \tilde{\mathbf{x}} + u \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei sich $\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{x}_{i+1}$ direkt aus (2.137) ergibt, während die letzte Zeile mit

$$\mathbf{g}^\top = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^n \mathbf{T}^{-1} \quad (3.18)$$

durch Differentiation von $\tilde{x}_n$ und Vergleich mit (2.137) resultiert. Durch Ansatz von

$$u = v - \mathbf{g}^\top \tilde{\mathbf{x}} \quad (3.19)$$

mit dem *neuen Eingang* v kann die Regelungsnormalform (3.17) auf die entkoppelte Form

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} &= \tilde{x}_n \\ \dot{\tilde{x}}_n &= v \end{aligned} \quad (3.20)$$

gebracht werden, die eine Integratorkette der Länge n mit v als neuem Eingang darstellt, siehe Abbildung 3.3. Setzt man nun ausgehend von einem gewünschten charakteristischen Polynom

$$p^*(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \dots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) \quad (3.21)$$

den neuen Eingang v wie folgt an

$$v = -p_0\tilde{x}_1 - \dots - p_{n-1}\tilde{x}_n, \quad (3.22)$$

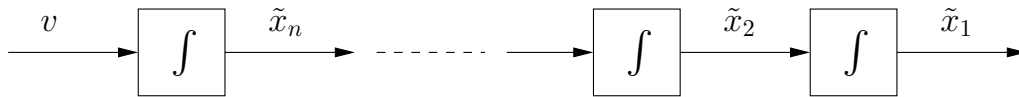


Abbildung 3.3: Entkoppelte Regelungsnormalform (3.20) im Eingrößenfall.

so ergibt sich die Dynamik des geschlossenen Kreises zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_n \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_R} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (3.23)$$

Es ist direkt ersichtlich, dass für das charakteristische Polynom im geschlossenen Kreis $\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_R) = p^*(\lambda)$ gilt. Die tatsächliche Stellgröße (3.19) ergibt sich aus dem Rückführgesetz (3.22) für v und (3.16), (3.18) zu

$$\begin{aligned} u &= -p_0 \tilde{x}_1 - \cdots - p_{n-1} \tilde{x}_n - \mathbf{g}^\top \tilde{\mathbf{x}} \\ &= -\underbrace{\mathbf{t}^\top (p_0 \mathbf{I} + \cdots + p_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n)}_{\mathbf{k}^\top} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die Bestimmungsgleichung für die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^\top$ ist die bekannte *Ackermann-Formel*, die im folgenden Satz festgehalten ist:

Satz 3.1 (Ackermann-Formel im Eingrößenfall) *Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ des geschlossenen Kreises (3.9) mit der Rückführung (3.8) können genau dann beliebig platziert werden, wenn das System (3.7) steuerbar ist. Der Rückführvektor berechnet sich dann nach der Formel*

$$\mathbf{k}^\top = \mathbf{t}^\top (p_0 \mathbf{I} + p_1 \mathbf{A} + \cdots + p_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) \quad (3.25)$$

in Abhängigkeit von $\mathbf{t}^\top$ in (3.16) – der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix (2.125) – und den Koeffizienten p_i des gewünschten charakteristischen Polynoms (3.21).

Beispiel 3.2 (Simulationsbeispiel) *Als Beispiel betrachte man den Zweimassenschwinger von Abbildung 3.4 bestehend aus den zwei Massen m_1 und m_2 , den zwei linearen Federn mit den Federkonstanten c_1 und c_2 sowie den zwei geschwindigkeitsproportionalen Dämpfern mit den Dämpfungskonstanten d_1 und d_2 . Auf die erste Masse m_1 wirkt die externe Kraft F_{ext} , die zugleich die Stellgröße $u = F_{ext}$ des Systems darstellt. Die auf die zweite Masse m_2 wirkende Kraft F_d ist als unbekannte Störung aufzufassen. Das mathematische Modell errechnet sich direkt durch Anwendung des Impulserhaltungssatzes auf die beiden Massen m_1 und m_2 in der Form*

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 &= -c_1 (s_1 - s_2) - d_1 (\dot{s}_1 - \dot{s}_2) - F_{ext} \\ m_2 \ddot{s}_2 &= c_1 (s_1 - s_2) + d_1 (\dot{s}_1 - \dot{s}_2) - c_2 s_2 - d_2 \dot{s}_2 - F_d, \end{aligned} \quad (3.26)$$

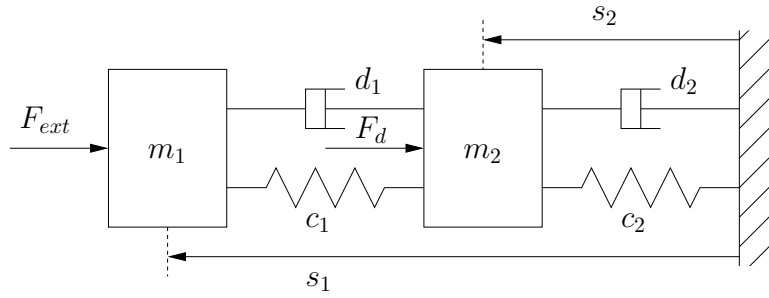


Abbildung 3.4: Gekoppelter Feder–Masse–Schwinger (Beispiel 3.2).

wobei s_1 und s_2 die Auslenkungen der Massen m_1 und m_2 um die entspannte Lage der Federn beschreiben.

Mit den Zustandsgrößen $\mathbf{x}^\top = [s_1, v_1 = \dot{s}_1, s_2, v_2 = \dot{s}_2]$, der Stellgröße $u = F_{ext}$, der Störung $d = F_d$ und der Ausgangsgröße $y = s_2$ ergibt sich die Zustandsdarstellung von (3.26) zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{m_1} & -\frac{d_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & \frac{d_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_1}{m_2} & \frac{d_1}{m_2} & -\frac{c_1+c_2}{m_2} & -\frac{d_1+d_2}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} d, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^\top} \mathbf{x}. \quad (3.27)$$

Für die Parameter

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 10, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad d_1 = d_2 = 1 \quad (3.28)$$

lautet die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -0.1 \\ -1 & 1 & -0.1 & -0.98 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.02 \\ 0 & -0.1 & 0.02 & 0.106 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

$\mathbf{Q}_S$ ist regulär, wie man sich leicht anhand der Determinante $\det(\mathbf{Q}_S) = 0.01$ überzeugt. Die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$ lautet

$$\mathbf{t}^\top = [-1, 0, -8, 10]. \quad (3.30)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ liegen bei

$$\lambda_{1/2} \approx -0.555 \pm j0.9, \quad \lambda_{3/4} \approx -0.045 \pm j0.3$$

und sollen im geschlossenen Kreis auf

$$\lambda_{1/2}^* = -0.5 \pm j0.5, \quad \lambda_3^* = -1, \quad \lambda_4^* = -2$$

verschoben werden. Die Ackermann-Formel (3.25) liefert die Reglerverstärkung

$$\mathbf{k}^T = [-1.8, -2.8, -5.4, -18.4]. \quad (3.31)$$

Um stationär auf einen gewünschten Sollwert w für y fahren zu können (Abbildung 3.2), wird zusätzlich ein Vorfilter S gemäß (3.6) berechnet

$$S = (\mathbf{c}^T(\mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b})^{-1} = -10$$

Somit ergibt sich der gesamte Regeleingriff (siehe Abbildung 3.2)

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + Sw. \quad (3.32)$$

Aufgabe 3.2 Unter MATLAB kann die Ackermann-Formel (3.25) mit Hilfe der Funktion `acker` berechnet werden. Informieren Sie sich über die Funktion mit Hilfe des MATLAB-Aufrufs “`help acker`” bzw. “`doc acker`”. Überprüfen Sie mit Hilfe der `acker`-Funktion die Reglerverstärkung (3.31) in Beispiel 3.2 als auch die Ergebnisse in Beispiel 3.1.

3.3.2 Steuerbarkeitsindizes im Mehrgrößenfall

Im Mehrgrößenfall kann ein Reglerentwurf in der Regelungsnormalform analog zum Eingrößenfall in Abschnitt 3.3.1 erfolgen. Um zunächst die Mehrgrößen-Regelungsnormalform herleiten zu können, ist der Begriff der *Steuerbarkeitsindizes* von Bedeutung.

Dazu ist es hilfreich, das lineare Systeme (3.2) in Abhängigkeit der einzelnen Stellgrößen $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$ mit den Steuervektoren $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m]$ darzustellen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i u_i, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.33)$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Steuervektoren $\mathbf{b}_i$ linear unabhängig sind, also die Rangbedingung

$$\text{Rang}(\mathbf{B}) = m$$

erfüllt ist. Mit der Darstellung (3.33) lässt sich auch die Steuerbarkeitsmatrix (2.125) spaltenweise angeben

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_m]. \quad (3.34)$$

Im Eingrößenfall konnte die inverse Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$ dazu verwendet werden, um die Transformation auf Regelungsnormalform zu erreichen (Satz 2.14). Im Mehrgrößenfall ist dies nicht so einfach möglich, schon allein wegen der Tatsache, dass die Steuerbarkeitsmatrix (3.34) nicht quadratisch ist.

Im ersten Schritt muss daher $\mathbf{Q}_S$ nach n linear unabhängige Spalten durchsucht werden. Dies führt auf den Begriff der *Steuerbarkeitsindizes*, die von elementarer Bedeutung im Mehrgrößenfall sind:

Definition 3.1 (Steuerbarkeitsindizes) Der i -te Steuerbarkeitsindex ρ_i des linearen steuerbaren Systems (3.33) ist die kleinste ganze Zahl, so dass der Spaltenvektor $\mathbf{A}^{\rho_i}\mathbf{b}_i$ von den links gelegenen Spalten der Steuerbarkeitsmatrix (3.34) linear abhängig ist.

Wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ regulär ist, das System (3.33) also vollständig steuerbar ist, so ist auch die *reduzierte Steuerbarkeitsmatrix*¹

$$\tilde{\mathbf{Q}}_S = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{\rho_1-1}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{\rho_m-1}\mathbf{b}_m], \quad \sum_{i=1}^m \rho_i = n, \quad (3.35)$$

die sich mit Hilfe der Steuerbarkeitsindizes ergibt, regulär. Die Definition der Steuerbarkeitsindizes beinhaltet ebenfalls den Eingrößenfall, bei dem die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ durch

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

gegeben ist. Wenn $\mathbf{Q}_S$ regulär ist, dann gilt nach Definition 3.1 für den (einzelen) Steuerbarkeitsindex $\rho = n$.

Beispiel 3.3 Gegeben ist das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (3.36)$$

Die Steuerbarkeitsmatrix (3.34) lautet

$$\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Zunächst wird der erste Steuerbarkeitsindex ρ_1 untersucht. Für $\rho_1 \stackrel{?}{=} 1$ ist offensichtlich, dass $\mathbf{A}\mathbf{b}_1$ linear unabhängig ist von den linken Spalten $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$. Es muss also $\rho_1 > 1$ gelten. Tatsächlich ist $\rho_1 = 2$, da sich $\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1$ als Linearkombination

$$\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_2$$

der von $\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1$ links gelegenen Spalten in $\mathbf{Q}_S$ darstellen lässt. Analog dazu ergibt sich der zweite Steuerbarkeitsindex $\rho_2 = 2$, da offensichtlich gilt

$$\mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{A}\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{A}^2\mathbf{b}_1.$$

Die reduzierte Steuerbarkeitsmatrix (3.35) lautet somit

$$\tilde{\mathbf{Q}}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

¹ Man beachte, dass die Spalten in $\tilde{\mathbf{Q}}_S$ anders geordnet sind als in $\mathbf{Q}_S$!

Aufgabe 3.3 Berechnen Sie die Steuerbarkeitsindizes ρ_1, ρ_2, ρ_3 für das System (3.33) mit der System- und Steuermatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

3.3.3 Regelungsnormalform im Mehrgrößenfall

Die Steuerbarkeitsindizes ρ_i sind von elementarer Bedeutung, um das Mehrgrößensystem (3.33) auf Regelungsnormalform zu überführen. Die Transformationsvorschrift ist eine Verallgemeinerung des Eingrößenfalls (3.16) und besitzt die Blockstruktur

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{1,\rho_1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,\rho_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Die Vektoren $\mathbf{t}_i^\top$ sind durch die Vorschrift

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{e}_m^\top \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_S^{-1}, \quad \mathbf{e}_i^\top = [\underbrace{0, \dots, 0}_{(\sum_{j=1}^i \rho_j)-1}, 1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^n \quad (3.40)$$

gegeben. Der Vektor $\mathbf{t}_i^\top$ stellt die $\sum_{j=1}^i \rho_j$ -te Zeile der inversen reduzierten Steuerbarkeitsmatrix (3.35) dar und verallgemeinert somit den Eingrößenfall (3.16).

Satz 3.2 (Transformation auf Regelungsnormalform – Mehrgrößenfall) Das lineare Mehrgrößensystem (3.33) erfülle die Rangbedingung $\text{Rang}(\mathbf{B}) = p$ und sei vollständig steuerbar mit den Steuerbarkeitsindizes $\rho_1, \dots, \rho_m$. Dann kann das System (3.33) mit Hilfe der Transformation (3.39), (3.40) auf die Regelungsnormalform

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{i,1} &= \tilde{x}_{i,2} \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i,\rho_i-1} &= \tilde{x}_{i,\rho_i} \\ \dot{\tilde{x}}_{i,\rho_i} &= \mathbf{g}_i^\top \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{h}_i^\top \mathbf{u}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}} \quad (3.41)$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{g}_i^\top = \mathbf{t}_i^\top \mathbf{A}^{\rho_i} \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{h}_i^\top = \mathbf{t}_i^\top \mathbf{A}^{\rho_i-1} \mathbf{B}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.42)$$

gebracht werden. Dabei stellt $\mathbf{t}_i^\top$ die $\sum_{j=1}^i \rho_j$ -te Zeile der inversen reduzierten Steuerbarkeitsmatrix (3.35) dar.

Die Matrixdarstellung der Regelungsnormalform (3.41) lautet

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1 & \tilde{\mathbf{N}}_1^2 & \cdots & \tilde{\mathbf{N}}_1^m \\ \tilde{\mathbf{N}}_2^1 & \tilde{\mathbf{D}}_2 & & \tilde{\mathbf{N}}_2^m \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{N}}_m^1 & \tilde{\mathbf{N}}_m^2 & \cdots & \tilde{\mathbf{D}}_m \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}_m \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T} \mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (3.43)$$

mit den Blockmatrizen

$$\tilde{\mathbf{D}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ \times & \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_i \times \rho_i}, \quad \tilde{\mathbf{N}}_i^j = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_i \times \rho_j} \quad (3.44)$$

sowie

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times & 1 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_i \times m}, \quad (3.45)$$

wobei die “ $\times$ ”-Einträge Elemente bezeichnen, die nicht notwendigerweise 0 oder 1 sind.

Es ist direkt ersichtlich, dass (3.41) bzw. (3.43) die Regelungsnormalform (2.137) bzw. (3.17) im Eingrößenfall beinhaltet. Im allgemeineren Fall mit $m > 1$ Stellgrößen umfasst die Blockstruktur in (3.41) m Blöcke für die Zustände $(\tilde{x}_{i,1}, \dots, \tilde{x}_{i,\rho_i})$ entsprechend dem Steuerbarkeitsindex ρ_i .

Beispiel 3.4 Betrachtet wird erneut Beispiel 3.3. Die inverse reduzierte Steuerbarkeitsmatrix (3.38) lautet

$$\tilde{\mathbf{Q}}_S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Aufgrund der Steuerbarkeitsindizes $\rho_1 = 2$ und $\rho_2 = 2$ stellen die Vektoren $\mathbf{t}_1^\top$ und $\mathbf{t}_2^\top$ in (3.40) die 2. und 4. Zeile von $\tilde{\mathbf{Q}}_S^{-1}$ dar, d.h.

$$\mathbf{t}_1^\top = [0, 1, 0, 0], \quad \mathbf{t}_2^\top = [0, 0, 1, 0]. \quad (3.47)$$

Mit der System- und Steuermatrix in (3.36) erhält man die vollständige Transformationsvorschrift (3.39)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} \\ \tilde{x}_{1,2} \\ \tilde{x}_{2,1} \\ \tilde{x}_{2,2} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{x}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \\ \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_2^\top \\ \mathbf{t}_2^\top \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zur Aufstellung der Regelungsnormalform kann man nun entweder die Vektoren $\mathbf{g}_i^\top, \mathbf{h}_i^\top$ gemäß (3.41) oder die gesamte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ in (3.43) berechnen. In beiden Fällen erhält man in Matrixform geschrieben

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -7 & 5 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (3.48)$$

Aufgabe 3.4 (Fortsetzung Aufgabe 3.3) Transformieren Sie das in Aufgabe 3.3 gegebene System auf Regelungsnormalform.

Lösung: Da $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ gilt, haben die Integratorketten in der Regelungsnormalform (3.41) bzw. (3.43) lediglich die Länge 1:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} \\ \tilde{x}_{2,1} \\ \tilde{x}_{3,1} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3.5 Untersuchen Sie das Mehrgrößensystem mit der System- und Steuermatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a > 0$$

auf Steuerbarkeit. Berechnen Sie die Steuerbarkeitsindizes ρ_1, ρ_2 und stellen Sie die reduzierte Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_S$ auf. Bestimmen Sie die Transformationsvorschrift (3.39), (3.40) und transformieren Sie das System anschließend auf Regelungsnormalform.

Hinweis: Die Steuerbarkeitsindizes sind $\rho_1 = 2$ und $\rho_2 = 4$. Verwenden Sie MATLAB zum Aufstellen der Matrizen und die Befehle `rank` und `inv` zur Rangüberprüfung und numerischen Inversion.

3.3.4 Entkopplung und Eigenwertvorgabe

Analog zum Eingrößenfall kann auch bei Mehrgrößensystemen eine lineare Zustandsrückführung (3.1)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w}$$

entworfen werden, um die Pole des geschlossenen Kreises

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})}_{\mathbf{A}_R} \mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w}$$

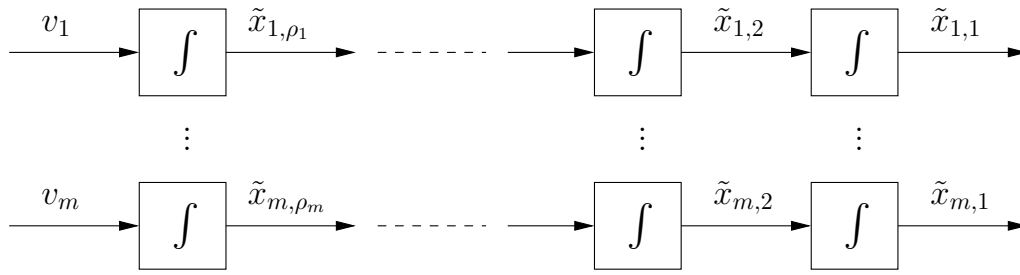


Abbildung 3.5: Entkoppelte Regelungsnormalform (3.51) im Mehrgrößenfall.

vorzugeben. Die Regelungsnormalform (3.41) ist dazu besonders vorteilhaft, da die Stellgrößen $\mathbf{u}$ jeweils am Ende der einzelnen Integratorketten bzw. in den letzten Zeilen der einzelnen Blöcke in (3.43) auftauchen.

Die letzten Differenzialgleichungen der Regelungsnormalform (3.41) lassen sich in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{1,\rho_1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{m,\rho_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m-1} \end{bmatrix} \mathbf{B}}_{\mathbf{H}} \mathbf{u} \quad (3.49)$$

mit der *Kopplungsmatrix* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ zusammenfassen. Unter der Annahme, dass $\text{Rang}(\mathbf{B}) = m$ gilt, ist $\mathbf{H}$ invertierbar und die Wahl der Stellgröße

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}^{-1} \left(- \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \right) \quad (3.50)$$

mit den neuen Eingängen $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_m]^\top$ führt auf die entkoppelte Form der Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{i,1} &= \tilde{x}_{i,2} \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i,\rho_i-1} &= \tilde{x}_{i,\rho_i} \\ \dot{\tilde{x}}_{i,\rho_i} &= v_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.51)$$

die m Integratorketten der Länge ρ_i mit den neuen Eingängen v_i darstellt, siehe Abbildung 3.5.

In Analogie zum Eingrößenfall setzt man nun die neuen Eingänge v_i wie folgt an

$$v_i = -p_{i,0}\tilde{x}_{i,1} - \dots - p_{i,\rho_i-1}\tilde{x}_{i,\rho_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.52)$$

wobei $p_{i,j}$ die Koeffizienten der gewünschten charakteristischen Polynome

$$p_i^*(\lambda) = p_{i,0} + p_{i,1}\lambda + \dots + p_{i,\rho_i-1}\lambda^{\rho_i-1} + \lambda^{\rho_i} = \prod_{j=1}^{\rho_i} (\lambda - \lambda_{i,j}^*), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.53)$$

sind. Auf diese Weise stellt sich für die einzelnen Integratorketten (3.51) die Dynamik

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{i,1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i,\rho_i} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -p_{i,0} & -p_{i,1} & \cdots & -p_{i,\rho_i} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{R,i}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{i,\rho_i} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\lambda \mathbf{I}_{\rho_i} - \tilde{\mathbf{A}}_{R,i}) = p_i^*(\lambda) \quad (3.54)$$

ein. Die tatsächliche Stellgröße (3.50) ergibt sich aus (3.52) und (3.39), (3.42) zu

$$\mathbf{u} = -\mathbf{H}^{-1} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{1,0} \mathbf{t}_1^\top + \cdots + p_{1,\rho_1-1} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1-1} \\ \vdots \\ p_{m,0} \mathbf{t}_m^\top + \cdots + p_{m,\rho_m-1} \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m-1} \end{bmatrix} \right)}_{\mathbf{K}} \mathbf{x}. \quad (3.55)$$

Dies stellt die Mehrgrößenvariante der Ackermann-Formel dar, die im folgenden Satz zusammengefasst ist.

