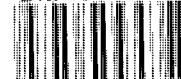


Wernstedt · Experimentelle Prozeßanalyse

# Experimentelle Prozeßanalyse

Wernstedt

FH-Bibliothek Fulda



20 18 581 3



# Experimentelle Prozeßanalyse

Prof. Dr. sc. techn. Jürgen Wernstedt



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

## Vorwort

Die rechnergestützte Lösung von Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Planungsaufgaben in technischen und nichttechnischen Prozessen hat in den letzten Jahren die Notwendigkeit der Bildung mathematischer Modelle von Signalen und Systemen wesentlich erhöht. Das gilt besonders für die Modellbildungsverfahren, die gemessene Prozeßsignale und Zustände verwenden. Sie werden in der deutschsprachigen Literatur zunehmend mit den Begriffen „experimentelle Prozeßanalyse“ oder „Prozeßidentifikation“ bezeichnet.

Die Signal- und Systemmodelle finden ihre Anwendung bei der Analyse, dem Entwurf und dem Betrieb automatischer und automatisierter Steuerungssysteme. In wissensbasierenden Entscheidungssystemen – den Beratungs- bzw. Expertensystemen – stellen sie das analytische (prozedurale) Wissen in Form von Gleichungen und Strukturen dar.

Das vorliegende Buch stellt sich das Ziel, eine Einführung in die Grundlagen des Wissenschaftsgebiets der experimentellen Prozeßanalyse für Ingenieure und Studierende der Ingenieurwissenschaften, besonders der Fachrichtungen Technische Kybernetik und Automatisierungstechnik, zu geben. Gleichzeitig ist es für die Fachdisziplinen von Interesse, die wesentliche Eigenschaften von vorgegebenen Prozessen zur Lösung ihrer Aufgaben in ein mathematisches Modell abbilden müssen. Dies sind in zunehmendem Maß Disziplinen aus den Bereichen der Landwirtschaft, der Wasserwirtschaft, der Medizin und der Biologie.

Der gegenwärtige Stand auf dem Gebiet der experimentellen Prozeßanalyse ist durch eine außerordentlich große Mannigfaltigkeit von verschiedenen Verfahren gekennzeichnet. Anwender und Studierende stehen deshalb vor der schwierigen Aufgabe, eine Übersicht zu bekommen und eine geeignete Auswahl der Verfahren zu treffen. Aus diesem Grund wurde im Rahmen des Buches versucht,

1. eine einheitliche Darstellung für das Signal- und Systemverhalten sowie für das statische und dynamische Verhalten zu finden,
2. durch vergleichende und bewertende Einschätzungen Hinweise für die Gestaltung und Anwendungsbereiche für die Verfahren zu geben,
3. durch Übungsaufgaben und Demonstrationsbeispiele die theoretischen Ausführungen zu untermauern,
4. durch Ausblicke auf weiterführende Arbeiten hinzuweisen.

Diesem Ziel folgend, besteht das Buch aus den Komplexen der Signal- und der Systemanalyse.

In den Abschnitten 2 und 3 werden Modelle des statischen und dynamischen Verhaltens von Signalen und Verfahren zu ihrer Bestimmung betrachtet.

Da auch bei einer verstärkten Anwendung moderner rechnergestützter Verfahren die klassischen Methoden der Auswertung von Übergangs- und Gewichtsfunktion sowie des Frequenzgangs nach Ansicht des Verfassers nicht an Bedeutung verloren haben, wurden bewährte leistungsstarke Verfahren dieser Gruppe im Abschnitt 4 dargestellt.

Den Schwerpunkt des Komplexes „Systemanalyse“ bildet die Ermittlung des statischen und dynamischen Verhaltens gestörter Systeme (Abschnitte 5 und 6). Dabei wurde versucht, die allgemeingültigen Grundlagen der Schätztheorie und die Schätzverfahren im

21  
Tech 156  
Wer +2

Akz. Nr. 20 18 581 3  
Fachhochschule Fulda  
- Bibliothek -

Wernstedt, Jürgen:  
Experimentelle Prozeßanalyse / von Jürgen Wernstedt. – 1. Aufl. – Berlin : Verl. Technik, 1989. – 391 S. : 242 Bilder, 139 Taf.  
ISBN 3-341-00676-1