Satz 3.3 (Ackermann-Formel im Mehrgrößenfall) *Unter der Annahme, dass das System (3.2) steuerbar ist und $\text{Rang}(\mathbf{B}) = m$ gilt, können die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ mit der Rückführung (3.1) beliebig platziert werden. Die Reglermatrix $\mathbf{K}$ berechnet sich dann nach der Formel*

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top (p_{1,0} \mathbf{I} + p_{1,1} \mathbf{A} + \cdots + p_{1,\rho_1-1} \mathbf{A}^{\rho_1-1} + \mathbf{A}^{\rho_1}) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top (p_{m,0} \mathbf{I} + p_{m,1} \mathbf{A} + \cdots + p_{m,\rho_m-1} \mathbf{A}^{\rho_m-1} + \mathbf{A}^{\rho_m}) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

in Abhängigkeit von der Kopplungsmatrix $\mathbf{H}$ in (3.49) und den Vektoren $\mathbf{t}_i^\top$ – den $\sum_{j=1}^i \rho_j$ -ten Zeilen der inversen reduzierten Steuerbarkeitsmatrix (3.35) – sowie den Koeffizienten $p_{i,j}$ der charakteristischen Polynome (3.53).

Im Mehrgrößenfall existieren verschiedene Freiheitsgrade, die im Eingrößenfall nicht vorhanden sind. Zum Beispiel ist nicht eindeutig, wie die charakteristischen Polynome (3.53) zu wählen sind, bzw. wie die n Eigenwerte

$$\{\lambda_{1,1}^*, \dots, \lambda_{1,\rho_1}^*\} \dots \{\lambda_{m,1}^*, \dots, \lambda_{m,\rho_m}^*\}$$

auf die einzelnen Steuerbarkeitsindizes ρ_i zu verteilen sind, die die Dynamik der einzelnen entkoppelten Systeme (3.51) bestimmen. Des Weiteren existieren neben den Steuerbarkeitsindizes ρ_i (Definition 3.1) in der Regel weitere Kombinationen $\{\rho'_1, \dots, \rho'_m\}$, so dass die reduzierte Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_S$ vollen Rang hat.

Beispiel 3.5 *Betrachtet wird das System (3.36) aus Beispiel 3.3. Die Steuerbarkeitsindizes $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 2$ sowie die Transformationsvektoren*

$$\mathbf{t}_1^\top = [0, 1, 0, 0], \quad \mathbf{t}_2^\top = [0, 0, 1, 0].$$

wurden bereits in Beispiel 3.4 berechnet. Die Kopplungsmatrix $\mathbf{H}$ gemäß (3.49) lautet

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_2^\top \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Ackermann-Formel (3.56) kann die Reglerverstärkung wie folgt berechnet werden

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top (p_{1,0} \mathbf{I} + p_{1,1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^2) \\ \mathbf{t}_2^\top (p_{2,0} \mathbf{I} + p_{2,1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^2) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

mit $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I}$. Die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ in (3.36) lassen sich unter MATLAB mit dem Befehl `eig` numerisch bestimmen und lauten

$$\lambda_{1/2} \approx -0.2806 \pm j 0.419, \quad \lambda_{3/4} \approx 2.7806 \pm j 0.367.$$

Das System (3.36) ist also instabil. Die gewünschten Eigenwerte im geschlossenen Kreis sollen nun auf $\{-1, -1, -2, -2\}$ verschoben werden. Dabei gibt es Freiheiten, wie die Paare $\{\lambda_{1,1}^*, \lambda_{1,2}^*\}$ und $\{\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}\}$ gewählt werden, z.B.

$$\begin{aligned} \{\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}\} &= \{-1, -1\} \\ \{\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}\} &= \{-2, -2\} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 2 \\ 1 & 7 & 26 & 9 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \{\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}\} &= \{-1, -2\} \\ \{\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}\} &= \{-1, -2\} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 13 & 2 \\ 1 & 5 & 21 & 8 \end{bmatrix}.$$

In beiden Fällen lässt sich leicht mit Hilfe von MATLAB überprüfen, dass die Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ des geschlossenen Kreises die gewünschten Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 3.6 Berechnen Sie für das in den Aufgaben 3.3 und 3.4 betrachtete Problem die Verstärkungsmatrix $\mathbf{K}$ gemäß (3.56). Verwenden Sie dazu die gewünschten Eigenwerte $\{-1, -2, -3\}$.

Aufgabe 3.7 Berechnen Sie die Verstärkungsmatrix $\mathbf{K}$ für das System in Aufgabe 3.5 mit den gewünschten Eigenwerten, indem Sie z.B. alle Eigenwerte auf -1 legen. Überprüfen Sie das Ergebnis durch Berechnung der Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ im geschlossenen Kreis.

Hinweis: Verwenden Sie MATLAB zum Auswerten der Ackermann-Formel (3.56) und zum Überprüfen der Eigenwerte.

3.4 Reglerentwurf durch Ein-/Ausgangsentkopplung

Bei dem Zustandsreglerentwurf über die Regelungsnormalform wurde die Dynamik des geschlossenen Regelkreises vorgegeben, ohne die Ausgangsgrößen $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$ näher zu betrachten. Aufgrund der Verkopplung des Systems kann durch die Transformation auf Regelungsnormalform auch in der Regel kein gewünschtes dynamisches Verhalten für die Ausgangsgrößen $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$ eingestellt werden.

Dies ist genau das Ziel bei der Ein-/Ausgangsentkopplung, bei der (wie der Name bereits sagt) das *Ein-/Ausgangsverhalten* des Systems entkoppelt wird, um ein gewünschtes Dynamikverhalten direkt für die einzelnen Ausgangsgrößen $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$ vorzugeben. Im Folgenden wird dazu angenommen, dass die Stellgrößen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und Ausgangsgrößen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ die gleiche Dimension besitzen, d.h.

$$\boxed{p = m}.$$

Dieses Reglerentwurfsverfahren geht ursprünglich auf *Falb* und *Wolovich* zurück, wobei weitere Einsichten durch das Aufkommen der Methodik der *Ein-/Ausgangslinearisierung* in der nichtlinearen Regelungstheorie gewonnen werden können.

3.4.1 Relativer Grad

Der Begriff des *relativen Grades* ist von maßgeblicher Bedeutung bei der Ein-/Ausgangsentkopplung. Dazu wird das lineare Mehrgrößensystem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i u_i \\ y_i &= \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.58)$$

elementweise in den einzelnen Stellgrößen u_i und Ausgangsgrößen y_i betrachtet.

Definition 3.2 (Vektorieller relativer Grad) Das lineare System (3.58) besitzt den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^k \mathbf{b}_j = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, r_i - 2$
- (ii) die $(m \times m)$ -Matrix

$$\mathbf{H}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^{r_1-1} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^{r_1-1} \mathbf{b}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{c}_m^T \mathbf{A}^{r_m-1} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{c}_m^T \mathbf{A}^{r_m-1} \mathbf{b}_m \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

ist nicht singulär, d.h. $\text{Rang}(\mathbf{H}_y) = m$.

Die Bedeutung des Index r_i wird klar, wenn der Ausgang $y_i = \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x}$ als Funktion der Zeit t sukzessive abgeleitet wird:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_i &= \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{c}_i^\top [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] \mathbf{u}}_{= \mathbf{0} \text{ wg. (i)}} = \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \\
 \ddot{y}_i &= \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A} [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] \mathbf{u}}_{= \mathbf{0} \text{ wg. (i)}} = \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{x} \\
 &\vdots \\
 y_i^{(r_i-1)} &= \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{r_i-2} [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] \mathbf{u}}_{= \mathbf{0} \text{ wg. (i)}} = \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{x} \\
 y_i^{(r_i)} &= \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{r_i} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{r_i-1} [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] \mathbf{u}}_{\neq \mathbf{0} \text{ wg. (ii)}}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Aus den obigen Gleichungen erkennt man, dass das Element r_i des vektoriellen relativen Grades $\{r_1, \dots, r_m\}$ angibt, wie oft der Ausgang y_i differenziert werden muss, bevor mindestens eine Stellgröße u_j erscheint. Wenn der vektorielle relative Grad wohldefiniert ist, gilt

$$\sum_{i=1}^m r_i \leq n. \tag{3.61}$$

Die höchsten Ausgangsableitungen $y_i^{(r_i)}$ bestimmen die Ein-/Ausgangskopplung

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1-1} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1-1} \mathbf{b}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m-1} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m-1} \mathbf{b}_m \end{bmatrix}}_{\text{Kopplungsmatrix } \mathbf{H}_y} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{3.62}$$

des Systems (3.58).

Eingrößenfall: Im Falle einer skalaren Stellgröße u und einer skalaren Ausgangsgröße y ($m = p = 1$) vereinfachen sich die Bedingungen in Definition 3.2 zu

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^k \mathbf{b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r-2 \\
 (ii) \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b} \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

und die Kopplungsmatrix $\mathbf{H}_y$ reduziert sich auf die skalare Größe

$$H_y = \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad r \leq n. \tag{3.64}$$

Im Eingrößenfall ($m = p = 1$) verzichtet man sprachlich auf das Wort *vektoriell* und bezeichnet r als den *relativen Grad*.

3.4.2 Ein-/Ausgangsnormalform

Die Definition des vektoriellen relativen Grades $\{r_1, \dots, r_m\}$ kann nun verwendet werden, um die folgende reguläre Zustandstransformation anzugeben

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_y \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_\eta \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{1,r_1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,r_m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times n}. \quad (3.65)$$

Die ersten r Zustände $\tilde{\mathbf{x}}_y$ stellen die Ableitungen $y_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, r_i - 1$ der einzelnen Ausgänge y_i dar. Damit die Transformation regulär ist, wird $\mathbf{T}_\eta \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$ so angesetzt, dass gilt

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_\eta \end{bmatrix} = n. \quad (3.66)$$

Satz 3.4 (Lineare Ein-/Ausgangsnormalform) *Der Ausgang $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^\top$ des linearen Systems (3.58) besitze den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ mit $r = \sum_{i=1}^m r_i \leq n$. Dann kann $\mathbf{T}_\eta \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$ stets so gewählt werden, dass die Transformation (3.65) regulär ist und das System (3.58) in die Ein-/Ausgangsnormalform*

$$\begin{array}{ll} & \dot{\tilde{x}}_{i,1} = \tilde{x}_{i,2} \\ & \vdots \\ & \dot{\tilde{x}}_{i,r_i-1} = \tilde{x}_{i,r_i} \\ \text{E/A-Dynamik:} & \dot{\tilde{x}}_{i,r_i} = \mathbf{g}_{y,i}^\top \tilde{\mathbf{x}}_y + \mathbf{g}_{\eta,i}^\top \boldsymbol{\eta} + \mathbf{h}_{y,i}^\top \mathbf{u}, \quad i = 1 \dots, m \\ \text{Interne Dynamik:} & \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M}_y \tilde{\mathbf{x}}_y + \mathbf{M}_\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{N} \mathbf{u} \end{array} \quad (3.67)$$

mit den Ausgangsgrößen $y_i = \tilde{x}_{i,1}$, $i = 1, \dots, m$ transformiert werden kann. Die Vektoren und Matrizen in (3.67) ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i^\top &= [\mathbf{g}_{y,i}^\top \quad \mathbf{g}_{\eta,i}^\top] = \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{T}^{-1}, & \mathbf{h}_{y,i}^\top &= \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{B}, \quad i = 1, \dots, m \\ \mathbf{M} &= [\mathbf{M}_y \quad \mathbf{M}_\eta] = \mathbf{T}_\eta \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}, & \mathbf{N} &= \mathbf{T}_\eta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Die m Integratorketten für die Zustände $\tilde{\mathbf{x}}_y$ bilden die sogenannte *Ein-/Ausgangsdynamik*, während die Dynamik für den Teilzustand $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n-r}$ die sogenannte *interne Dynamik* des Systems (3.58) darstellt.

In vielen Fällen kann $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_{n-r}]^\top$ direkt einzelnen Zuständen x_i zugeordnet werden, so dass sich die Transformationsvorschrift $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{T}_\eta \mathbf{x}$ entsprechend vereinfacht.

Beispiel 3.6 *Der gekoppelte Feder-Masse-Schwinger in Beispiel 3.2 und Abbildung 3.4 wird durch das dynamische Modell (3.27) mit dem Ausgang $y = s_2$ (Position der Masse*

m_2) beschrieben. Für die mechanischen Parameter gilt wieder $m_1 = 1$, $m_2 = 10$, $c_1 = c_2 = 1$ und $d_1 = d_2 = 1$. Sukzessive Differentiation des Ausgangs $y = s_2$ liefert

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{y} &= \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{b} u &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \ddot{y} &= \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{b} u &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ y^{(3)} &= \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^3 \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{b} u &= \begin{bmatrix} -0.12 & -0.02 & 0.14 & -0.06 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 0.1 u. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Da u in der dritten Ableitung auftritt, also $\mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = -0.1 \neq 0$ gilt, ist der relative Grad $r = 3$. Damit ergibt sich der erste Teil der Transformation (3.65) zu

$$\tilde{\mathbf{x}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{T}_y \mathbf{x}.$$

Damit die gesamte Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ in (3.65) regulär ist, ist eine einfache Wahl von $\eta \in \mathbb{R}^1$ durch $\eta = s_1 = x_1$ gegeben, d.h.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_\eta \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.70)$$

Die Ein-/Ausgangsnormalform (3.67) lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_y^\top} \tilde{\mathbf{x}}_y + \underbrace{(-0.1)}_{g_\eta} \eta + \underbrace{(-0.1)}_h u \\ \dot{\eta} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_y} \tilde{\mathbf{x}}_y + \underbrace{(-1)}_{M_\eta} \eta. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Die Bedeutung der internen Dynamik kann anhand von Abbildung 3.4 anschaulich erklärt werden: da der Ausgang $y = s_2$ die Position der rechten Masse m_2 ist, beschreibt $\dot{\eta} = \mathbf{M}_y \tilde{\mathbf{x}}_y + M_\eta \eta$ die Bewegung der linken Masse m_1 , die von $[y, \dot{y}, \ddot{y}]^\top = \tilde{\mathbf{x}}_y$ angeregt wird.

3.4.3 Entkopplung und Eigenwertvorgabe

Aufgrund der Annahme, dass der relative Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ existiert und somit die Kopplungsmatrix $\mathbf{H}_y$ vollen Rang hat (siehe (ii) in Definition 3.2), kann die Steuergröße $\mathbf{u}$ in Abhängigkeit der neuen Eingänge $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ angesetzt werden

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_y^{-1} \left(- \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{r_1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{r_m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \right), \quad (3.72)$$

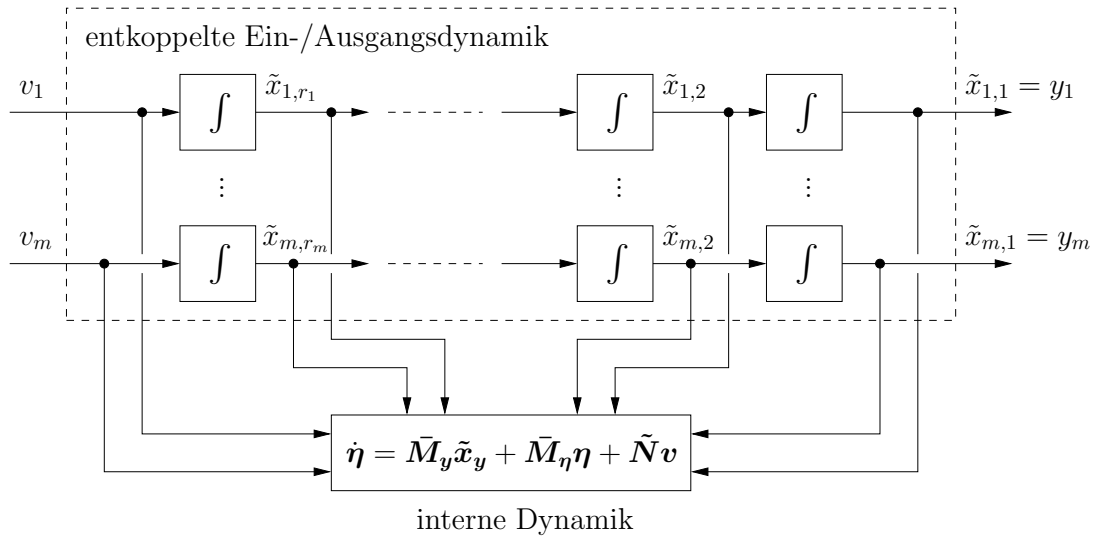


Abbildung 3.6: Entkoppelte Ein-/Ausgangsnormalform (3.73).

was zu der *entkoppelten Ein-/Ausgangsnormalform*

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}_{i,1} &= \tilde{x}_{i,2} \\
 &\vdots \\
 \dot{\tilde{x}}_{i,r_i-1} &= \tilde{x}_{i,r_i} \\
 \dot{\tilde{x}}_{i,r_i} &= v_i, \quad i = 1 \dots, m \\
 \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \bar{\mathbf{M}}_y \tilde{\mathbf{x}}_y + \bar{\mathbf{M}}_\eta \boldsymbol{\eta} + \bar{\mathbf{N}} \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

mit

$$\bar{\mathbf{M}} = [\bar{\mathbf{M}}_y \quad \bar{\mathbf{M}}_\eta] = \mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{H}_y^{-1}\mathbf{G}, \quad \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}\mathbf{H}_y^{-1} \tag{3.74}$$

führt. Durch Einführung der neuen Eingänge $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_m]^\top$ können die Integratorketten für die einzelnen Ausgänge $y_i = \tilde{x}_{i,1}$ gezielt angesteuert werden, die wiederum auf die interne Dynamik wirken. Die entkoppelte Ein-/Ausgangsnormalform ist in Abbildung 3.6 dargestellt.

Es ist nun naheliegend, wie im vorherigen Abschnitt vorzugehen, und der entkoppelten Ein-/Ausgangsdynamik eine gewünschte Dynamik vorzugeben, indem die neuen Eingänge $\mathbf{v}$ durch

$$v_i = -p_{i,0}\tilde{x}_{i,1} - \dots - p_{i,r_i-1}\tilde{x}_{i,r_i}, \quad i = 1, \dots, m \tag{3.75}$$

angesetzt werden, wobei $p_{i,j}$ die Koeffizienten der gewünschten charakteristischen Polynome

$$p_i^*(\lambda) = p_{i,0} + p_{i,1}\lambda + \dots + p_{i,r_i-1}\lambda^{r_i-1} + \lambda^{r_i} = \prod_{j=1}^{r_i} (\lambda - \lambda_{i,j}^*), \quad i = 1, \dots, m \tag{3.76}$$

darstellen. Im Gegensatz zur Eigenwertvorgabe in der Regelungsnormalform spielt aber bei der Ein-/Ausgangsentkopplung die Stabilität der internen Dynamik in (3.73) eine entscheidende Rolle. Des Weiteren taucht $\boldsymbol{\eta}$ in der Gleichung (3.72) für die tatsächliche Stellgröße $\mathbf{u}$ auf, was zu großen Stellamplituden führen kann, wenn die interne Dynamik instabil ist.

Um diesen Sachverhalt zu untersuchen, setzt man die Ausgangsgrößen identisch Null

$$\begin{aligned} y_i^{(j)} = \tilde{x}_{i,j-1} &\equiv 0, \quad j = 0, 1, \dots, r_i - 1, \\ y_i^{(r_i)} = v_i &\equiv 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

und betrachtet die sogenannte *Nulldynamik*

$$\dot{\eta} = \bar{M}_\eta \eta \quad (3.77)$$

die sich als Sonderform der internen Dynamik in (3.73) ergibt. Die Nulldynamik (3.77) kann anschaulich interpretiert werden: sie stellt die Restdynamik des Systems (3.58) dar, wenn die Ausgangsgrößen identisch Null gehalten werden. Mit Hilfe der Nulldynamik lässt sich nun folgender Satz formulieren:

Satz 3.5 (Zustandsreglerentwurf durch Ein-/Ausgangsentkopplung) *Das lineare System (3.58) habe den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ und die Nulldynamik (3.77) sei asymptotisch stabil. Dann ist das System (3.58) mit dem Regelgesetz (3.1) und der Reglermatrix*

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_y^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top (p_{1,0} \mathbf{I} + p_{1,1} \mathbf{A} + \dots + p_{1,r_1-1} \mathbf{A}^{r_1-1} + \mathbf{A}^{r_1}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top (p_{m,0} \mathbf{I} + p_{m,1} \mathbf{A} + \dots + p_{m,r_m-1} \mathbf{A}^{r_m-1} + \mathbf{A}^{r_m}) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

asymptotisch stabilisierbar, wobei $\mathbf{H}_y$ die Kopplungsmatrix (3.59) und $p_{i,j}$ die Koeffizienten der gewünschten charakteristischen Polynome (3.76) für die Ein-/Ausgangsdynamik in (3.67) darstellen.

Beweis: Die Reglermatrix $\mathbf{K}$ in (3.78) ergibt sich direkt aus (3.72) zusammen mit dem Regelgesetz (3.75) für die neuen Eingänge $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_m]^\top$ und den Transformationsgleichungen für $\tilde{x}_{i,j}$ gemäß (3.65). Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises kann in der Ein-/Ausgangsnormform (3.67) bzw. (3.73) leicht gezeigt werden. Für die einzelnen Integratorketten der Ein-/Ausgangsdynamik gilt aufgrund von (3.75)

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{i,1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i,r_i} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -p_{i,0} & -p_{i,1} & \cdots & -p_{i,r_i-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{y,i}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{i,r_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Fasst man $\tilde{\mathbf{A}}_{y,i}$ in der Blockdiagonalmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{A}}_{y,1}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{y,m})$ zusammen und betrachtet zusätzlich die interne Dynamik in der Form (3.73), so ergibt sich die Gesamtstruktur des transformierten und geregelten Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_y \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_y & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{M}}_y - \bar{\mathbf{N}}\mathbf{P} & \bar{\mathbf{M}}_\eta \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_R} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_y \\ \eta \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{1,0} & \cdots & p_{1,r_1-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m,0} & \cdots & p_{m,r_m-1} \end{bmatrix},$$

wobei $p_{i,j}$ die Koeffizienten der charakteristischen Polynome (3.76) sind. Aufgrund der Blockstruktur von $\tilde{\mathbf{A}}_R$ gilt für das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_R) = \det(\lambda \mathbf{I}_m - \tilde{\mathbf{A}}_y) \det(\lambda \mathbf{I}_{n-r} - \bar{\mathbf{M}}_\eta).$$

Die Eigenwerte im geschlossenen Kreis setzen sich also genau aus den Wurzeln der Wunschpolynome (3.76) und den Eigenwerten der Nulldynamik (3.77) zusammen! ■

Die Berechnung der Reglermatrix (3.78) hat Ähnlichkeit mit der Eigenwertvorgabe über die Regelungsnormalform in (3.56). Der Unterschied besteht darin, dass durch die Ausgangsgrößen $\mathbf{y}$ mit dem vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ keine *vollständige* Zustandstransformation gebildet werden kann, wenn $r_1 + \dots + r_m = r < n$ gilt. Somit existiert eine interne Dynamik bzw. Nulldynamik der Ordnung $n - r$, deren Stabilität gewährleistet sein muss.

Beispiel 3.7 (Simulationsbeispiel) *Betrachtet wird erneut der gekoppelte Feder–Masse–Schwinger in Abbildung 3.4. Die Ein-/Ausgangsnormalform wurde bereits in (3.71) hergeleitet (Beispiel 3.6). Da die Stellgröße u in der internen Dynamik nicht auftaucht, kann die Nulldynamik (3.77) direkt angeschrieben werden*

$$\dot{\eta} = -\eta. \quad (3.79)$$

Die Nulldynamik ist also asymptotisch stabil und ein Ein-/Ausgangsentkopplungsregler kann gemäß Satz 3.5 entworfen werden.

Mit dem relativen Grad $r = 3$ (siehe Beispiel 3.6) lautet die Kopplungsmatrix (3.59) bzw. (3.64)

$$H_y = \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = -0.1, \quad (3.80)$$

die im vorliegenden Eingrößenfall eine skalare Größe ist. Mit den gewünschten Eigenwerten $\lambda_i^ = -2, i = 1, 2, 3$ lautet das charakteristische Polynom (3.76)*

$$p^*(\lambda) = 8 + 12\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3,$$

so dass sich die Reglerverstärkung (3.78) wie folgt berechnen lässt

$$\mathbf{k}^\top = \frac{1}{\mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{b}} \mathbf{c}^\top (8\mathbf{I} + 12\mathbf{A} + 6\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3) = [-4.8 \quad -5.8 \quad -69.4 \quad -107.4]. \quad (3.81)$$

Das vollständige Regelgesetz nach (3.1) lautet

$$u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} + Sw \quad \text{mit} \quad S = (\mathbf{c}^\top (\mathbf{b}\mathbf{k}^\top - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b})^{-1} = -80, \quad (3.82)$$

wobei sich der Vorfilter S mit Hilfe von (3.6) berechnet. Aufgrund der Stabilität der Nulldynamik ist auch die Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ asymptotisch stabil, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Abbildung 3.7 stellt die Simulationsergebnisse für einen Führungsgrößensprung auf $w = 0.3$ mit $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ dar. Während der Ausgang y gemäß Eigenwertvorgabe ohne Überspringen stationär auf $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = w$ geregelt wird, klingt die Anregung der internen Dynamik (Zustand $\eta = s_1$) asymptotisch ab.

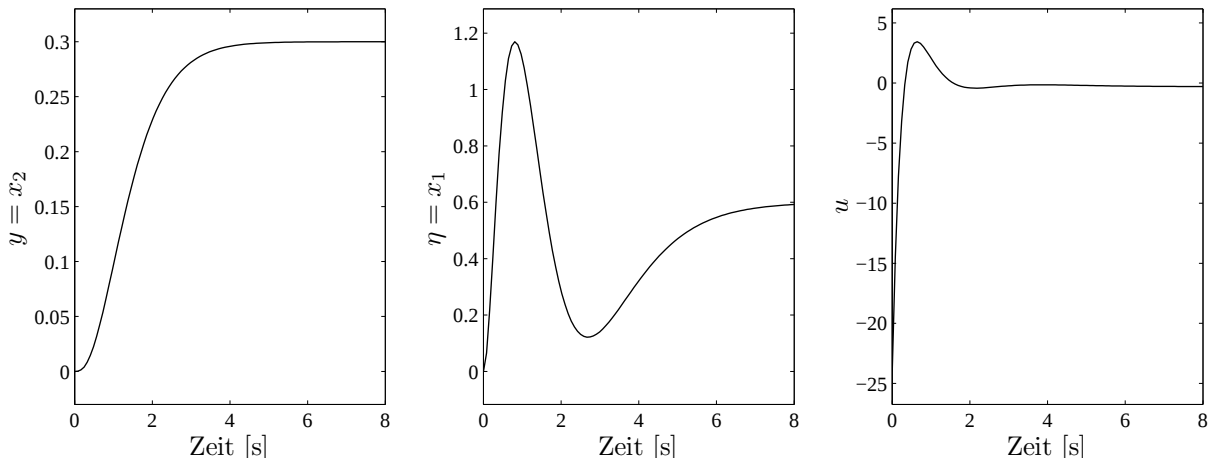


Abbildung 3.7: Simulationsergebnisse für den gekoppelten Feder-Masse-Schwinger mit dem Zustandsregler (3.82) basierend auf der Ein-/Ausgangsentkopplung (Beispiel 3.7).

3.4.4 Interpretation der Nulldynamik

Die Nulldynamik (3.77) lässt sich im Eingrößenfall anhand der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r} s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (3.83)$$

anschaulich erklären, wobei vorausgesetzt wird, dass die Zähler- und Nennerpolynome teilerfremd sind. Wie in Abschnitt 2.4.2 gezeigt wurde, stellt die Regelungsnormform

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-r} \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.84)$$

eine Minimalrealisierung für die Übertragungsfunktion (3.83) dar. Um das System (3.84) auf Ein-/Ausgangsnormform zu transformieren, wird die Transformation (3.65) in der speziellen Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_y \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_\eta \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_r \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}_y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{r-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_y} \mathbf{x}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_\eta} = \mathbf{T}_\eta \mathbf{x} \quad (3.85)$$

angesetzt. Damit lautet die Ein-/Ausgangsnormform (3.67)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{r-1} &= \tilde{x}_r \\ \dot{\tilde{x}}_r &= \mathbf{g}_y^\top \tilde{\mathbf{x}}_y + \mathbf{g}_\eta^\top \boldsymbol{\eta} + \mathbf{h}_y^\top \mathbf{u} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{M}_y \tilde{\mathbf{x}}_y + \mathbf{M}_\eta \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Eine genauere Betrachtung der internen Dynamik liefert

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= \dot{x}_1 = x_2 = \eta_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{\eta}_{n-r-1} &= \dot{x}_{n-r-1} = x_{n-r} = \eta_{n-r} \\
 \dot{\eta}_{n-r} &= \dot{x}_{n-r} = x_{n-r+1} = -b'_0\eta_1 - \dots - b'_{n-r}\eta_{n-r} + \tilde{x}_1.
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Die letzte Zeile folgt aus der Ausgangsbeziehung in (3.84) und $b'_i = b_i/b_{n-r}$. Somit besitzt die interne Dynamik die Struktur

$$\dot{\eta} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{M}_y} \tilde{x}_y + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -b'_0 & -b'_1 & \dots & -b'_{n-r-1} \end{bmatrix}}_{\bar{M}_\eta} \eta. \tag{3.88}$$

Durch Nullsetzen der Zustände $\tilde{x}_y \equiv 0$ ergibt sich die Nulldynamik $\dot{\eta} = \bar{M}_\eta \eta$. Die zugehörige charakteristische Gleichung resultiert aus der letzten Zeile von $\bar{M}_\eta$

$$\det(\lambda I - \bar{M}_\eta) = -\frac{1}{b_{n-r}}(b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{n-r-1}\lambda^{n-r-1} + \lambda^{n-r}). \tag{3.89}$$

Im Vergleich mit der ursprünglichen Übertragungsfunktion (3.83) kann also festgehalten werden:

Die Eigenwerte der Nulldynamik entsprechen den Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$. Eine stabile Nulldynamik liegt also vor, wenn die Nullstelle der zugehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$ in der linken Halbebene liegen. Wenn das System nichtminimalphasig ist, also eine oder mehrere Nullstellen von $G(s)$ in der rechten Halbebene liegen, so ist die interne Dynamik instabil. Ein Zustandsregler, der mit Hilfe der Ein-/Ausgangsentkopplung entworfen wurde, ist also nur asymptotisch stabil, wenn das zu regelnde System minimalphasig ist (siehe Satz 3.5).

3.5 Optimale Regelung (LQR–Problem)

Bei den bisher betrachteten Zustandsreglern wurde die Rückführverstärkung durch Eigenwertvorgabe berechnet, wobei im Mehrgrößenfall zusätzliche Freiheiten bei der Reglerauslegung bestehen. Die Eigenwert- bzw. Polvorgabe hat die Vorteile, dass die Reglerverstärkung durch die Formeln (3.25), (3.56) bzw. (3.78) explizit berechnet werden kann und dass dem geschlossenen Regelkreis eine gewünschte Dynamik eingeprägt wird.

Allerdings treten in vielen technischen Anwendungen Forderungen an die Regelgüte einzelner Zustands- bzw. Stellgrößen auf. Bei der Eigenwertvorgabe können diese Forderungen nur bedingt berücksichtigt werden, da die Zuweisung von Eigenwerten keinen direkten Einfluss auf das Regelverhalten der einzelnen Zustandsgrößen bzw. Stellgrößen hat.

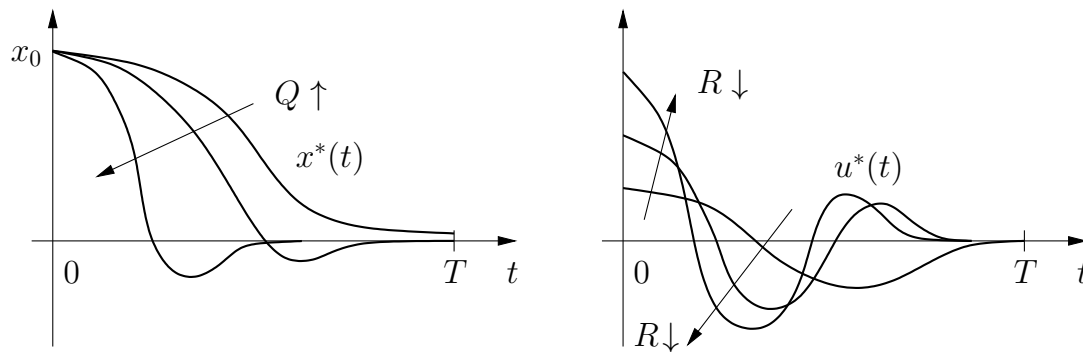


Abbildung 3.8: Beispielhaftes Zustands- und Stellgrößenverhalten für unterschiedliche Gewichtungsverhältnisse von Q und R ($x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $S = 0$).

Einen anderen Zugang bietet die (lineare) *optimale Regelung*, bei der die Regelgüte durch ein *Kostenfunktional*

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(T) \mathbf{S} \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^\top(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \quad (3.90)$$

auf einem Zeitintervall $t \in [0, T]$ charakterisiert wird, wobei sich die Zustandsverläufe in Abhängigkeit von $\mathbf{u}(t)$ aus dem Systemmodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.91)$$

berechnen. Die quadratischen Matrizen $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien symmetrisch und positiv semi-definit, während $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch und positiv definit angesetzt wird.² Der Term $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}$ gewichtet den zeitlichen Verlauf der Zustände $\mathbf{x}(t)$ im Vergleich zum Stellgrößenterm $\frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}$, während $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x}$ den Endwert $\mathbf{x}(T)$ gewichtet. Man spricht bei dem Term $\frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}$ häufig auch von einem Energieanteil, da $\mathbf{u}$ quadratisch vorkommt.

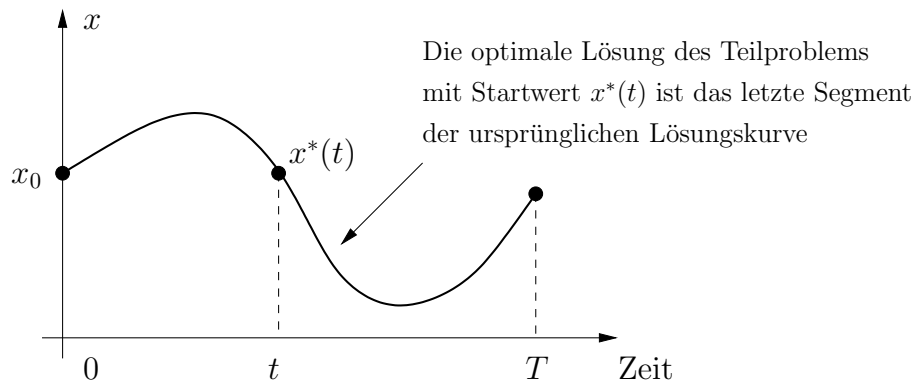
Wegen dem quadratischen Kostenfunktional und der linearen Systemdynamik wird dieses Problem in der Literatur auch als *LQR-Problem* (*Linear-Quadratic-Regulator*) bezeichnet. Gesucht wird der optimale Stellgrößenverlauf $\mathbf{u}^*(t)$, der das Kostenfunktional (3.90) minimiert, d.h.

$$J(\mathbf{u}^*, \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0). \quad (3.92)$$

Das Optimierungsproblem (3.90), (3.91) kann dabei wie folgt interpretiert werden: Bringe das System (3.91) ausgehend von $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ so nah wie möglich zum Ursprung unter Verwendung “optimaler” Zustands- und Stellgrößenverläufe $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{u}^*(t)$. Die Gewichtungsmatrizen $\mathbf{S}$, $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ bestimmen dabei das Eingangs- und Zustandsverhalten des Systems. Abbildung 3.8 veranschaulicht den Zusammenhang exemplarisch für $x \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}$.

Wie sich in den folgenden Abschnitten herausstellen wird, führt die Lösung des LQR-Problems auf ein lineares Regelgesetz, den sogenannten *LQR-Regler* bzw. *Riccati-Regler*. Zur Lösung des LQR-Problems wird die *dynamische Programmierung* nach BELLMAN herangezogen.

² Eine symmetrische Matrix $\mathbf{M}$ ist positiv semi-definit, wenn sämtliche Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$ sind. $\mathbf{M}$ ist positiv definit, wenn $\lambda_i > 0$ gilt.

Abbildung 3.9: Veranschaulichung des Optimalitätsprinzips ($x \in \mathbb{R}$).

3.5.1 Einführung in die dynamische Programmierung

Um die prinzipielle Idee der dynamischen Programmierung zu veranschaulichen, wird von der Minimierung eines allgemeinen nichtlinearen Kostenfunktionalis

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \varphi(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (3.93)$$

mit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ unter Berücksichtigung der nichtlinearen Systemdynamik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.94)$$

ausgegangen. Die Grundlage der dynamischen Programmierung bildet das *Optimalitätsprinzip*, das im folgenden Satz und in Abbildung 3.9 veranschaulicht wird.

Satz 3.6 (Optimalitätsprinzip) *Eine optimale Lösung hat die Eigenschaft, dass – beginnend bei jedem Punkt dieser Lösung – die verbleibende Lösung im Sinne der Optimierungsaufgabe optimal ist.*

Das Optimalitätsprinzip kann auf das Optimierungsproblem (3.93), (3.94) angewendet werden, indem die *Überführungskosten* (Englisch: *cost-to-go*)

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} \left\{ \int_t^T l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + \varphi(\mathbf{x}(T)) \right\} \quad (3.95)$$

eingeführt werden. Wenn die optimale Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^*(t)$ bekannt ist, dann stellt $V(\mathbf{x}^*(t), t)$ die *optimalen Überführungskosten* dar und die zugehörige optimale Steuerung ist das Reststück von $\mathbf{u}^*(t)$, siehe Abbildung 3.9.

Für jeden Zeitpunkt t' mit $t < t' < T$ lässt das Minimierungsproblem (3.95) für $V(\mathbf{x}(t), t)$ in der Form

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} \left\{ \int_t^{t'} l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + \int_{t'}^T l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + \varphi(\mathbf{x}(T)) \right\} \quad (3.96)$$

schreiben. Da nach dem Optimalitätsprinzip das Endstück einer optimalen Kurve selber wieder optimal ist, gilt für (3.96)

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} \left\{ \int_t^{t'} l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + V(\mathbf{x}(t'), t') \right\}. \quad (3.97)$$

Im Hinblick auf Satz 3.6 und Abbildung 3.9 sei daran erinnert, dass für die optimale Lösung offensichtlich $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{x}(t') = \mathbf{x}^*(t')$ gelten muss.

Die Beziehung (3.97) kann weiter vereinfacht werden, wozu der Einfachheit halber $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(t')$ verwendet wird. Unter der Annahme, dass $V(\mathbf{x}, t)$ stetig differenzierbar ist, existiert die Taylor-Entwicklung

$$V(\mathbf{x}', t') = V(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_x^\top(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(t) \Delta t + V_t(\mathbf{x}, t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.98)$$

Die Funktionen $\mathbf{V}_x$ und $\mathbf{V}_t$ stellen die partiellen Ableitungen von V bezüglich $\mathbf{x}$ und t dar. Des Weiteren gilt in erster Näherung

$$\int_t^{t'} l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau = l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.99)$$

Einsetzen von (3.94), (3.98) und (3.99) in (3.97) und Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in Δt führt auf die Form

$$V(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} \left\{ l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + V(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_x^\top(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + V_t(\mathbf{x}, t) \Delta t \right\}. \quad (3.100)$$

Dieser Ausdruck lässt sich weiter vereinfachen. Da $V(\mathbf{x}, t)$ per Definition (3.95) optimal und somit unabhängig vom Stellgrößenverlauf $\mathbf{u}(\tau)$, $t \in [t, T]$ ist, kann er aus dem Minimierungsausdruck genommen und gegen $V(\mathbf{x}, t)$ auf der linken Seite gekürzt werden. Des Weiteren kann $V_t(\mathbf{x}, t) \Delta t$ aus der Minimierungsklammer herausgenommen und anschließend die ganze Gleichung durch Δt gekürzt werden. Letztendlich stellt man fest, dass die Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ im verbleibenden Klammerausdruck $l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{V}_x^\top(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ nur noch zum Zeitpunkt t auftritt und nicht mehr als Zeitfunktion $\mathbf{u}(\tau)$, $\tau \in [t, t']$, wie es in (3.95) der Fall war. Somit kann (3.100) in der endgültigen Form

$$0 = V_t(\mathbf{x}, t) + \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \left\{ l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{V}_x^\top(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\} \quad (3.101)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung stellt eine nichtlineare partielle Differenzialgleichung für $V(\mathbf{x}, t)$ dar und ist unter dem Namen *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* (HJB-Gleichung) bekannt. Um $V(\mathbf{x}, t)$ aus (3.101) bestimmen zu können, ist noch die Endbedingung

$$V(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}) \quad (3.102)$$

notwendig, die aus (3.95) folgt. Es gilt nun folgender Satz:

Satz 3.7 (Hamilton-Jacobi-Bellman-Theorem) Sei $V(\mathbf{x}, t)$ eine stetig differenzierbare Lösung der HJB-Gleichung (3.101) mit der Endbedingung (3.102). Des Weiteren sei $\mathbf{u}^*(t)$, $t \in [0, T]$ eine stückweise stetige Funktion, die das Problem

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \left\{ l(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, t) + \mathbf{V}_x^\top(\mathbf{x}^*(t), t) \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, t) \right\} \quad (3.103)$$

für alle $\mathbf{x}^*(t)$ und $t \in [0, T]$ minimiert, wobei $\mathbf{x}^*(t)$ die zugehörige (angenommen eindeutige) Lösung von (3.94) sei. Dann stellt $V(\mathbf{x}^*(t), t)$, $t \in [0, T]$ mit $V(\mathbf{x}^*(T), T) = \varphi(\mathbf{x}^*(T))$ die optimale Überführungskostenfunktion (optimal cost-to-go) des Optimierungsproblems (3.93), (3.94) für alle Zeiten $t \in [0, T]$ dar und die Steuertrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ ist optimal.