ISBN 3-341-00676-1

1. Auflage  
© VEB Verlag Technik, Berlin, 1989  
Lizenz: 201 · 370/77/89  
Printed in the German Democratic Republic  
Gesamtherstellung: Offizin Andersen Nexö, Graphischer Großbetrieb, Leipzig III/18/38  
Lektoren: Jürgen Reichenbach, Inge Epp  
Schutzumschlag: Rainer Klaunick  
LSV 3044 · VT 3/5686-1  
Bestellnummer: 554 069 2  
04000

statischen Fall ausführlich herzuleiten und die Beziehungen unter Benutzung eines allgemeinen Systemmodells auf dynamische Probleme zu übertragen. Diese Vorgehensweise führt zu einer wesentlichen Reduzierung der Vielfalt der Verfahren und gestattet das jeweils spezifische besser darzustellen.

Insgesamt hofft der Autor, daß Angehörige derjenigen Wissenschaftsdisziplinen, die sich der Analyse, dem Entwurf und dem Betrieb automatischer und automatisierter Systeme in technischen und nichttechnischen Prozessen widmen, mit diesem Buch eine Grundlage für die Erstellung mathematischer Modelle von Signalen und Systemen auf experimenteller Basis besitzen. An dieser Stelle möchte ich mich für die vielen wertvollen Anregungen und die Begutachtung des Buches bei Herrn Prof. Dr. Dr. sc. *Karl Reinisch* und Herrn Dr. sc. *Georg Bretthauer* bedanken. Mein besonderer Dank gilt den Mitarbeitern des Lehrstuhls Systemtechnik des Wissenschaftsbereichs Automatische Steuerung der Technischen Hochschule Ilmenau, die durch eine langjährige konstruktive Mitarbeit in der Lehre und Forschung dieses Projekt aktiv gefördert haben. Besonders gilt das für Dozent Dr. sc. techn. *Peter Otto*, Dr.-Ing. *Arndt Seifert*, Dr.-Ing. *Detlef Trippler* und Dr.-Ing. *Winfried Winkler*.

Frau *Edeltraud Riege*, Frau *Sabine Sauerbrey* und Frau *Erika Sachs* sei an dieser Stelle für die zuverlässige Arbeit bei der Fertigstellung des Manuskripts recht herzlich gedankt. Den Lektoren Frau *Inge Epp* und Herrn Dipl.-Ing. *Jürgen Reichenbach* möchte ich für die verständnisvolle und konstruktive Zusammenarbeit bei der Gestaltung des Buches Dank sagen.

Ilmenau

*Jürgen Wernstedt*

## Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Formelzeichenverzeichnis</b> .....                                                           | 13 |
| <b>1. Einführung</b> .....                                                                      | 17 |
| 1.1. Stellung des Modells bei der Lösung kybernetischer Aufgaben .....                          | 17 |
| 1.2. Praktische Beispiele für Prozeßmodelle .....                                               | 21 |
| 1.2.1. Modelle zur Steuerung der Fertigung hochintegrierter Schaltkreise im Zyklus I .....      | 22 |
| 1.2.2. Innentemperaturmodell zur Steuerung von Gewächshäusern .....                             | 24 |
| 1.2.3. Modelle des Sauerstoffgehalts limnischer Ökosysteme .....                                | 25 |
| 1.2.4. Modelle zur Vorhersage und Steuerung der Wassermenge im Flußgebiet der Werra (DDR) ..... | 27 |
| 1.2.5. Modelle der kontinuierlichen Fermentation .....                                          | 29 |
| 1.2.6. Modelle zur Lösung medizinischer Aufgaben .....                                          | 30 |
| 1.2.7. Schlußfolgerungen .....                                                                  | 32 |
| 1.3. Gesamtkonzeption der experimentellen Prozeßanalyse .....                                   | 32 |
| 1.4. Verwendete Klassifikationsmerkmale der Methoden der experimentellen Prozeßanalyse .....    | 38 |
| <b>2. Beschreibung des Amplitudenverhaltens von Signalen</b> .....                              | 40 |
| 2.1. Zielstellung der Ermittlung von Signalmodellen .....                                       | 40 |
| 2.2. Ausgewählte Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung .....                               | 41 |
| 2.2.1. Beschreibung eindimensionaler Zufallsgrößen .....                                        | 41 |
| 2.2.1.1. Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen .....                                | 41 |
| 2.2.1.2. Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....                           | 42 |
| 2.2.1.3. Kenngrößen und Verteilung von Zufallsgrößen .....                                      | 44 |
| 2.2.2. Beschreibung mehrdimensionaler Zufallsgrößen .....                                       | 46 |
| 2.2.2.1. Mehrdimensionale Zufallsgrößen und ihre Verteilungen .....                             | 46 |
| 2.2.2.2. Kenngrößen zweidimensionaler Zufallsgrößen .....                                       | 48 |
| 2.3. Elemente der mathematischen Statistik .....                                                | 51 |
| 2.3.1. Ausgewählte Stichprobenfunktionen und ihre Verteilungen .....                            | 51 |
| 2.3.2. Empirische Ermittlung von Verteilungen und Kenngrößen von Zufallsgrößen .....            | 53 |
| 2.3.3. Statistische Prüfverfahren .....                                                         | 62 |
| 2.3.4. Schätzung von Konfidenzintervallen .....                                                 | 67 |
| 2.4. Übungsaufgaben zum Abschnitt 2 .....                                                       | 68 |