Leider ist es nur in wenigen Fällen möglich, eine analytische Lösung der HJB-Gleichung zu berechnen. Gelingt dies aber, so kann man $V(\mathbf{x}, t)$ in das Minimierungsproblem (3.103) einsetzen und somit ein optimales Regelgesetz $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ herleiten, das (3.103) minimiert. Alternativ kann (3.101) näherungsweise (suboptimal) numerisch gelöst werden, was an dieser Stelle aber nicht weiter vertieft wird.

3.5.2 Riccati-Differenzialgleichung

Obwohl die Anwendung der HJB-Gleichung für allgemeine nichtlineare Probleme schwierig ist, stellt sie doch eine elegante Möglichkeit zur Lösung des LQR-Problems dar. Mit dem quadratischen Kostenfunktional (3.90) und dem linearen System (3.91) lautet die HJB-Gleichung (3.101)

$$0 = V_t(\mathbf{x}, t) + \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} + V_x^\top(\mathbf{x}, t) (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \right\}. \quad (3.104)$$

Da der Minimierungsterm stetig differenzierbar in $\mathbf{u}$ ist, kann die optimale Stellgröße $\mathbf{u}^*$ über die verschwindende erste Ableitung

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{V}_x(\mathbf{x}, t), \quad (3.105)$$

bestimmt werden. Einsetzen in (3.104) und Umformen liefert

$$0 = V_t + \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} - V_x^\top \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top V_x + \underbrace{V_x^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top V_x}_{2V_x^\top \mathbf{A} \mathbf{x}} \right), \quad (3.106)$$

wobei an dieser Stelle die Argumente der Einfachheit halber vernachlässigt wurden. In der obigen Gleichung sind $V(\mathbf{x}, t)$ und die partiellen Ableitungen $V_t(\mathbf{x}, t)$ und $V_x(\mathbf{x}, t)$ noch unbekannt.

Ein geeigneter Ansatz für die Überführungskosten ist

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}(t) \mathbf{x} \quad (3.107)$$

mit der noch unbekannten zeitvarianten und symmetrischen Gewichtungsmatrix $\mathbf{P}(t)$. Damit gilt

$$V_t(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}, \quad V_x(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}. \quad (3.108)$$

Setzt man nun (3.108) in die HJB-Gleichung (3.106) ein, so ergibt sich die endgültige Form (unter Vernachlässigung der Argumente)

$$0 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \left(\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \right) \mathbf{x}. \quad (3.109)$$

Die Endbedingung (3.102) lautet mit dem Ansatz (3.107)

$$0 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top (\mathbf{P}(T) - \mathbf{S}) \mathbf{x}. \quad (3.110)$$

Da die HJB-Gleichung (3.109) für alle beliebigen Zustände $\mathbf{x}$ gelten muss, müssen die Klammerterme in (3.109) und (3.110) verschwinden. Somit erhält man für $\mathbf{P}(t)$ die sogenannte *Matrix-Riccati-Differenzialgleichung*

$$\boxed{\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P} - \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P}(T) = \mathbf{S}}. \quad (3.111)$$

Der Ausdruck (3.105) für die optimale Stellgröße $\mathbf{u}^*(t)$ kann somit als das optimale Regelgesetz

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}(t), \quad (3.112)$$

dargestellt werden. Einige Anmerkungen sind im Folgenden zusammengetragen:

- Bei der Lösung der Matrix-Riccati-Differentialgleichung (3.111) geht man aufgrund der nicht vorhandenen Anfangsbedingung zweckmäßigerweise von $t = T$ aus und *integriert rückwärts* in der Zeit bis $t = 0$.
- Aufgrund dieser Rückwärtsintegration muss die zeitvariante Rückführmatrix $\mathbf{K}(t)$ im Voraus, also vor der eigentlichen Regelung des Systems, berechnet werden!
- $\mathbf{P}(t)$ ist symmetrisch und positiv semi-definit (alle Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$). Somit ist die Riccati-Dgl. der Ordnung n^2 aufgrund der Symmetrie nur $n(n+1)/2$ (untereinander verkoppelten) Differentialgleichungen äquivalent.
- Im Falle von zeitvarianten Systemmatrizen $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ und/oder Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ ändert sich nichts an der Herleitung.

Auf die regelungstechnischen Einsatzmöglichkeiten der Riccati-Differenzialgleichung wird in der Vorlesung “Methoden der Optimierung und optimalen Steuerung” noch näher eingegangen.

3.5.3 Algebraische Riccati-Gleichung

Ein Sonderfall liegt vor, wenn das Kostenfunktional (3.90) auf dem unendlichen Zeitintervall $[0, \infty)$ betrachtet wird. In diesem Fall macht die Endgewichtung $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(T) \mathbf{S} \mathbf{x}(T)$ keinen Sinn, da ohnehin $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gelten muss, damit das Funktional (3.90) einen endlichen Wert besitzt. Es wird also im Folgenden $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ gesetzt. Des Weiteren wird angenommen, dass

- $\mathbf{Q}$ positiv semi-definit und $\mathbf{R}$ positiv definit ist,
- das System (3.91) steuerbar ist,
- das Paar $[\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}]$ beobachtbar ist, wobei die Matrix $\bar{\mathbf{C}}$ aus der Zerlegung $\bar{\mathbf{C}}^\top \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}$ (z.B. mittels der Cholesky-Zerlegung) resultiert.

Unter diesen Annahmen kann gezeigt werden, dass die Lösung der Riccati-Dgl. (3.111) in Rückwärtszeit gegen eine stationäre positiv semi-definite Matrix $\bar{\mathbf{P}}$ konvergiert. Dabei ist $\bar{\mathbf{P}}$ unabhängig von dem Randwert $\mathbf{P}(T)$ bei dem die Rückwärtsintegration gestartet wird, solange $\mathbf{P}(T)$ positiv semi-definit ist. Somit kann zur näherungsweisen Bestimmung von $\bar{\mathbf{P}}$ die Riccati-Dgl. (3.111) ausgehend von einem beliebigen positiv semi-definiten Endpunkt $\mathbf{P}(T)$, z.B. $\mathbf{P}(T) = \mathbf{0}$, rückwärts integriert werden, bis die zeitliche Änderung $\dot{\mathbf{P}}(t)$ unterhalb eines Toleranzkriteriums liegt.

Eine elegantere Möglichkeit $\bar{\mathbf{P}}$ zu bestimmen, ist die Lösung der sogenannten *algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung*

$$\boxed{\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}}, \quad (3.113)$$

die sich direkt aus (3.111) mit $\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{0}$ ergibt. Da die Gleichung nichtlinear ist, können mehrere Lösungen existieren. Es kann aber unter den obigen Annahmen gezeigt werden, dass nur *eine positiv semi-definite* Lösung $\bar{\mathbf{P}}$ existiert. Zur Berechnung von $\bar{\mathbf{P}}$ aus der algebraischen Riccati-Gleichung (3.113) können verschiedene Verfahren verwendet werden (z.B. das Verfahren nach *Kalman* und *Englar*), auf die an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll.

Mit Hilfe des Optimalitätsprinzips in Satz 3.6 kann gezeigt werden, dass das nun zeitinvariante Rückführgesetz (3.112)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{u} = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{x} & \text{mit} \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \bar{\mathbf{P}} \quad (m > 1) \\ u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} & \mathbf{k}^\top = \frac{1}{R} \mathbf{b}^\top \bar{\mathbf{P}} \quad (m = 1) \end{array}} \quad (3.114)$$

tatsächlich die optimale Lösung des Problems (3.90), (3.91) auf dem unendlichen Intervall $[0, \infty)$ liefert. Die Ergebnisse sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 3.8 (LQ-Regler für lineare zeitinvariante Systeme) *Gegeben sei das steuerbare lineare zeitinvariante System (3.91) mit dem zu minimierenden Kostenfunktional*

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt, \quad (3.115)$$

wobei $\mathbf{Q}$ positiv semi-definit und $\mathbf{R}$ positiv definit sind und das Paar $[\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}]$ mit $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{C}}^\top \bar{\mathbf{C}}$ beobachtbar ist. Dann ergibt sich das Minimum von (3.115) durch das optimale Rückführgesetz (3.114) zu $J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^\top \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}_0$, wobei $\bar{\mathbf{P}}$ die eindeutige positiv semi-definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung (3.113) ist. Des Weiteren besitzen sämtliche Eigenwerte der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \bar{\mathbf{P}})$ negative Realteile, so dass der geschlossene Kreis

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \bar{\mathbf{P}}) \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

asymptotisch stabil ist.

Der optimale Zustandsregler (3.114) wird häufig auch als *Riccati-Regler* oder *LQ-Regler* (“linear-quadratischer Regler”) bezeichnet und wird in der Praxis häufig eingesetzt. Unter MATLAB kann die optimale Rückführmatrix $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \bar{\mathbf{P}}$ mit Hilfe der Befehle `lqr` bzw. `lqrd` oder `dlqr` berechnet werden.

Beispiel 3.8 (Simulationsbeispiel) Als Beispiel betrachte man das inverse Pendel-Wagen-System in Abbildung 1.13. Mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $M = 1 \text{ kg}$ und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ lautet das linearisierte System (1.68) mit den Zuständen $\Delta \mathbf{x} = [\Delta \phi, \Delta \dot{\phi}, \Delta x_w, \Delta \dot{x}_w]^\top$ und dem Ausgang $\Delta y = \Delta x_w$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 23.544 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5.886 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1.2 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Delta u \\ \Delta y &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.116)$$

Das inverse Pendel ist instabil, was man an den Eigenwerten (MATLAB Befehl `eig`)

$$\lambda_{1/2} = 0, \quad \lambda_{3/4} = \pm 4.85$$

ablesen kann. Für den LQR-Entwurf werden die Gewichtungsmatrizen zunächst mit

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(10^0, 10^0, 10^0, 10^0), \quad \mathbf{R} = 10^{-1}$$

angesetzt. Die numerische Lösung der Riccati-Gleichung (3.113) mit Hilfe von MATLAB (Befehl `lqr`) führt zu der Reglerverstärkung (3.114)

$$\mathbf{k}^\top = [-64.21 \quad -15.01 \quad -3.16 \quad -6.22]. \quad (3.117)$$

Ein Blick auf die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$

$$\lambda_1 = -7.37, \quad \lambda_2 = -3.34, \quad \lambda_{3/4} = -1.16 \pm j 0.41$$

zeigt, dass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist. Zusätzlich wird ein Vorfilter gemäß (3.6) entworfen

$$\mathbf{S} = (\mathbf{c}^\top (\mathbf{b}\mathbf{k}^\top - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b})^{-1} = -3.16,$$

um stationär eine gewünschte Wagenposition w einzustellen. Im Hinblick auf die Regelkreisstruktur in Abbildung 3.2 ergibt sich die gesamte Stellgröße zu

$$\Delta u = -\mathbf{k}^\top \Delta \mathbf{x} + \mathbf{S}w.$$

Abbildung 3.10 zeigt die Ergebnisse für die obige Wahl von $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ für Anfangsbedingungen $\Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und eine gewünschte Wagenposition von $w = 0.2 \text{ m}$.

Über die relative Wahl der Gewichtungen in $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ kann man beim LQR-Entwurf gezielt auf das Regelverhalten einzelner Zustände bzw. der Stellgröße eingreifen. Dies ist in den verbleibenden Trajektorien in Abbildung 3.10 ersichtlich, wo jeweils der Winkel $\Delta \phi$ bzw. die Wagenposition Δx_w um den Faktor 1000 stärker gewichtet sind. Die resultierenden Trajektorien weisen in diesem Fall ein deutlich verringertes Schwingverhalten in $\Delta \phi$ bzw. die Wagenposition Δx_w auf, was durch eine größere Stellamplitude erreicht wird.

Anmerkung: Wie in Beispiel 2.5 bereits untersucht wurde, besitzt die Übertragungsfunktion bzgl. der Wagenposition als Ausgangsgröße Δy , siehe (2.93),

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\Delta Y_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{4ls^2 - 6g}{l(m + 4M)s^4 - 6g(m + M)s^2} = \frac{0.8s^2 - 11.77}{s^4 - 23.54s^2}$$

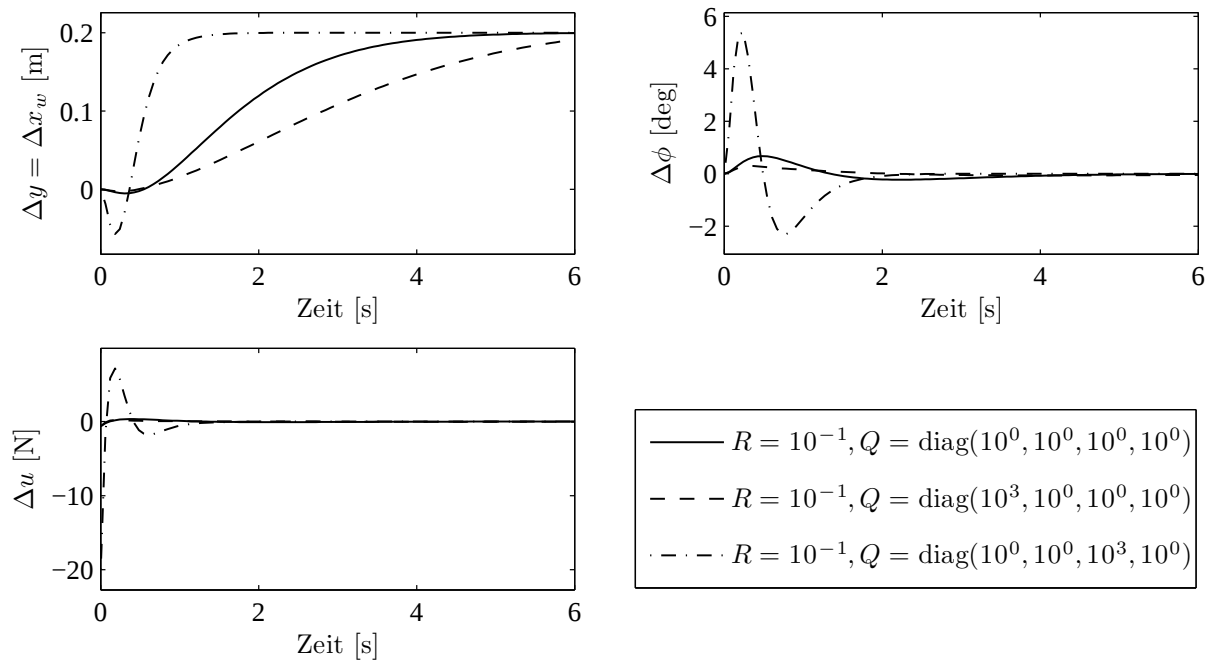


Abbildung 3.10: Simulationsergebnisse für das LQ-geregelte inverse Pendel mit unterschiedlichen Gewichtungen von $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ (Beispiel 3.8).

die Nullstellen $s_{0,1} = -3.836$ und $s_{0,2} = 3.836$. Da $s_{0,2}$ in der rechten Halbebene liegt, ist das inverse Pendel nichtminimalphasig. Anhand der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises (MATLAB-Befehle `ss` und `tf`)

$$G_R(s) = S\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_R)^{-1}\mathbf{b} = \frac{-2.53s^2 + 37.23}{s^4 + 13.03s^3 + 50.98s^2 + 73.28s + 37.23}$$

erkennt man, dass die Nullstellen $s_{0,1}$ und $s_{0,2}$ invariant gegenüber der Zustandsrückführung sind. Die Nullstelle $s_{0,2} > 0$ ist verantwortlich für das Gegenschwingverhalten des inversen Pendels (siehe auch Abschnitt 2.4.4).

Aufgabe 3.8 Informieren Sie sich unter MATLAB über die Funktion `lqr` durch den Aufruf `“help lqr”` bzw. `“doc lqr”`. Berechnen Sie mit Hilfe von `lqr` geeignete Regler für die Systeme in Beispiel 3.3 und Aufgabe 3.3. Vergleichen Sie die Reglerverstärkungen und die Eigenwerte im geschlossenen Kreis für verschiedene Werte in den Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$.

3.5.4 Vergleich zwischen Eigenwertvorgabe und LQR-Entwurf

Abschließend sind einige wichtige Unterschiede zwischen dem Reglerentwurf mittels Polvorgabe bzw. dem LQR-Entwurf zusammengetragen.

Polvorgabe:

- Die Dynamik des geschlossenen Kreises bzw. der Ein-/Ausgangsdynamik wird über die Lage der Eigenwerte gezielt beeinflusst.

- Die Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen ist problematisch, da (außer über die Lage der Eigenwerte) kein direktes Maß für das Verhalten der Stellgrößen besteht.
- Im Eingrößenfall ($m = 1$) ist die Eigenwertvorgabe eindeutig.
- Im Mehrgrößenfall ($m > 0$) bestehen zusätzliche Freiheitsgrade, z.B. die Verteilung der Eigenwerte auf die Steuerbarkeitsindizes $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ bzw. die Wahl alternativer Indizes $\{\rho'_1, \dots, \rho'_m\}$, so dass die reduzierte Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_S$ vollen Rang hat.
- Der Reglerentwurf mittels der Polvorgabe ist analytisch in der Hinsicht, dass sich die Bestimmungsgleichungen für die Reglerverstärkung (3.25), (3.56) bzw. (3.78) explizit angeben lassen.

LQR-Entwurf:

- Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises können nicht direkt vorgegeben werden.
- Die Einträge in den Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ (zumindest in der Diagonalen) besitzen eine anschauliche Bedeutung für das Verhalten des geschlossenen Kreises.
- Über die Einträge in $\mathbf{R}$ kann gezielt Einfluss auf einzelne Stellgrößen genommen werden, z.B. um Stellamplituden zu reduzieren und auf diesem Wege Stellgrößenbeschränkungen einzuhalten.
- Der LQR-Entwurf ist sowohl im Eingrößenfall als auch im Mehrgrößenfall eindeutig definiert, d.h. es bestehen keine zusätzlichen Freiheitsgrade wie beim Reglerentwurf mittels Polvorgabe.
- In der Praxis führt der LQR-Entwurf häufig zu einem robusteren Regler als der Reglerentwurf mittels Polvorgabe. Dies gilt insbesondere für den Mehrgrößenfall.
- Der LQR-Entwurf ist ein numerisches Verfahren, da die algebraische Riccati-Gleichung (3.113), bzw. die Riccati-Differenzialgleichung (3.111) numerisch gelöst werden muss.

3.6 Behandlung von Störgrößen

In Abschnitt 3.1 wurde ein Vorfilter $\mathbf{S}$ so entworfen, dass die bleibende Regelabweichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{w} - \mathbf{y}(t))$$

für eine Führungsgröße $\mathbf{w}$ verschwindet. Dies ist natürlich nicht mehr der Fall, wenn die Streckenparameter vom nominellen Wert abweichen bzw. Störungen auf die Strecke wirken. Man betrachte dazu das erweiterte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{d}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{3.118}$$

mit der Störeingangsmatrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ und dem Störgrößenvektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^l$. Setzt man für $\mathbf{u}$ den Zustandsregler (3.1) an und betrachtet den stationären Zustand $\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{0}$ mit einer konstanten Störung $\mathbf{d}$, so erhält man

$$\mathbf{x}_R = (\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{BS}\mathbf{w} + \mathbf{E}\mathbf{d}).$$

Mit der Gleichung (3.6) für den Vorfilter $\mathbf{S}$ gilt für den stationären Ausgang $\mathbf{y}_R = \mathbf{C}\mathbf{x}_R$ offensichtlich

$$\mathbf{y}_R = \mathbf{C}(\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{BS}\mathbf{w} + \mathbf{Ed}) = \mathbf{w} + \mathbf{C}(\mathbf{BK} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Ed} \neq \mathbf{w}.$$

Diese stationäre Regelabweichung lässt sich durch eine Störgrößenaufschaltung, bzw. einen zusätzlichen I-Anteil im Regelgesetz (3.1) berücksichtigen.

3.6.1 Störgrößenaufschaltung

Es wird im Folgenden angenommen, dass die Störung $\mathbf{d}$ in (3.118) messbar und bekannt ist. Bei der Störgrößenaufschaltung wird die Störung $\mathbf{d}$ kompensiert, indem zum Regelgesetz (3.1) ein zusätzlicher Term $\mathbf{u}_d$ addiert wird

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w} + \mathbf{u}_d. \quad (3.119)$$

Dabei wird $\mathbf{u}_d$ angesetzt, um den Störungsterm $\mathbf{Ed}$ im System (3.118) zu kompensieren, d.h.

$$\mathbf{Bu}_d + \mathbf{Ed} = \mathbf{0}. \quad (3.120)$$

Falls $n = m$ gilt und $\mathbf{B}$ regulär ist, kann diese Beziehung eindeutig nach

$$\mathbf{u}_d = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{Ed})$$

gelöst werden, wodurch die Störung im System (3.118) exakt kompensiert wird. Für gewöhnlich gilt jedoch $m < n$, so dass die Inversion der Steuermatrix $\mathbf{B}$ nicht möglich ist. Aus diesem Grund wird anstelle einer exakten Lösung versucht, die Gleichung (3.120) im Sinne eines *Least-Squares-Ansatzes* zu minimieren, d.h.

$$\min_{\mathbf{u}_d} \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\delta} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\delta} = \mathbf{Bu}_d + \mathbf{Ed}.$$

Der zu minimierende Term $\boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\delta}$ stellt eine quadratische Norm dar und lässt sich durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\delta} &= (\mathbf{Bu}_d + \mathbf{Ed})^\top (\mathbf{Bu}_d + \mathbf{Ed}) \\ &= \mathbf{u}_d^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{Bu}_d + \mathbf{u}_d^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{Ed} + \mathbf{d}^\top \mathbf{E}^\top \mathbf{Bu}_d + \mathbf{d}^\top \mathbf{E}^\top \mathbf{Ed} \\ &= \mathbf{u}_d^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{Bu}_d + 2\mathbf{u}_d^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{Ed} + \mathbf{d}^\top \mathbf{E}^\top \mathbf{Ed} \end{aligned}$$

darstellen. Das Minimum bzgl. $\mathbf{u}_d$ ergibt sich mit Hilfe der ersten Ableitung

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\delta})}{\partial \mathbf{u}_d} = 2\mathbf{B}^\top \mathbf{Bu}_d + 2\mathbf{B}^\top \mathbf{Ed} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}.$$

Unter der berechtigten Annahme, dass die Spalten der Matrix $\mathbf{B}$ linear unabhängig sind, ist $\mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ invertierbar und die Störgrößenaufschaltung berechnet sich zu

$$\mathbf{u}_d = -(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{Ed}, \quad (3.121)$$

womit sich das gesamte Rückführgesetz (3.119) wie folgt ergibt

$$\boxed{\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w} - (\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{Ed}}. \quad (3.122)$$

3.6.2 PI-Zustandsregler

Die Störgrößenaufschaltung setzt das Wissen über die Störgröße $\mathbf{d}$ und die Störeingangsmatrix $\mathbf{E}$ voraus, was in praktischen Anwendungen oft nicht der Fall ist. Eine flexiblere Möglichkeit ist, einen zusätzlichen I-Anteil im Regelgesetz (3.1) einzuführen, um zumindest konstante Störungen und Parameterabweichungen stationär unterdrücken zu können. Dazu wird ein so genannter *PI-Zustandsregler* der Form

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{w} - \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_p(\mathbf{w} - \mathbf{C}\mathbf{x}) + \mathbf{K}_I\mathbf{x}_I \end{cases} \quad (3.123)$$

angesetzt. Der PI-Zustandsreglerentwurf basiert auf dem um die Integratorzustände $\mathbf{x}_I \in \mathbb{R}^p$ erweiterten System (3.118)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_I} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}_I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{I,0} \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Um nun einen Regler für dieses erweiterte System auslegen zu können, ist der folgende Satz hilfreich:

Satz 3.9 *Wenn die Rangbedingung*

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + p$$

erfüllt ist, dann folgt aus der Steuerbarkeit von $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ die Steuerbarkeit des erweiterten Systems $(\mathbf{A}_I, \mathbf{B}_I)$.

Der Entwurf der Reglerv Verstärkungen $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_p$ und $\mathbf{K}_I$ erfolgt nun in zwei Schritten:

Schritt 1: Im ersten Schritt wird für das erweiterte System (3.124) ein Zustandsregler

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

entworfen. Der Vergleich von (3.123) mit (3.125) zeigt, dass gelten muss

$$\mathbf{K} + \mathbf{K}_p\mathbf{C} = \mathbf{K}_1, \quad -\mathbf{K}_I = \mathbf{K}_2. \quad (3.126)$$

Schritt 2: Im zweiten Schritt müssen noch gemäß (3.126) die Parameter $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}_p$ festgelegt werden. Da dieses Problem unterbestimmt ist, legt man im Allgemeinen $\mathbf{K}_p$ fest und berechnet sich anschließend $\mathbf{K}$ aus (3.126). Geht man davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangszustände $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}_{I,0} = \mathbf{0}$ sind und die Führungsgröße $\mathbf{w}$ für $t \geq 0$ konstant ist, so folgt aus (3.123)

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{K}_p\mathbf{w}.$$

Wenn die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ stabil ist, also alle Eigenwerte in der linken Halbebene liegen, dann errechnet sich die Ausgangsgröße im eingeschwungenen Zustand zu

$$\mathbf{y}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = -\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{Bu}_\infty \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_\infty = -(\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{y}_\infty.$$

Es ist es nun zweckmäßig, den Proportionalanteil $\mathbf{K}_p$ so festzulegen, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Stellgröße $\mathbf{u}(0)$ den gleichen Wert, der auch für $t \rightarrow \infty$ zur Einhaltung der Bedingung $\mathbf{y}_\infty = \mathbf{w}$ benötigt wird, annimmt, d.h.

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{K}_p \mathbf{w} \stackrel{!}{=} -(\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{w}.$$

Somit gilt zusammenfassend für die einzelnen Verstärkungsmatrizen im Regelgesetz (3.123) des PI-Zustandsreglers

$$\boxed{\mathbf{K}_p = -(\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \quad \mathbf{K}_I = -\mathbf{K}_2, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_p\mathbf{C}}, \quad (3.127)$$

wobei sich $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_2$ aus dem Reglerentwurf für das erweiterte System (3.124) (unter Vernachlässigung des Störungsterms $\mathbf{Ed}$) ergeben. Abbildung 3.11 zeigt das Blockschaltbild des PI-Zustandsreglers.

Anmerkungen:

- Der P-Anteil im Regelgesetz (3.123) ist nicht zwingend notwendig. Allerdings bewirkt er den Effekt einer *statischen Vorsteuerung*, da $\mathbf{u}(t)$ bei einem Sprung der Führungsgröße $\mathbf{w}$ möglichst schnell auf den stationären Wert $\mathbf{u}_\infty$ gebracht wird.
- Zur Berechnung von $\mathbf{K}_p$ für den P-Anteil in (3.123) wurde eine asymptotisch stabile Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ vorausgesetzt. In diesem Fall ist $\mathbf{A}$ regulär und kann folglich invertiert werden. Wenn $\mathbf{A}$ nicht asymptotisch stabil ist, so kann $\mathbf{K}_p = \mathbf{0}$ gesetzt werden, was (3.123) sowie (3.127) entsprechend vereinfacht.

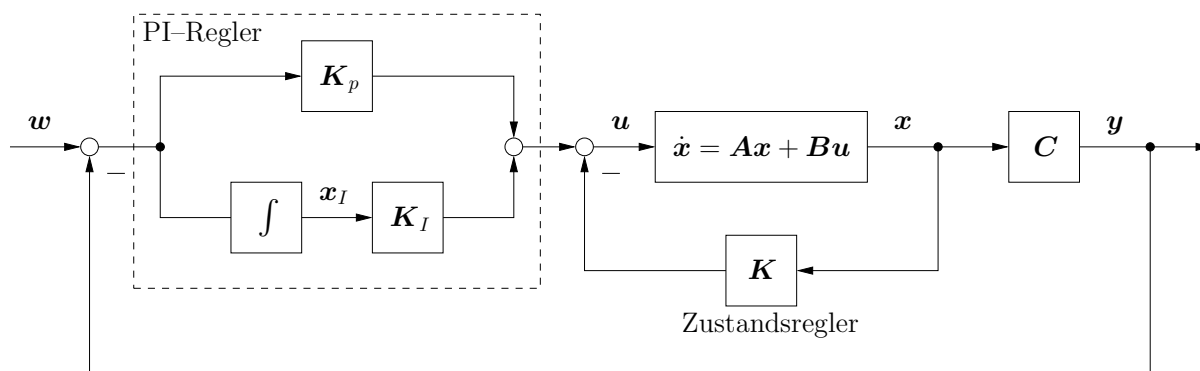


Abbildung 3.11: Blockschaltbild des PI-Zustandsreglers.

Beispiel 3.9 (Simulationsbeispiel) Für den Zweimassenschwinger in Abbildung 3.4 mit dem zugehörigen mathematischen Modell (3.27) soll ein PI-Zustandsregler so entworfen werden, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei

$$\lambda_{1/2}^* = -0.5 \pm j0.5, \quad \lambda_3^* = -1, \quad \lambda_4^* = -1.5, \quad \lambda_5^* = -2 \quad (3.128)$$

liegen. Dem Entwurfsverfahren folgend ergibt sich mit Hilfe der MATLAB-Funktion *acker* das Rückführgesetz (3.123)

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= w - \mathbf{c}^\top x \\ u &= - \underbrace{\begin{bmatrix} -3.3 & -4.3 & -38.9 & -60.4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^\top} \mathbf{x} + \underbrace{(-1)}_{k_p} (w - \mathbf{c}^\top x) + \underbrace{(-15)}_{k_I} x_I. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Literatur

- [1] P.L. Falb und W.A. Wolovich. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12:651–659, 1967.
- [2] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig, Heidelberg, 8th edition, 1994.
- [3] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, Berlin, 3rd edition, 1995.
- [4] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1980.
- [5] H. Kwakernaak und R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [6] J. Lunze. *Regelungstechnik 2*. Springer, Berlin, 4th edition, 2006.
- [7] M. Papageorgiou. *Optimierung*. Oldenbourg Verlag, 1991.
- [8] W.J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2nd edition, 1996.
- [9] J.-J. Slotine und W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.

Kapitel 4

Beobachterentwurf

Für den Zustandsreglerentwurf wurde bisher angenommen, dass der ganze Zustandsvektor $\mathbf{x}$ bekannt ist. In vielen Fällen ist dies natürlich nicht möglich, weshalb man sich die Frage stellt, ob man den Zustand $\mathbf{x}$ allein durch Kenntnis der Ausgangsgröße $\mathbf{y}$ und der Stellgröße $\mathbf{u}$ rekonstruieren kann. Um diese Frage zu beantworten, betrachte man das lineare zeitinvariante Mehrgrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.1}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, dem gemessenen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ sowie den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Eine Einrichtung, die aus Kenntnis des Zeitverlaufes des Eingangs $\mathbf{u}(\tau)$ und des Ausgangs $\mathbf{y}(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$ den Zustand $\mathbf{x}(t)$ zum Zeitpunkt t bestimmt, wird *Beobachter* genannt. Es wird sich in weiterer Folge noch zeigen, dass ein Beobachter für (4.1) genau dann konstruiert werden kann, wenn das System (4.1) vollständig beobachtbar ist.

4.1 Trivialer Beobachter (Simulator)

Die einfachste Möglichkeit, den Zustand $\mathbf{x}$ zu schätzen, besteht darin, das mathematische Modell der Strecke (4.1)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{4.2}$$

mit dem geschätzten Zustand $\hat{\mathbf{x}}$ zu simulieren. Die Abweichung des geschätzten Zustandes $\hat{\mathbf{x}}$ vom tatsächlichen Zustand $\mathbf{x}$, der sogenannte *Beobachtungsfehler* $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, genügt dann der Differenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0.\tag{4.3}$$

Ein Beobachter der Form (4.2), der einfach eine Kopie des Streckenmodells im Rechner darstellt, wird auch als *trivialer Beobachter* oder *Simulator* bezeichnet und er hat folgende Nachteile:

- Die Fehlerdynamik (4.3) ist offenbar nur dann stabil, wenn die Strecke stabil ist, also sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ in der linken Halbebene liegen und
- das Abklingen von Beobachtungsfehlern $\mathbf{e}_0$ bei stabilen Strecken kann nicht beeinflusst werden, sondern ist durch die Streckendynamik festgelegt.

Der triviale Beobachter (4.2) macht noch nicht von der Tatsache Gebrauch, dass dem System (4.1) die Messung des Ausgangs $\mathbf{y}$ zur Verfügung steht. Diese Überlegung führt schlussendlich zum so genannten vollständigen Luenberger–Beobachter, der im Folgenden behandelt wird.

4.2 Vollständiger Luenberger–Beobachter

Fügt man dem trivialen Beobachter (4.2) einen zusätzlichen Term $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$, $\hat{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ dazu, so erhält man den sogenannten *Luenberger–Beobachter*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \overbrace{\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u}^{\text{Simulator}} + \overbrace{\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}^{\text{Korrektur}}, & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

bestehend aus einem Simulator– und Korrekturteil, siehe Abbildung 4.1.

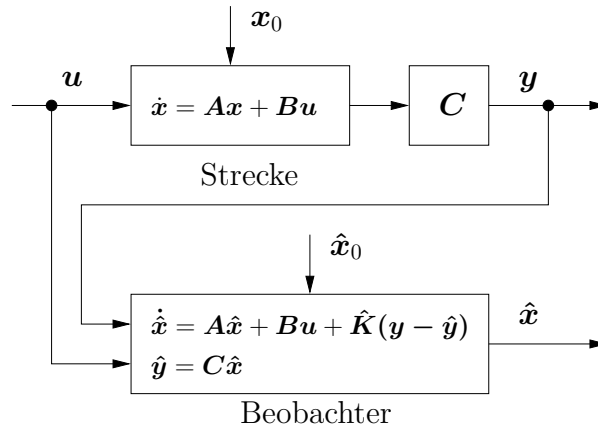


Abbildung 4.1: Struktur der Strecke/Beobachter–Konfiguration.

Die zugehörige Fehlerdynamik für $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ mit $\mathbf{x}$ von (4.1) und $\hat{\mathbf{x}}$ von (4.4) errechnet sich in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}u - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\ &= \underbrace{(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})}_{\mathbf{A}_e} \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Es stellt sich nun die Aufgabe, $\hat{\mathbf{K}}$ so zu entwerfen, dass die Fehlerdynamikmatrix $\mathbf{A}_e = (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})$ stabil ist, also alle Eigenwerte in der linken Halbebene liegen, damit der Schätzfehler $\mathbf{e}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

Da die Matrix $(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})$ die gleichen Eigenwerte wie ihre Transponierte

$$(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})^\top = \mathbf{A}^\top - \mathbf{C}^\top \hat{\mathbf{K}}^\top$$

besitzt, kann das Problem, $\hat{\mathbf{K}}$ so zu wählen, dass $\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}$ stabil ist, als ein Reglerentwurfsproblem aufgefasst werden. Dies wird offensichtlich, wenn man die transponierte Matrix $(\mathbf{A}^\top - \mathbf{C}^\top \hat{\mathbf{K}}^\top)$ als die Systemmatrix eines geschlossenen Regelkreises für das duale System in (2.164)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_D &= \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_D + \mathbf{C}^\top \mathbf{u}_D \\ \mathbf{y}_D &= \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_D\end{aligned}\tag{4.6}$$

mit dem Rückführgesetz

$$\mathbf{u}_D = -\hat{\mathbf{K}}^\top \mathbf{x}_D$$

interpretiert. In diesem Zusammenhang sei an Satz 2.19 erinnert, dem zufolge das System (4.1) beobachtbar ist, wenn das duale System (4.6) steuerbar ist. Zusammenfassend gilt die folgende Analogie zwischen Regler- und Beobachterentwurf:

Zustandsregler	$\Leftrightarrow$	Beobachter
$\mathbf{A}$		$\mathbf{A}^\top$
$\mathbf{B}$		$\mathbf{C}^\top$
$\mathbf{C}$		$\mathbf{B}^\top$
$\mathbf{K}$		$\hat{\mathbf{K}}^\top$
$\mathbf{Q}_B$		$\mathbf{Q}_S^\top$
$\mathbf{Q}_S$		$\mathbf{Q}_B^\top$

Die Berechnung der Verstärkungsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ für den Luenberger–Beobachter (4.4) kann also über eines der in Kapitel 3 behandelten Verfahren erfolgen.

Eingrößenfall: Aufgrund seiner Bedeutung und um die Dualität zwischen Zustandsregler- und Beobachterentwurf hervorzuheben, wird im Folgenden die Polvorgabe mit Hilfe der Ackermann-Formel im Eingrößenfall (Satz 3.1) auf den Beobachterentwurf übertragen. Dazu wird das lineare Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.7}$$

mit dem zu entwerfenden Beobachter (4.4)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \hat{\mathbf{k}}(y - \hat{y}), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{4.8}$$

und der Fehlerdynamik (4.5) betrachtet

$$\dot{\mathbf{e}} = \underbrace{(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\top)}_{\mathbf{A}_e} \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0.\tag{4.9}$$

Satz 4.1 (Ackermann–Formel für Zustandsbeobachter – Eingrößenfall) Die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix $\mathbf{A}_e = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\top$ des Fehlersystems (4.9) des vollständigen Beobachters (4.8) zum System (4.7) können genau dann durch $\hat{\mathbf{k}}$ beliebig platziert werden, wenn das System (4.7) beobachtbar ist. Der Rückführvektor berechnet sich dann nach der Formel

$$\hat{\mathbf{k}} = (\hat{p}_0 \mathbf{I} + \hat{p}_1 \mathbf{A} + \cdots + \hat{p}_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) \hat{\mathbf{t}} \quad (4.10)$$

in Abhängigkeit von $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_B^{-1}[0, \dots, 0, 1]^\top$ – der letzten Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix (2.147) – und den Koeffizienten $\hat{p}_i$ des gewünschten charakteristischen Polynoms

$$\hat{p}^*(\lambda) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 \lambda + \cdots + \hat{p}_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n = \prod_{i=1}^n (\lambda - \hat{\lambda}_i^*).$$

Damit der Beobachtungsfehler $\mathbf{e}$ schneller abklingt als das Dynamikverhalten des beobachteten Systems, wählt man die Beobachtermatrix $\hat{\mathbf{K}}$ zweckmäßigerweise so, dass die Eigenwerte von $(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})$ links der dominierenden Eigenwerte von $\mathbf{A}$ liegen.

Einfluß von Messrauschen: Theoretisch können die Beobachtereigenwerte beliebig weit links platziert werden, da keine Stellgrößenbeschränkungen wie beim Reglerentwurf eingehalten werden müssen. Allerdings tritt in der Praxis häufig Messrauschen $\mathbf{r}(t)$ in der Messung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \quad (4.11)$$

auf, was einen direkten Einfluß auf den Beobachter hat. Betrachtet man nämlich die Fehlerdynamik (4.5) mit dem zusätzlichen Eintrag $\mathbf{r}(t)$, so ergibt sich

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{r}(t). \quad (4.12)$$

Da die Einträge in der Beobachtermatrix $\hat{\mathbf{K}}$ anwachsen, je weiter die Beobachtereigenwerte nach links verschoben werden, wird das Messrauschen den Beobachtungsfehler $\mathbf{e}(t)$ stärker beeinflussen.

Aufgabe 4.1 (Simulationsbeispiel) Für den gekoppelten Feder–Masse–Schwinger in Abbildung 3.4 mit dem mathematischen Modell (3.27) und den Parametern (3.28) soll ein Luenberger–Beobachter entworfen werden. Mit den gewünschten Eigenwerten $\lambda_{1/2}^* = -1 \pm j1$ und $\lambda_{3/4}^* = -3 \pm j3$ lautet die Beobacherverstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ gemäß (4.10)

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 51.0 \\ 126.8 \\ 6.8 \\ 22.54 \end{bmatrix}.$$

Alternativ kann $\hat{\mathbf{k}}$ mit Hilfe der Ackermann–Formel (3.25) als Reglerverstärkung für das duale System

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_d + \mathbf{c}^\top u$$

berechnet werden. Mit der Beobacherverstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ ergibt sich der Luenberger–Beobachter zu

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & -51.0 & 0 \\ -1.0 & -1.0 & -125.8 & 1.0 \\ 0 & 0 & -6.8 & 1.0 \\ 0.1 & 0.1 & -22.74 & -0.2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\top} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \hat{\mathbf{k}}y \quad (4.13)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{x}}.$$

4.3 Separationsprinzip

Wenn man nicht den gesamten Zustand $\mathbf{x}$ messen kann und doch einen Zustandsregler einsetzen will, ist es naheliegend, den Zustandsregler mit einem Zustandsbeobachter zu kombinieren. Das heißt, für das lineare, zeitinvariante System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.14)$$

wird ein Zustandsbeobachter

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \overbrace{\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u}^{\text{Simulator}} + \overbrace{\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}^{\text{Korrektur}}, & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

entworfen und im Zustandsregelgesetz (3.1) anstelle des tatsächlichen Zustandes $\mathbf{x}$ der beobachtete Zustand $\hat{\mathbf{x}}$ in der Form

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{S}w \quad (4.16)$$

eingesetzt. Abbildung 4.2 veranschaulicht die Struktur des resultierenden Regelkreises.

Wenn man nun den Zustandsregler und den Zustandsbeobachter separat entwirft, also die Reglerverstärkung $\mathbf{K}$ und die Beobacherverstärkung $\hat{\mathbf{K}}$ getrennt von einander berechnet, stellt sich die Frage, wo die Eigenwerte des geschlossenen Kreises nach Abbildung 4.2 zu liegen kommen. Die Antwort auf diese Frage gibt das so genannte *Separationsprinzip*:

Satz 4.2 (Separationsprinzip) *Wenn das System (4.14) vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar ist, dann ergibt sich das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises von Abbildung 4.2 nach den Gleichungen (4.14)–(4.16) zu*

$$p_{ges}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}) = p^*(\lambda)\hat{p}^*(\lambda)$$

mit den gewünschten charakteristischen Polynomen $p^*(\lambda)$ für den Zustandsreglerentwurf und $\hat{p}^*(\lambda)$ für den Zustandsbeobachterentwurf.

Beweis: Um diesen wichtigen Satz zu beweisen, schreibt man den geschlossenen Kreis (4.14)–(4.16) als Differenzialgleichungssystem mit dem erweiterten Zustand $\mathbf{x}_{ges}^\top = [\mathbf{x}^\top, \mathbf{e}^\top]$

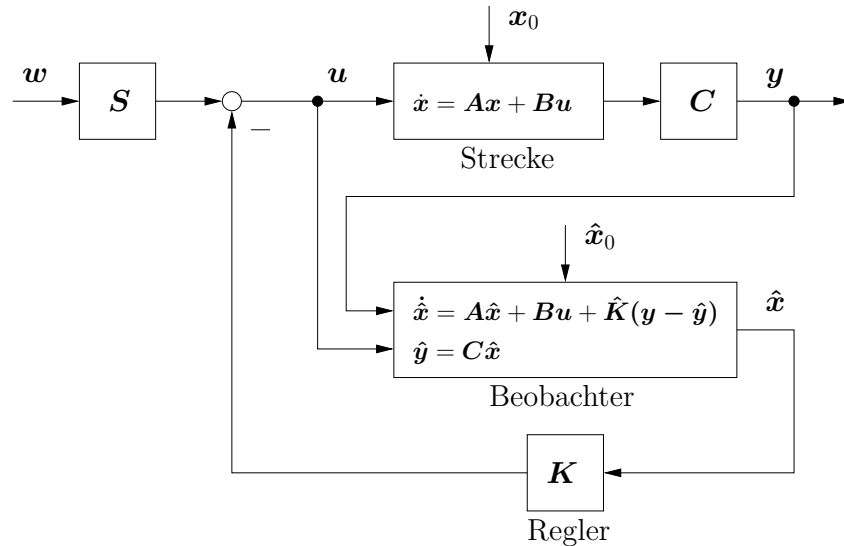


Abbildung 4.2: Struktur der Zustandsregler/Beobachter-Konfiguration.

und dem Beobachtungsfehler $e = x - \hat{x}$ in der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix}}_{\dot{x}_{ges}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - \hat{K}C \end{bmatrix}}_{A_{ges}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}}_{x_{ges}} + \underbrace{\begin{bmatrix} BS \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{ges}} w \quad (4.17)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix},$$

wobei für e das Fehlersystem (4.5) gilt. Man erkennt unmittelbar, dass sich aufgrund der Blockstruktur von A_{ges} das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises zu

$$\det(\lambda I - A_{ges}) = \det(\lambda I - A + BK) \det(\lambda I - A + \hat{K}C)$$

berechnet. ■

Aufgabe 4.2 Berechnen Sie die Übertragungsmatrix $G_w(s) = [Y_i(s)/W_j(s)]$ des dynamischen Reglers, der sich durch Zusammenschaltung des vollständigen Beobachters mit dem Zustandsregler ergibt. Welchen Schluss können Sie aus der Ordnung der Übertragungsfunktion $G_w(s)$ ziehen?

Lösung: Die Übertragungsmatrix lautet

$$G_w(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BS.$$

Die Ordnung der Übertragungsfunktion ist lediglich n , da der Beobachtungsfehler in (4.17) durch den Eingang w nicht beeinflusst werden kann und somit das System (4.17) ein nicht erreichbares Teilsystem n -ter Ordnung besitzt. Somit kann man bei Betrachtung des Ein-/Ausgangsverhaltens nicht erkennen, ob ein Regelkreis einen Beobachter besitzt oder nicht!

Beim Einsatz eines Beobachters in Kombination mit einem Zustandsregler wählt man die Eigenwerte von $(A - \hat{K}C)$ nicht im Vergleich zu der Systemmatrix A (wie im Abschnitt 4.2 diskutiert wurde), sondern in Bezug auf die Eigenwerte von $(A - BK)$. Der Gesamtentwurf folgt dabei folgenden Schritten:

- a) Überprüfung der Strecke auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit,
- b) Entwurf einer Zustandsrückführung $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{w}$,
- c) Festlegung der Beobachterpole anhand der Eigenwerte von $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$,
- d) Berechnung der Beobachtermatrix $\hat{\mathbf{K}}$ z.B. mittels Reglerentwurf für das duale System (4.6). Wird ein LQR-Entwurf für den Beobachter gewählt, so sollte anhand der Beobachtereigenwerte nachträglich überprüft werden, ob die Vorgaben aus c) erfüllt sind.

In der Praxis gilt, dass die Realteile der Beobachterpole um den Faktor 2–6 schneller sein sollten als die Realteile der dominierenden Eigenwerte der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$, wobei Faktor 2 bei stark verrauschten Messgrößen $\mathbf{y}(t)$ gilt. Diese Faustformel gewährleistet, dass das Regelverhalten des geschlossenen Kreises hauptsächlich von der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ abhängt.

Beispiel 4.1 (Simulationsbeispiel) Für den gekoppelten Feder–Masse–Schwinger in Abbildung 3.4 mit dem mathematischen Modell (3.27) und den Parametern (3.28) sollen der PI–Zustandsregler (3.129) und der Luenberger–Beobachter (4.13) kombiniert werden. Da die Eigenwerte des Beobachters um den Faktor 2–6 schneller sein sollen als die Eigenwerte (3.128) des geschlossenen Regelkreises, werden die Beobachtereigenwerte dazu auf die Werte $\hat{\lambda}_{1/2} = -4 \pm j 2$ und $\hat{\lambda}_{3/4} = -6 \pm j 3$ gelegt.

4.4 Behandlung von Störgrößen – Störbeobachter

In Abschnitt 3.6 wurde auf die Behandlung von Störgrößen beim Entwurf eines Zustandsreglers eingegangen, wobei davon ausgegangen wurde, dass die Störung $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^l$ mit einer Störeingangsmatrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ auf das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{d}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.18}$$

wirkt. In vielen Fällen ist die Kenntnis der Störgröße $\mathbf{d}$ hilfreich bzw. notwendig, z.B. um eine Störgrößenaufschaltung zu realisieren (Abschnitt 3.6.1).

Wenn die Störung nicht messbar ist, so kann ein *Störgrößenbeobachter* eingesetzt werden, um $\mathbf{d}$ zu schätzen. Dazu muss bekannt sein, welche Art von Störung auf das System wirkt, um ein *Störgrößenmodell* der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d, & \mathbf{x}_d(0) &= \mathbf{x}_{d,0} \\ \mathbf{d} &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d\end{aligned}\tag{4.19}$$

ansetzen zu können. In Tabelle 4.1 sind drei Beispiele für Störmodelle dargestellt.

Zusammen mit der Strecke (4.18) ergibt sich das erweiterte Modell

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E}\mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}, & \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}_d(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{d,0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{4.20}$$

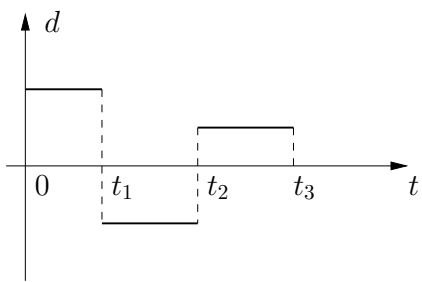
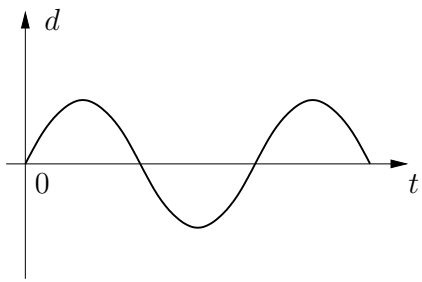
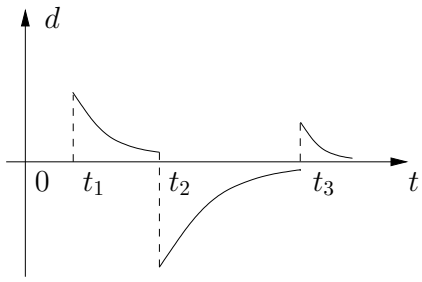
Art der Störung	Störmodell	Veranschaulichung
konstant (z.B. Coulombsche Reibung)	$\dot{x}_d = 0$ $d = x_d$	
periodisch (z.B. Vibration mit konst. Frequenz)	$\dot{x}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix} x_d$ $d = [1, 0] x_d$	
abklingend (z.B. Reaktionskinetik in chemischen Reaktoren)	$\dot{x}_d = -\frac{1}{T} x_d$ $d = x_d$	

Tabelle 4.1: Beispiele von Störmodellen (4.18).

das in Abbildung 4.3 veranschaulicht ist. Analog zum vorherigen Abschnitt kann für das erweiterte Modell (4.20) ein Luenberger-Beobachter entworfen werden kann. Die geschätzte Störgröße $\hat{d}(t)$ kann dann z.B. für eine Störgrößenaufschaltung (3.122)

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + Sw - (B^T B)^{-1} B^T E \hat{d}(t) \quad (4.21)$$

zusammen mit den geschätzten Zuständen $\hat{x}(t)$ verwendet werden.

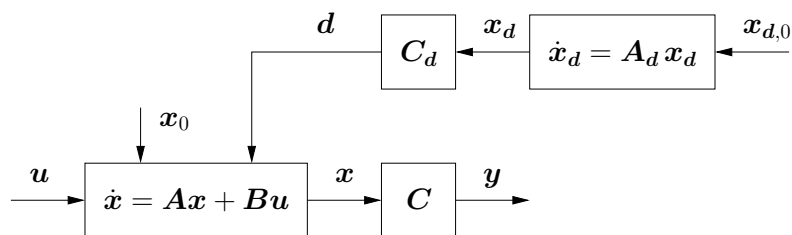


Abbildung 4.3: Erweitertes Streckenmodell (4.20).

4.5 Reduzierter Beobachter

Beim vollständigen Luenberger–Beobachter wird der gesamte Zustand $\mathbf{x}$ geschätzt, obwohl durch die Messung von $\mathbf{y}$ über die Ausgangsgleichung eine Linearkombination der Zustandsgrößen bekannt ist. Diese Redundanz ist bei einem skalaren System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}\tag{4.22}$$

direkt ersichtlich, da hier der Zustand x direkt aus der Ausgangsgleichung über die Beziehung

$$x = \frac{y}{c}\tag{4.23}$$

ermittelt werden kann. Um diese Informationen im allgemeinen Fall zu nutzen, wird angenommen, dass für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\tag{4.24}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ im Folgenden p linear unabhängige Messungen

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}\tag{4.25}$$

mit $\text{Rang}(\mathbf{C}) = p$ zur Verfügung stehen. Man kann nun in weiterer Folge stets eine reguläre Zustandstransformation

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}\tag{4.26}$$

mit der Untermatrix $\mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$ finden, für die sich das transformierte System

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p \times p} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{4.27}$$

mit der partitionierten Struktur

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p \times p} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{4.28}$$

ergibt. Man sagt dann auch, das System (4.28) liegt in *Sensorkoordinaten* vor, da der obere Teil des Zustands mit den Messgrößen übereinstimmt. Multipliziert man die Differenzialgleichung für $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}_1$ mit einer noch zu bestimmenden Matrix $\hat{\mathbf{K}}_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ und subtrahiert diese von der Differenzialgleichung für $\tilde{\mathbf{x}}_2$, dann ergibt sich mit dem neuen Zustand

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{y}\tag{4.29}$$

das System

$$\dot{\mathbf{w}} = (\tilde{\mathbf{A}}_{22} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{w} + (\tilde{\mathbf{A}}_{21} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{11} + \tilde{\mathbf{A}}_{22} \hat{\mathbf{K}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12} \hat{\mathbf{K}}_2)\mathbf{y} + (\tilde{\mathbf{B}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_1)\mathbf{u}.\tag{4.30}$$

Dabei sind die Größen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{y}$ bekannt und können daher als Eingangsgrößen für das System (4.30) betrachtet werden. Der reduzierte Beobachter für die unbekannten Größen $\mathbf{w}$ entspricht dann direkt dem trivialen Beobachter für (4.30), d.h.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{w}}} = & (\tilde{\mathbf{A}}_{22} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12}) \hat{\mathbf{w}} + (\tilde{\mathbf{B}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_1) \mathbf{u} + \\ & (\tilde{\mathbf{A}}_{21} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{11} + \tilde{\mathbf{A}}_{22} \hat{\mathbf{K}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12} \hat{\mathbf{K}}_2) \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Dynamik des Schätzfehlers $\mathbf{e}_w = \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$ ist durch

$$\dot{\mathbf{e}}_w = \underbrace{(\tilde{\mathbf{A}}_{22} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12})}_{\tilde{\mathbf{A}}_{22,e}} \mathbf{e}_w \quad (4.32)$$

gegeben und die Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_2$ für den Zustand $\tilde{\mathbf{x}}_2$ erhält man unmittelbar aus (4.29)

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{y}. \quad (4.33)$$

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 4.3 (Luenberger–Beobachter reduzierter Ordnung) *Wenn das System (4.24) und (4.25) mit $\text{Rang}(\mathbf{C}) = p$ vollständig beobachtbar ist, dann kann mit dem reduzierten Beobachter (4.31), (4.33) der Zustand $\tilde{\mathbf{x}}_2$ in Sensorkoordinaten (4.26) rekonstruiert werden und mit Hilfe von $\hat{\mathbf{K}}_2$ können die Eigenwerte der Fehlerdynamik (4.32) beliebig platziert werden.*

In Analogie zum Reglerentwurf im Mehrgrößenfall liegt die Matrix $\hat{\mathbf{K}}_2$ durch Vorgabe eines gewünschten charakteristischen Polynoms für die Fehlerdynamik (4.32) nicht eindeutig fest. Im Eingrößenfall ($m = p = 1$) ist der Sachverhalt aber eindeutig und die Elemente des Beobachtervektors $\hat{\mathbf{k}}_2$ können z.B. durch Koeffizientenvergleich mit dem gewünschten charakteristischen Polynom bestimmt werden.

Beispiel 4.2 *Für den gekoppelten Feder–Masse–Schwinger in Abbildung 3.4 wird nun angenommen, dass die Positionen s_1 und s_2 der Massen m_1 und m_2 gemessen werden. Die Sensorkoordinaten (4.26) sind somit direkt durch*

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

gegeben und das mathematische Modell (3.27) mit den Parametern (3.28) lässt sich durch Vertauschung der Zustände direkt in der Form (4.28)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 \\ 0.1 & -0.2 & \vdots & 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

angeben. Da zwei Zustände direkt gemessen werden, hat der reduzierte Beobachter die Ordnung 2. Die Beobacherverstärkung $\hat{\mathbf{K}}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ wird nun so gewählt, dass die Dynamikmatrix der Fehlerdynamik (4.32),

$$\tilde{\mathbf{A}}_{22,e} = \tilde{\mathbf{A}}_{22} - \hat{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} - \hat{\mathbf{K}}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

die gewünschten Eigenwerte $\hat{\lambda}_1^* = -2$ und $\hat{\lambda}_2^* = -3$ besitzt. Dabei kann $\hat{\mathbf{K}}_2$ z.B. wie folgt gewählt werden

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 2.8 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

und man erhält den reduzierten Beobachter (4.31), (4.33)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -0.2 & -8.6 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \hat{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{w} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Literatur

- [1] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig, Heidelberg, 8th edition, 1994.
- [2] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1980.
- [3] J. Lunze. *Regelungstechnik 2*. Springer, Berlin, 4th edition, 2006.

Kapitel 5

Folgeregelung

In Kapitel 3 wurde der Entwurf von Zustandsreglern betrachtet, um einerseits ein lineares System zu stabilisieren und andererseits eine gewünschte Führungsgröße w einzustellen (siehe Abbildung 3.2). Dabei wurde angenommen, dass w konstant ist und es sich somit um einen stationären Arbeitspunkt handelt.

In vielen praktischen Anwendungen ist darüberhinaus die *Folgeregelung* von Bedeutung. Typische Aufgabenstellung sind

- (Asymptotische) Glättung eines Sollwert- bzw. Führungsgrößensprungs, z.B. um die Stellamplitude zu reduzieren bzw. das Auflaufen eines I-Anteils zu verhindern.
- Nachfahren einer vorgegebenen Solltrajektorie $y^*(t)$, $t \in [0, T]$ für den Ausgang. Beispiele dafür sind Schweißvorgänge (Schweißnähte) oder periodische Vorgänge in der Fertigungstechnik.
- Realisierung eines Übergangs zwischen zwei stationären Zuständen $x_A^* \rightarrow x_B^*$ innerhalb eines gewünschten Zeitintervalls $t \in [0, T]$.

In diesem Kapitel werden – aufbauend auf den Ergebnissen von Kapitel 3 – zwei verschiedene Verfahren zur Realisierung einer Folgeregelung für lineare Systeme vorgestellt.

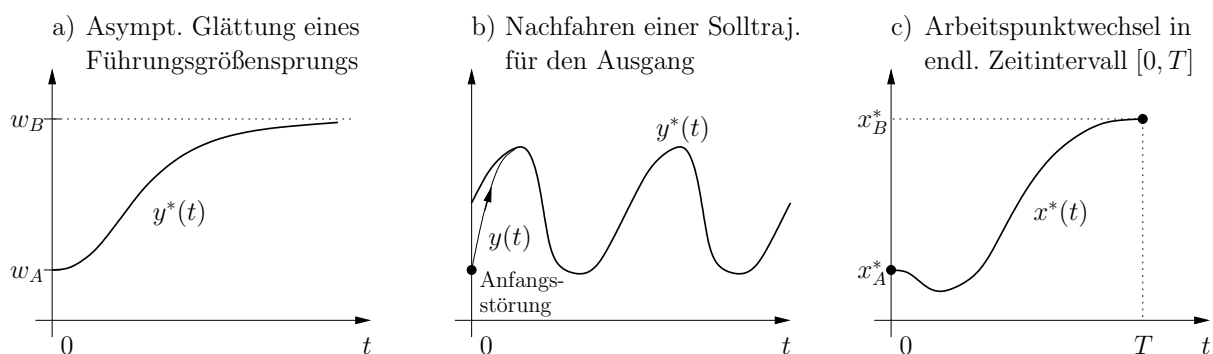


Abbildung 5.1: Typische Aufgabenstellungen einer (Trajektorien-)Folgeregelung.

5.1 Folgeregelung für den Ausgang

Bei der Ausgangsfolgeregelung handelt es um die Aufgabe, einer Solltrajektorie $\mathbf{y}^*(t)$ für den Ausgang $\mathbf{y}$ asymptotisch zu folgen, wie es in der Einleitung bereits beschrieben wurde (siehe auch a) und b) in Abbildung 5.1). Im Folgenden wird dazu wieder ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad y_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, p = m\end{aligned}\tag{5.1}$$

betrachtet, wobei davon ausgegangen wird, dass die Anzahl der Stellgrößen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und Ausgangsgrößen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ gleich ist, also $p = m$ gilt.

5.1.1 Fehlerdynamik und Regelgesetz

Der bisherige Zustandsreglerentwurf mittels Ein-/Ausgangsentkopplung (Abschnitt 3.4) kann direkt auf das Folgeregelungsproblem erweitert werden. In diesem Zusammenhang wird der sogenannten *Folgefehler* zwischen den einzelnen vorgegebenen Solltrajektorien $y_i^*(t)$ und den Ausgangsverläufen $y_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ durch

$$e_{y,i}(t) = y_i(t) - y_i^*(t), \quad i = 1, \dots, m \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e}_y(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t)$$

definiert. Die Aufgabe der Folgeregelung ist nun, diesen Folgefehler asymptotisch zu stabilisieren.

Der Ausgangspunkt für den Folgeregelungsentwurf ist die entkoppelte Ein-/Ausgangsnormalform (3.73), die der Einfachheit halber hier nochmal dargestellt ist:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_{i,1} &= \tilde{x}_{i,2} \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i,r_i-1} &= \tilde{x}_{i,r_i} \\ \dot{\tilde{x}}_{i,r_i} &= v_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \bar{\mathbf{M}}_y \tilde{\mathbf{x}}_y + \bar{\mathbf{M}}_\eta \boldsymbol{\eta} + \bar{\mathbf{N}}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Die Matrizen $\bar{\mathbf{M}}_y$, $\bar{\mathbf{M}}_\eta$ und $\bar{\mathbf{N}}$ sind in (3.74) angegeben. Durch Einführung der Rückführung

$$v_i = y_i^{*(r_i)}(t) - \sum_{j=0}^{r_i-1} p_{i,j} \underbrace{(y_i^{(j)}(t) - y_i^{*(j)}(t))}_{e_{y,i}^{(j)}(t)}\tag{5.2}$$

und unter Berücksichtigung der Ausgangsbeziehungen

$$\begin{aligned}y_i &= \tilde{x}_{i,1} \\ y_i^{(j)} &= \tilde{x}_{i,j+1}, \quad j = 1, \dots, r_i - 1 \\ y_i^{(r_i)} &= \dot{\tilde{x}}_{i,r_i}, \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}\tag{5.3}$$

kann aus der obigen Ein-/Ausgangsnormalform direkt die Dynamik des Folgefehlers

$$e_{y,i}^{(r_i)} + p_{i,r_i-1} e_{y,i}^{(r_i-1)} + \dots + p_{i,1} \dot{e}_{y,i} + p_{i,0} e_{y,i} = 0, \quad i = 1, \dots, m\tag{5.4}$$

hergeleitet werden. Die Koeffizienten $p_{i,j}$ bestimmen sich aus den charakteristischen Polynomen

$$p_i^*(\lambda) = p_{i,0} + p_{i,1}\lambda + \cdots + p_{i,r_i-1}\lambda^{r_i-1} + \lambda^{r_i} = \prod_{j=1}^{r_i} (\lambda - \lambda_{i,j}^*), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.5)$$

in Abhängigkeit der gewünschten Eigenwerte $\{\lambda_{i,1}^*, \dots, \lambda_{i,r_i}^*\}$, $i = 1, \dots, m$. Mit Hilfe der Ausgangsbeziehungen (5.3) ist erkennbar, dass das Regelgesetz (5.2) für die neuen Ausgänge v_i eine Verallgemeinerung des Falls (3.75) darstellen, da sich offensichtlich genau (3.75) ergibt, wenn eine konstante Führungsgröße $\mathbf{w} = \mathbf{y}^*(t) = \text{konst.}$ betrachtet wird. Das Regelgesetz (5.6) im folgenden Satz verdeutlicht diesen Zusammenhang.

Satz 5.1 (Asymptotische Ausgangsfolgeregelung) *Gegeben sei das lineare System (5.1) mit dem vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ und den beschränkten (r_i -fach stetig differenzierbaren) Solltrajektorien $y_i^*(t) \in \mathcal{C}^{r_i}$, $t \in [0, T]$.¹ Dann ist die Fehlerdynamik (5.4) durch die Rückführung*

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}_y^{-1} \begin{bmatrix} p_{1,0} y_1^*(t) + \cdots + p_{1,r_1-1} y_1^{*(r_1-1)}(t) + y_1^{*(r_1)}(t) \\ \vdots \\ p_{m,0} y_m^*(t) + \cdots + p_{m,r_m-1} y_m^{*(r_m-1)}(t) + y_m^{*(r_m)}(t) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

asymptotisch stabilisierbar, wobei $\mathbf{H}_y$ die Kopplungsmatrix (3.59), $\mathbf{K}$ die Reglerverstärkung (3.78) und $p_{i,j}$ die Koeffizienten der gewünschten charakteristischen Polynome (5.5) darstellen. Falls darüberhinaus die Nulldynamik (3.77) asymptotisch stabil ist, so ist der Zustand $\boldsymbol{\eta}(t)$, $t \in [0, T]$ der internen Dynamik (3.67) bzw. (3.73) für alle Zeiten $T > 0$ beschränkt.

Das Regelgesetz (5.6) folgt direkt aus (3.72) durch Aufspaltung der Fehlerterme in (5.2). Aus (5.6) ist ebenfalls ersichtlich, dass für die Solltrajektorien

$$y_i^*(t) \in \mathcal{C}^{r_i}, \quad t \in [0, T]$$

gelten muss, wobei $\mathcal{C}^{r_i}$ die Klasse der r_i -mal stetig differenzierbaren Funktionen darstellt. Dies muss gelten, damit die Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ auf $[0, T]$ stetig ist, also $u(t) \in \mathcal{C}^0$, $t \in [0, T]$ gilt.

Beispiel 5.1 (Simulationsbeispiel) *Für den Feder–Masse–Schwinger in Abbildung 3.4 mit dem mathematischen Modell (3.27) wurde bereits in Beispiel 3.7 ein Zustandsregler durch Ein–/Ausgangsentkopplung entworfen und simulativ getestet. In diesem Beispiel soll für den Feder–Masse–Schwinger ein Ausgangsfolgeregler entworfen werden, um der Solltrajektorie*

$$y^*(t) = y_{\max}^* \sin(\omega t) \quad (5.7)$$

nachzufahren. Die (skalare) Kopplungsmatrix H_y^{-1} und die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^\top$ für die Eigenwerte $\lambda_i^* = -2$, $i = 1, 2, 3$ wurden bereits in (3.80) und (3.81) berechnet. Zusammen mit dem zeitvariante Führungsgrößenanteil ergibt sich das Regelgesetz (5.6)

$$u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{H_y} (8y^*(t) + 12\dot{y}^*(t) + 6\ddot{y}^*(t) + y^{*(3)}(t)) \quad (5.8)$$

wobei sich $y^*(t)$ und seine Ableitungen aus (5.7) ergeben.

¹ $\mathcal{C}^n$ beschreibt die Klasse der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen.

Aufgabe 5.1 *Vergleichen Sie mit Hilfe von MATLAB/SIMULINK die Simulationsergebnisse für das Folgeregelungsgesetz (5.8) mit dem Zustandsregelgesetz (3.82) und der (zeitvarianten) Führungsgröße $w(t) = y^*(t)$.*

5.1.2 Folgeregelung mit Integralanteil

Im Falle von Störgrößen $\mathbf{d}$, die auf das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{d}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad y_i = \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}\quad (5.9)$$

mit $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ wirken, wird der Folgefehler $\mathbf{e}_y(t)$ nicht gegen Null konvergieren. Um Störeinflüsse bzw. Parameterabweichungen kompensieren zu können, werden ähnlich dem Vorgehen in Abschnitt 3.6.2 zusätzliche Integratorzustände

$$\dot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{x}_I(0) = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

eingeführt. Damit erweitert sich das Rückführgesetz (5.2)

$$v_i = y_i^{*(r_i)}(t) - \sum_{j=0}^{r_i-1} p_{i,j} e_i^{(j)}(t) + p_{I,i} x_{I,i}(t), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.11)$$

bzw. die Fehlerdynamik (5.4)

$$e_i^{(r_i)} + p_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)} + \dots + p_{i,0} e_i + p_{I,i} \int_0^t e_i(\tau) d\tau = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.12)$$

um die zusätzlichen Integralanteile mit den Koeffizienten $p_{I,i}$. Die zeitliche Ableitung der Fehlerdynamik (5.12) führt auf die Darstellung

$$e_i^{(r_i+1)} + p_{i,r_i-1} e_i^{(r_i)} + \dots + p_{i,0} \dot{e}_i + p_{I,i} e_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.13)$$

Die Koeffizienten $p_{i,j}$ und $p_{I,i}$ bestimmen sich aus den erweiterten charakteristischen Polynomen

$$p_{I,i}^*(\lambda) = p_{I,i} + p_{i,0}\lambda + \dots + p_{i,r_i-1}\lambda^{r_i} + \lambda^{r_i+1} = \prod_{j=1}^{r_i+1} (\lambda - \lambda_{i,j}^*), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.14)$$

in Abhängigkeit der gewünschten Eigenwerten $\{\lambda_{i,1}^*, \dots, \lambda_{i,r_i+1}^*\}$, $i = 1, \dots, m$.

Durch Einsetzen von (5.11) in (3.72) kann das Regelgesetz für die eigentliche Stellgröße $\mathbf{u}$ hergeleitet werden

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_I &= \mathbf{y}^* - \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_I(0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_I \mathbf{x}_I + \mathbf{H}_y^{-1} \begin{bmatrix} p_{1,0} y_1^*(t) + \dots + p_{1,r_1-1} y_1^{*(r_1-1)}(t) + y_1^{*(r_1)}(t) \\ \vdots \\ p_{m,0} y_m^*(t) + \dots + p_{m,r_m-1} y_m^{*(r_m-1)}(t) + y_m^{*(r_m)}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}} \quad (5.15)$$

wobei sich $\mathbf{H}_y^{-1}$ und $\mathbf{K}$ wieder durch (3.59) und (3.78) ergeben und die Reglerverstärkung für den Integralanteil durch

$$\mathbf{K}_I = \mathbf{H}_y^{-1} \begin{bmatrix} p_{I,1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & p_{I,m} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

berechnet wird. Das Regelgesetz (5.15) stellt somit einerseits eine Erweiterung des Folgereglers (5.6) dar und besitzt andererseits Ähnlichkeit mit dem PI–Zustandsregler (3.123), wobei an dieser Stelle der P–Anteil nicht betrachtet wurde.

Beispiel 5.2 (Simulationsbeispiel) *Der Folgeregler für den Feder–Masse–Schwinger aus Beispiel 5.1 soll um einen I–Anteil erweitert werden, um stationäre Störungen im Modell (3.27) kompensieren zu können. Dazu wird die zusätzliche Differenzialgleichung*

$$\dot{x}_I = y^* - y = y^* - \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, \quad x_I(0) = 0$$

mit dem Integratorzustand x_I eingeführt. Die gewünschten Eigenwerte im geschlossenen Kreis sollen der Einfachheit halber bei $\lambda_i^ = -2, i = 1, \dots, 4$ liegen. Damit ergibt sich das charakteristische Polynom*

$$p_I^*(\lambda) = 16 + 32\lambda + 24\lambda^2 + 8\lambda^3 + \lambda^4,$$

wobei $p_I = 16$ gilt, siehe (5.14). Die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^\top$ folgt aus der Formel (3.78)

$$\mathbf{k}^\top = H_y^{-1} \mathbf{c}^\top (32\mathbf{I} + 24\mathbf{A} + 8\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3) = [-6.8 \quad -7.8 \quad -305.4 \quad -223.4]$$

mit $H_y = -0.1$ gemäß (3.80). Die Reglerverstärkung für den Integralanteil ergibt sich aus (5.16)

$$k_I = H_y^{-1} p_I = -160.$$

Somit lautet das gesamte Regelgesetz (5.15)

$$u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} + k_I x_I + \frac{1}{H_y} (32y^*(t) + 24\dot{y}^*(t) + 8\ddot{y}^*(t) + y^{*(3)}(t)).$$

5.2 Zwei–Freiheitsgrade–Regelung

Eine Alternative zur asymptotischen Folgeregelung ist die Zwei–Freiheitsgrade–Regelung in Abbildung 5.2 bestehend aus einer Vorsteuerung und einer unterlagerter Regelung mit dem Ziel, das Führungs– und Stabilitätsverhalten getrennt von einander auszulegen.

Wie zu Beginn von Kapitel 5 bereits erwähnt wurde (siehe auch c) in Abbildung 5.1), besteht eine häufige Aufgabenstellung in der Realisierung eines *Arbeitspunktwechsels* zwischen zwei stationären Punkten $(\mathbf{x}_A^*, \mathbf{u}_A^*)$ und $(\mathbf{x}_B^*, \mathbf{u}_B^*)$, die durch die stationären Systemgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_A^* + \mathbf{B}\mathbf{u}_A^*, & \mathbf{y}_A^* &= \mathbf{C}\mathbf{x}_A^* \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_B^* + \mathbf{B}\mathbf{u}_B^*, & \mathbf{y}_B^* &= \mathbf{C}\mathbf{x}_B^* \end{aligned} \quad (5.17)$$

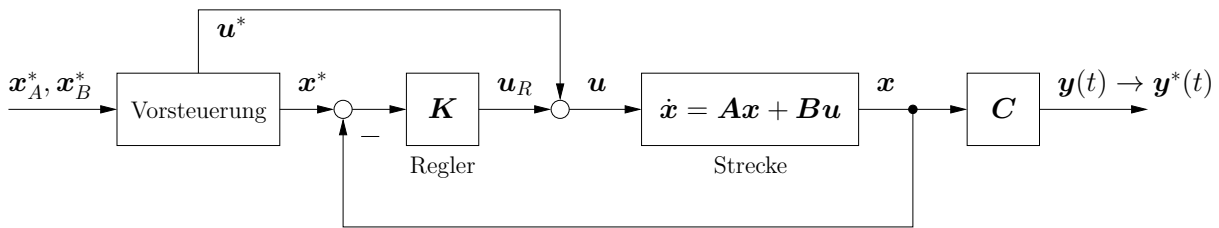


Abbildung 5.2: Zwei-Freiheitsgrade-Regelungsstruktur mit linearem Zustandsregler für ein lineares System.

definiert sind. Die Aufgabe der Vorsteuerung ist nun, eine geeignete Steuertrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ auf dem Zeitintervall $[0, T]$ so zu bestimmen, dass das System (5.1) entlang nomineller Solltrajektorien $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{y}^*(t)$, $t \in [0, T]$ von dem stationären Punkt $\mathbf{x}_A^*$ zu dem Zielpunkt $\mathbf{x}_B^*$ überführt wird, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_A^*, \quad \mathbf{x}^*(T) = \mathbf{x}_B^* \\ \mathbf{y}^*(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}^*(t) \quad \mathbf{y}^*(0) = \mathbf{y}_A^*, \quad \mathbf{y}^*(T) = \mathbf{y}_B^*. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dabei ist die Transitionszeit T im Hinblick auf die Systemdynamik (5.1) und das Einhalten möglicher Beschränkungen zu wählen.

Der zusätzliche Regler in Abbildung 5.2 ist notwendig um Anfangsabweichungen $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_A^*$ des Systems (5.1) auszuregeln. Im Falle von konsistenten Anfangsbedingungen, d.h. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_A^*$ in (5.1) und in Abwesenheit von Störungen wird die Regelabweichung $\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)$ in Abbildung 5.2 verschwinden und somit $\mathbf{u}_R = \mathbf{0}$ gelten.

5.2.1 Definition des flachen Ausgangs

Die Eigenschaft der *Flachheit* wurde in den 1990er Jahren von *Michel Fliess*, *Jean Lévine*, *Philippe Martin* und *Pierre Rouchon* für nichtlineare Systeme definiert. Diese Eigenschaft ermöglicht u.A. die einfache Berechnung einer Vorsteuerung. Für lineare Systeme ist die Flachheit einfach anwendbar und hängt mit der Steuerbarkeit zusammen.

Wenn ein System flach ist, so können sämtliche Zustands- und Stellgrößen in Abhängigkeit eines *flachen Ausgangs* und seiner Zeitableitungen dargestellt werden. Im Folgenden wird die Definition der Flachheit für ein nichtlineares System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ angegeben.

Definition 5.1 (Flacher Ausgang) Das System (5.19) heißt (differenziell) flach, wenn es einen fiktiven Ausgang $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^\top$ der gleichen Dimension wie $\mathbf{u}$ gibt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Die Größen z_i , $i = 1, \dots, m$ lassen sich als Funktionen der Zustands- und Stellgrößen $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^m$ und einer endlichen Anzahl

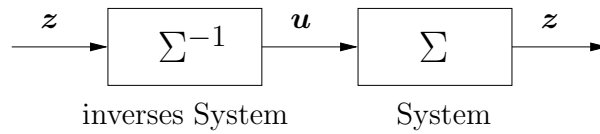


Abbildung 5.3: Veranschaulichung des inversen Systems.

von Zeitableitungen $u_i^{(k)}$, $k = 1, \dots, \alpha_i$ ausdrücken, d.h.

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_1^{(\alpha_1)}, \dots, u_m, \dots, u_m^{(\alpha_m)}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}). \quad (5.20)$$

(ii) Die Zustandsvariablen $\mathbf{x}$ und Stellgrößen $\mathbf{u}$ lassen sich als Funktionen von $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^\top$ und einer endlichen Anzahl seiner Zeitableitungen $z_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, \beta_i$ darstellen, d.h.

$$\mathbf{x} = \psi_{\mathbf{x}}(z_1, \dots, z_1^{(\beta_1)}, \dots, z_m, \dots, z_m^{(\beta_m)}) = \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\beta)}) \quad (5.21)$$

$$\mathbf{u} = \psi_{\mathbf{u}}(z_1, \dots, z_1^{(\beta_1+1)}, \dots, z_m, \dots, z_m^{(\beta_m+1)}) = \psi_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\beta+1)}). \quad (5.22)$$

(iii) Die Komponenten von $\mathbf{z}$ sind differenziell unabhängig, d.h. sie erfüllen keine Differenzialgleichung der Form

$$\varphi(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\delta)}) = \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

Sind diese Bedingungen (für das nichtlineare System (5.19) zumindest lokal) erfüllt, so heißt der fiktive Ausgang (5.20) flacher Ausgang und das System (5.19) heißt flach.

Der flache Ausgang $\mathbf{z}$ erlaubt die Parametrierung sämtlicher Zustands- und Stellgrößen als auch der Ausgangsgrößen in Form einer Funktion

$$\mathbf{y} = \psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\gamma)}). \quad (5.24)$$

In diesem Zusammenhang spricht man auch von dem *inversen System* Σ^{-1}

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}) \end{cases} \iff \Sigma^{-1} : \begin{cases} \mathbf{x} = \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}^{(\beta)}) \\ \mathbf{u} = \psi_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}^{(\beta+1)}) \\ \mathbf{y} = \psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}^{(\gamma)}), \end{cases} \quad (5.25)$$

das in Abbildung 5.3 verdeutlicht wird.

Beispiel 5.3 Betrachtet wird das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2^3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3 \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ein flacher Ausgang des Systems ist $z = x_2$. Wie man durch zweimaliges Differenzieren von z leicht überprüfen kann, lassen sich die Zustände x_1 , x_2 , die Stellgröße u und der Ausgang y in Abhängigkeit von z , $\dot{z}$ und $\ddot{z}$ wie folgt parametrieren

$$\begin{aligned} x_1 &= z^3 + \dot{z} &= \psi_{x,1}(z, \dot{z}) \\ x_2 &= z &= \psi_{x,2}(z) \\ u &= z^3 + 3z^2\dot{z} + \ddot{z} &= \psi_u(z, \dot{z}, \ddot{z}) \\ y &= z^3 + \dot{z} &= \psi_y(z, \dot{z}). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Die Bedeutung des flachen Ausgangs $\mathbf{z}$ für den Entwurf einer Vorsteuerung ist direkt ersichtlich, da mittels der Beziehungen (5.21)–(5.24) auf einfache Weise Steuer- und Solltrajektorien

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(t) &= \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^*(t), \dots, \mathbf{z}^{*(\beta)}(t)) \\ \mathbf{u}^*(t) &= \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}^*(t), \dots, \mathbf{z}^{*(\beta+1)}(t)) \\ \mathbf{y}^*(t) &= \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}^*(t), \dots, \mathbf{z}^{*(\gamma)}(t)) \quad , \quad t \in [0, T]\end{aligned}\quad (5.28)$$

in Abhängigkeit einer flachen Solltrajektorie $\mathbf{z}^*(t)$ bestimmt werden können.

Der flache Ausgang ist häufig physikalisch oder anschaulich erklärbar. Allerdings ist im allgemeinen nichtlinearen Fall die Untersuchung, ob das System (5.19) flach ist und die Bestimmung eines flachen Ausgangs $\mathbf{z}$ eine nicht-triviale Angelegenheit. Wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird, vereinfacht sich dieses Problem für lineare Systeme erheblich, da es in Verbindung mit der Steuerbarkeit gebracht werden kann.

5.2.2 Flacher Ausgang bei linearen Systemen

Eingrößenfall: Zunächst wird ein lineares System mit skalarer Stellgröße $u \in \mathbb{R}$ und skalarem Ausgang $y \in \mathbb{R}$ betrachtet

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}.\end{aligned}\quad (5.29)$$

Gemäß Definition 5.1 zeichnet sich ein (in diesem Fall skalarer) flacher Ausgang z dadurch aus, dass er alle Zustände $\mathbf{x}$ und die Stellgröße u parametrisiert. Dieser Zusammenhang ist direkt über die Regelungsnormalform (3.17) gegeben. Durch Wahl von $z = \tilde{x}_1 = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}$ und sukzessives Ableiten gilt

$$\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t}^\top \\ \mathbf{t}^\top \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \mathbf{x} \quad (5.30)$$

sowie

$$z^{(n)} = \dot{\tilde{x}}_n = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^n \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}}_{=1} u. \quad (5.31)$$

Offensichtlich lassen sich $\mathbf{x}$ und u aus den Gleichungen (5.30) und (5.31) berechnen. Somit stellt der erste Zustand der Integratorkette der Regelungsnormalform einen flachen Ausgang dar.

Satz 5.2 (Flacher Ausgang für lineare Systeme – Eingrößenfall) *Unter der Annahme, dass das lineare System (5.29) steuerbar ist, stellt*

$$z = \mathbf{t}^\top \mathbf{x} \quad (5.32)$$

einen flachen Ausgang von (5.29) dar, wobei $\mathbf{t}^\top$ gemäß (3.16) die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix (2.125) ist. Durch den flachen Ausgang z und seine Zeitableitungen

$$\tilde{\mathbf{x}} = [z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}]^\top \quad (5.33)$$

sowie $z^{(n)}$ lassen sich der Zustand $\mathbf{x}$, die Stellgröße u und der Ausgang y ausdrücken

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad u = z^{(n)} - \mathbf{t}^T \mathbf{A}^n \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.34)$$

wobei die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ durch (3.16) gegeben ist.

Auch im linearen Fall hat der flache Ausgang z häufig eine physikalische oder anschauliche Bedeutung, wie es im folgenden Beispiel zu sehen ist.

Beispiel 5.4 Betrachtet wird das inverse Pendel in Abbildung 1.13 mit dem Zustandsvektor $\Delta \mathbf{x} = [\Delta \phi, \Delta \dot{\phi}, \Delta x_w, \Delta \dot{x}_w]^T$ und dem Modell (1.68), das aus der Linearisierung um die obere Ruhelage $\mathbf{x}_R = [0, 0, x_{R,w}, 0]^T$ hergeleitet wurde. In Beispiel 2.10 wurde bereits die inverse Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$, die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ und die Regelungsnormalform (2.145) angegeben. Mit der letzten Zeile $\mathbf{t}^T$ von $\mathbf{Q}_S^{-1}$ in (2.143) lautet der flache Ausgang (5.32)

$$z = -\frac{l^2(m+4M)}{9g} \Delta \phi - \frac{l(m+4M)}{6g} \Delta x_w. \quad (5.35)$$

Durch Multiplikation erhält man die neue Größe

$$\bar{z} = -\frac{6g}{l(m+4M)} z = \Delta x_w + \frac{2}{3} l \Delta \phi, \quad (5.36)$$

die ein Vielfaches von z ist und somit ebenfalls einen flachen Ausgang darstellt. Die Bedeutung von $\bar{z}$ lässt sich mit Hilfe von Abbildung 1.13 erklären: $\bar{z}$ beschreibt (für kleine Winkel ϕ) den Punkt auf dem Pendelarm, der auf $2/3$ der Pendellänge liegt.

Mehrgrößenfall: Für die Definition des flachen Ausgangs für lineare Mehrgrößensysteme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.37)$$

kann die Regelungsnormalform (3.41) im Mehrgrößenfall herangezogen werden. In Analogie zum Eingrößenfall stellen die ersten Zustände $\tilde{x}_{i,1}$, $i = 1, \dots, m$ der Integratorketten der Regelungsnormalform (3.41) den flachen Ausgang dar.

Satz 5.3 (Flacher Ausgang für lineare Systeme – Mehrgrößenfall) Unter der Annahme, dass das lineare System (5.37) steuerbar ist, stellt

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

einen flachen Ausgang von (5.29) dar, wobei $\mathbf{t}_i^T$ gemäß (3.40) die $\sum_{j=1}^i \rho_j$ -te Zeile der inversen reduzierten Steuerbarkeitsmatrix (3.35) ist. Durch den flachen Ausgang z und seine Zeitableitungen

$$\tilde{\mathbf{x}} = [z_1, \dot{z}_1, \dots, z_1^{(\rho_1-1)}, \dots, z_m, \dot{z}_m, \dots, z_m^{(\rho_m-1)}]^T$$

sowie $z_1^{(\rho_1)}, \dots, z_m^{(\rho_m)}$ lassen sich der Zustand $\mathbf{x}$, die Stellgröße $\mathbf{u}$ und der Ausgang $\mathbf{y}$ ausdrücken

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} z_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ z_m^{(\rho_m)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.38)$$

wobei die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ durch (3.39) gegeben ist.

Die Wahl des flachen Ausgangs ist vor allem im Mehrgrößenfall nicht eindeutig. Dies soll in der folgenden Aufgabe verdeutlicht werden.

Aufgabe 5.2 Für das System (3.36) wurden die Vektoren $\mathbf{t}_1^\top$ und $\mathbf{t}_2^\top$ in (3.47) berechnet. Somit ist ein flacher Ausgang durch $\mathbf{z}^\top = [z_1, z_2] = [x_2, x_3]$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

einen alternativen flachen Ausgang für das System (3.36) darstellt.

5.2.3 Flachheitsbasierte Vorsteuerung

In Abschnitt 5.2.1 wurde bereits erwähnt, dass sich die Flachheitseigenschaft besonders zum Entwurf einer Vorsteuerung im Rahmen der Zwei–Freiheitsgrade–Regelung (Abbildung 5.2) eignet. Als Steuerungsaufgabe wird der Übergang zwischen den stationären Punkten $\mathbf{x}_A^* \rightarrow \mathbf{x}_B^*$ in einem vorgegebenen Zeitintervall $[0, T]$ betrachtet, wobei $\mathbf{x}_A^*$ und $\mathbf{x}_B^*$ durch (5.17) definiert sind.

Eingrößenfall: Im Folgenden wird zunächst das System (5.29) mit einer skalaren Stellgröße bzw. einem skalaren Ausgang z betrachtet, für das sich die stationären Gleichungen (5.17) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_A^* + \mathbf{b} u_A^*, & y_A^* &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_A^* \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_B^* + \mathbf{b} u_B^*, & y_B^* &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_B^* \end{aligned} \quad (5.39)$$

ergeben. Zur Berechnung einer flachheitsbasierten Vorsteuerung gemäß (5.34) bedeutet dies zunächst die Planung einer n -mal stetig differenzierbaren Solltrajektorie $z^*(t) \in \mathcal{C}^n$, $t \in [0, T]$ mit den $2(n+1)$ Randbedingungen

$$\begin{aligned} z^*(0) &= z_A^* = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}_A^*, & z^{*(i)}(0) &= 0, & i &= 1, \dots, n \\ z^*(T) &= z_B^* = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}_B^*, & z^{*(i)}(T) &= 0, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Die geeignete Konstruktion von $z^*(t)$ mittels eines polynomialen Ansatzes wird in Abschnitt 5.2.4 gezeigt. Wenn man nun $z^*(t)$ in die Flachheitsparametrierungen (5.34) einsetzt, so ergeben sich die Solltrajektorien

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(t) &= \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}}^*(t) = [z^*(t), \dots, z^{*(n-1)}(t)]^\top \\ u^*(t) &= z^{*(n)} - \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^n \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \\ y^*(t) &= \mathbf{c}^\top \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Da für die flache Solltrajektorie an den Rändern $t = 0$ und $t = T$ Stetigkeit bis zur n -ten Ableitung $z^{*(n)}(t)$ gefordert wird, ergibt sich eine stetige Steuertrajektorie $u^*(t) \in \mathcal{C}^0$.

Mehrgrößenfall: Bei der Betrachtung des linearen Systems (5.1) mit der vektorwertigen Stellgröße $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ definieren sich die stationären Punkte $\mathbf{x}_A^*$ und $\mathbf{x}_B^*$ durch (5.17) und ein flacher Ausgang $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^\top$ kann mit Hilfe von Satz 5.3 bestimmt werden. Analog zum Eingrößenfall können nun ρ_i -mal stetig differenzierbare Solltrajektorien $z_i^*(t) \in \mathcal{C}^{\rho_i}$, $t \in [0, T]$ geplant werden, die die Randbedingungen

$$\begin{aligned} z_i^*(0) &= z_{A,i}^* = \mathbf{t}_i^\top \mathbf{x}_A^*, & z_i^{*(j)}(0) &= 0, & j &= 1, \dots, \rho_i \\ z_i^*(T) &= z_{B,i}^* = \mathbf{t}_i^\top \mathbf{x}_B^*, & z_i^{*(j)}(T) &= 0, & i &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.42)$$

erfüllen. Mit den flachen Solltrajektorien $z_i^*(t)$, $t \in [0, T]$ ergeben sich $\mathbf{x}^*(t)$ sowie die Steuerung $\mathbf{u}^*(t)$ aus der Parametrierung (5.38)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(t) &= \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}}^*(t) = \left[z_1^*(t), \dots, z_1^{*(\rho_1-1)}(t), \dots, z_m^{*(\rho_m-1)}(t) \right]^\top \\ \mathbf{u}^*(t) &= \begin{bmatrix} z_1^{*(\rho_1)}(t) \\ \vdots \\ z_m^{*(\rho_m)}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{A}^{\rho_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\top \mathbf{A}^{\rho_m} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \\ \mathbf{y}^*(t) &= \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}^*(t), \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (5.43)$$

Aus der Forderung, dass die flachen Solltrajektorien bis zur ρ_i -ten Ableitung $z_i^{*(\rho-i)}(t)$ an den Rändern $t = 0$ und $t = T$ stetig sein sollen, lässt sich schließen, dass die Steuertrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ bei $t = 0$ und $t = T$ ebenfalls stetig ist.

5.2.4 Polynomiale Solltrajektorien

Eine gebräuchliche Methode zur Konstruktion von Solltrajektorien, die stationäre Randbedingungen der Form (5.40) bzw. (5.42) miteinander verbinden, sind polynomiale Ansätze. Dazu wird der Einfachheit halber der Fall eines skalaren flachen Ausgangs z betrachtet. Die Planung einer n -fach stetig differenzierbaren Solltrajektorie $z^*(t) \in \mathcal{C}^n$, $t \in [0, T]$, die die Randbedingungen (5.40) erfüllt, kann über das Polynom

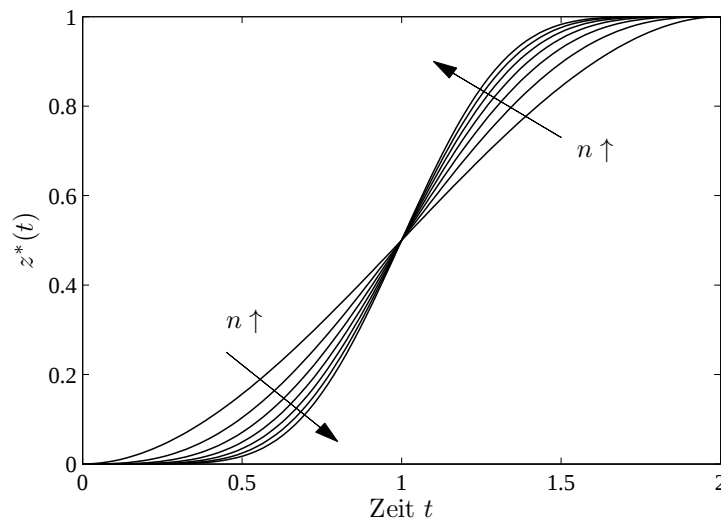
$$z^*(t) = z_A^* + (z_B^* - z_A^*) \sum_{i=n+1}^{2n+1} p_i \left(\frac{t}{T} \right)^i \quad (5.44)$$

erfolgen. Aus der speziellen Struktur von (5.44) ist erkennbar, dass die Randbedingungen an der Stelle $t = 0$ bereits erfüllt sind. Die $n + 1$ verbleibenden Parameter p_i , $i = n + 1, \dots, 2n + 1$ müssen nun so bestimmt werden, dass $z^*(t)$ die verbleibenden $n + 1$ Randbedingungen (5.40) an der Stelle $t = T$ erfüllt. Dies resultiert in einem Gleichungssystem für die Koeffizienten p_i mit der Lösung

$$p_i = \frac{(-1)^{i-n-1} (2n+1)!}{i n! (i-n-1)! (2n+1-i)!}, \quad i = n+1, \dots, 2n+1. \quad (5.45)$$

In Tabelle 5.1 sind die Koeffizienten p_i für die Differenzierbarkeitsordnungen $n = 1, \dots, 7$ aufgelistet. Die daraus resultierenden Trajektorien (5.44) sind in Abbildung 5.4 dargestellt.

n	p_{n+1}	p_{n+2}	p_{n+3}	p_{n+4}	p_{n+5}	p_{n+6}	p_{n+7}	p_{n+8}
1	3	-2						
2	10	-15	6					
3	35	-84	70	-20				
4	126	-420	540	-315	70			
5	462	-1980	3465	-3080	1386	-252		
6	1716	-9009	20020	-24024	16380	-6006	924	
7	6435	-40040	108108	-163800	150150	-83160	25740	-3432

Tabelle 5.1: Koeffizienten der polynomialen Solltrajektorie (5.44) für $n = 1, \dots, 7$.Abbildung 5.4: Polynomiale Solltrajektorie (5.44) für $n = 1, \dots, 7$ mit $z_A^* = 0$, $z_B^* = 1$ und der Transitionszeit $T = 2$.

Im Mehrgrößenfall kann (5.44) zur Planung der einzelnen Trajektorien $z_i^*(t) \in \mathcal{C}^{\rho_i}$ des flachen Ausgangs $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^\top$ verwendet werden, indem die Differenzierbarkeitsordnung n im Polynomansatz (5.44) durch ρ_i ersetzt wird.

Beispiel 5.5 (Simulationsbeispiel) Für das inverse Pendel in Abbildung 1.13 sollen eine Vorsteuerung und Solltrajektorien berechnet werden, um das Pendel in $T = 2.5$ s um 1 m zu versetzen. Mit dem Zustand $\Delta \mathbf{x} = [\Delta \phi, \Delta \dot{\phi}, \Delta x_w, \Delta \dot{x}_w]^\top$ lauten die stationären Punkte

$$\Delta \mathbf{x}_A^* = [0, 0, 0, 0]^\top, \quad \Delta \mathbf{x}_B^* = [0, 0, 1 \text{ m}, 0]^\top. \quad (5.46)$$

bzw. für den flachen Ausgang (5.35) gilt

$$\mathbf{z}_A^* = \mathbf{t}^\top \mathbf{x}_A^*, \quad \mathbf{z}_B^* = \mathbf{t}^* \mathbf{x}_B^*. \quad (5.47)$$

Die Solltrajektorie $\mathbf{z}^*(t) \in \mathcal{C}^n$ muss ($n = 4$)-mal stetig differenzierbar sein und folgt aus (5.44) und den entsprechenden Koeffizienten aus Tabelle 5.1 mit der Übergangszeit $T = 2.5$ s. Mit den Parametern $l = 1$ m, $m = 1$ kg, $M = 1$ kg und $g = 9.81$ m/s² und der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ in (2.144) können die Solltrajektorien $\mathbf{x}^*(t)$ für die Zustände

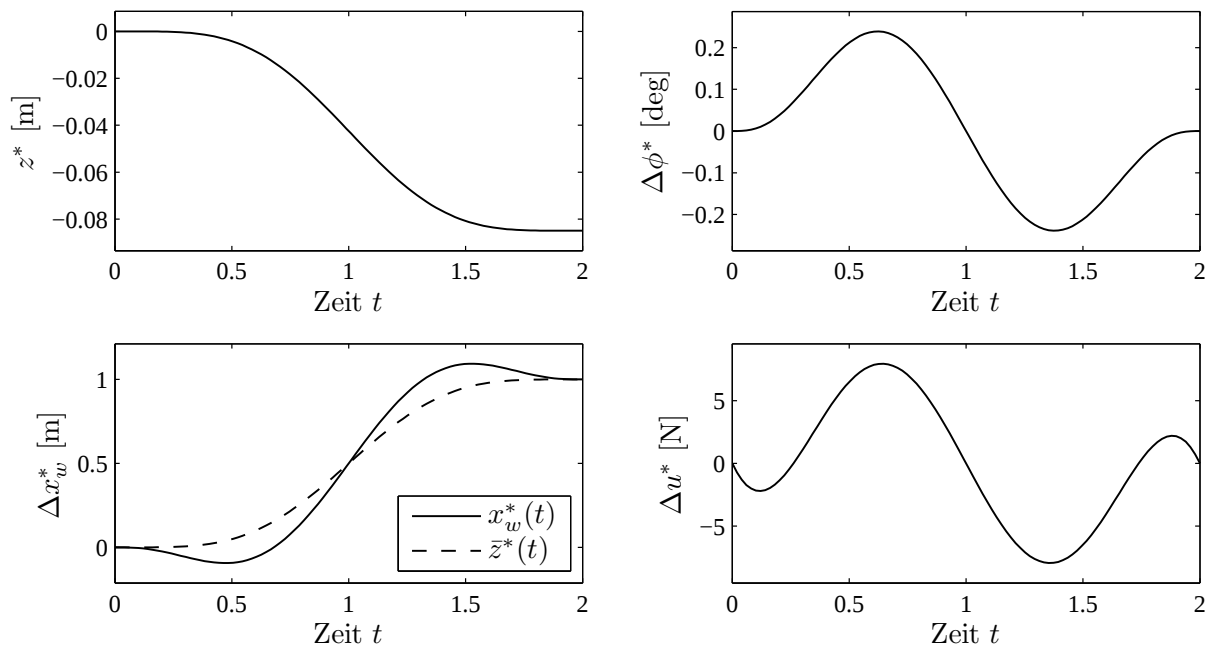


Abbildung 5.5: Flachheitsbasierte Solltrajektorien für das seitliche Versetzen des inversen Pendels um 1 m in $T = 2.5$ s (Beispiel 5.5).

aus (5.41) berechnet werden

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\phi^*(t) \\ \Delta\dot{\phi}^*(t) \\ \Delta x_w^*(t) \\ \Delta\dot{x}_w^*(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^*(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2 \\ -11.772 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & -11.772 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} z^*(t) \\ \dot{z}^*(t) \\ \ddot{z}^*(t) \\ z^{*(3)}(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}^*(t)}, \quad t \in [0, T], \quad (5.48)$$

während sich die Steuerung zu

$$u^*(t) = z^{*(4)}(t) - \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^4 \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} z^*(t) \\ \vdots \\ z^{*(3)}(t) \end{bmatrix} = z^{*(4)}(t) - 23.544 \ddot{z}^*(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.49)$$

ergibt. Abbildung 5.5 stellt die Solltrajektorien und die Vorsteuerung $u^*(t)$ für das seitliche Versetzen des inversen Pendels dar, die gemäß den obigen Beziehungen mit Hilfe von MATLAB berechnet wurden. Zusätzlich ist die Trajektorie des normierten flachen Ausgangs (5.36)

$$\begin{aligned} \bar{z}^*(t) &= -\frac{6g}{l(m+4M)} z^*(t) = \Delta x_w^*(t) + \frac{2}{3}l \Delta\phi^*(t) \\ &= \Delta x_w^*(t) + 0.667 \Delta\phi^*(t), \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

dargestellt, der für $\phi \ll 1$, d.h. $\sin \phi \approx \phi$, den Punkt

$$P_{\frac{2}{3}l} = \left[x_w + \frac{2}{3}l \sin \phi, \frac{2}{3}l \cos \phi \right]^\top$$

des Pendels auf der Höhe $\frac{2}{3}l$ beschreibt. In den Momentaufnahmen in Abbildung 5.6 ist $P_{\frac{2}{3}l}$ ebenfalls dargestellt, um den flachen Ausgang z bzw. $\bar{z}$ zu illustrieren.

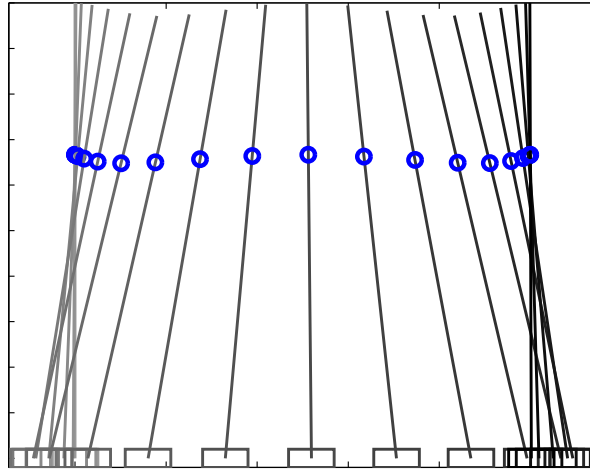


Abbildung 5.6: Momentaufnahmen des inversen Pendels mit Darstellung des Punktes P_{3l} zur Veranschaulichung des flachen Ausgangs (Beispiel 5.5).

5.2.5 Stabilisierende Regelung um die Trajektorie

In der Zwei-Freiheitsgrade-Regelkreisstruktur (Abbildung 5.2) wird die Regelung zur Stabilisierung und Robustifizierung des Systems um die Solltrajektorie $\mathbf{x}^*(t)$ verwendet. Das geregelte System in Abbildung 5.2 sowie die Vorsteuertrajektorien $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ erfüllen die Systemgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{u}^*(t) - \mathbf{K}\mathbf{e}_x(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t).\end{aligned}\tag{5.50}$$

mit dem Zustandsfolgefehler $\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$. Wenn man nun die Beziehungen (5.50) voneinander anzieht, erhält man das *Zustandsfehlersystem*

$$\dot{\mathbf{e}}_x(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e}_x(t), \quad \mathbf{e}_x(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*(0).\tag{5.51}$$

Die Reglermatrix $\mathbf{K}$ kann also mit den in Kapitel 3 beschriebenen Verfahren entworfen werden, um das Fehlersystem (5.51) asymptotisch zu stabilisieren. Im Falle von Störungen kann alternativ ein PI-Zustandsregler gemäß Abschnitt 3.6.2 entworfen werden.

Beispiel 5.6 (Simulationsbeispiel) *Im Sinne der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung soll die Vorsteuerung für das inverse Pendel (Beispiel 5.5) durch einen Regler unterstützt werden. In Beispiel 3.8 wurde bereits ein LQR-Regler mit der Reglerverstärkung (3.117)*

$$\mathbf{k}^\top = [-64.21 \quad -15.01 \quad -3.16 \quad -6.22]$$

entworfen, so dass die Dynamikmatrix $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{bk}^\top$ im geschlossenen Kreis asymptotisch stabil ist. Für die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung in Abbildung 5.2 ergibt sich somit das Regelgesetz

$$\Delta u_R(t) = \mathbf{k}^\top (\Delta \mathbf{x}^*(t) - \Delta \mathbf{x}(t)).$$

Literatur

- [1] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61:1327–1361, 1995.
- [2] K. Graichen, V. Hagenmeyer und M. Zeitz. A new approach to inversion-based feed-forward control design for nonlinear systems. *Automatica*, 41:2033–2041, 2005.
- [3] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, Berlin, 3rd edition, 1995.
- [4] A. Piazzzi und A. Visioli. Optimal noncausal set-point regulation of scalar systems. *Automatica*, 37:121–127, 2001.
- [5] R. Rothfuß. *Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Fortschrittberichte Nr. 8/664, 1997. http://elib.uni-stuttgart.de/opus/frontdoor.php?source_opus=3335&la=de.
- [6] R. Rothfuß, J. Rudolph und M. Zeitz. Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. *at-Automatisierungstechnik*, 45(11):517–525, 1997.
- [7] H. Sira-Ramírez und S.K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker Inc., New York, 2004.
- [8] M. Zeitz. Differenzielle Flachheit: Eine nützliche Methodik auch für lineare SISO-systeme. *at-Automatisierungstechnik*, 58(1):5–13, 2010.