|                                                                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>3. Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Signalen</b>                                                    | 72  |
| 3.1. Grundlagen der Beschreibung deterministischer Signale                                                        | 72  |
| 3.1.1. Modelle im Zeitbereich                                                                                     | 72  |
| 3.1.1.1. Beschreibung kontinuierlicher Signale                                                                    | 72  |
| 3.1.1.2. Beschreibung abgetasteter kontinuierlicher Signale                                                       | 76  |
| 3.1.2. Modelle im Frequenzbereich                                                                                 | 77  |
| 3.1.2.1. Beschreibung kontinuierlicher Signale                                                                    | 77  |
| 3.1.2.2. Beschreibung abgetasteter kontinuierlicher Signale                                                       | 79  |
| 3.2. Grundlagen der Beschreibung stochastischer Signale                                                           | 79  |
| 3.2.1. Grundbegriffe                                                                                              | 79  |
| 3.2.2. Beschreibung stochastischer Signale im Zeitbereich                                                         | 81  |
| 3.2.2.1. Autokorrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau)$                                                                | 81  |
| 3.2.2.2. Kreuzkorrelationsfunktionen $R_{xy}(\tau)$                                                               | 83  |
| 3.2.2.3. Experimentelle Ermittlung von Korrelationsfunktionen                                                     | 84  |
| 3.2.3. Beschreibung stochastischer Signale im Frequenzbereich/Leistungsdichtespektren                             | 88  |
| 3.2.3.1. Autoleistungsdichtespektrum $S_{xx}(\omega)$                                                             | 88  |
| 3.2.3.2. Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{xy}(\omega)$                                                            | 90  |
| 3.2.3.3. Experimentelle Bestimmung von Leistungsdichtespektren                                                    | 91  |
| 3.2.3.4. Beziehungen zwischen Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren                                  | 99  |
| 3.2.4. Beziehungen zwischen Signal- und Systemmodellen                                                            | 100 |
| 3.2.4.1. Beziehungen zwischen Korrelationsfunktionen $R(\tau)$ und der Gewichtsfunktion $g(t)$                    | 101 |
| 3.2.4.2. Beziehungen zwischen den Leistungsdichtespektren $S(\omega)$ und dem komplexen Frequenzgang $G(j\omega)$ | 101 |
| 3.3. Erweiterte Signalmodelle                                                                                     | 103 |
| 3.3.1. Grundstrukturen                                                                                            | 103 |
| 3.3.2. Erweiterte deterministische Signalmodelle                                                                  | 105 |
| 3.3.2.1. Deterministische Signalmodelle mit Polynomansatz                                                         | 105 |
| 3.3.2.2. Deterministische Signalmodelle mit periodischem Ansatz                                                   | 109 |
| 3.3.3. Erweiterte stochastische Signalmodelle                                                                     | 112 |
| 3.3.3.1. Grundansätze                                                                                             | 112 |
| 3.3.3.2. Autoregressive Modelle (AR-Modelle)                                                                      | 114 |
| 3.3.3.3. Modelle der gleitenden Mittel (MA-Modelle)                                                               | 116 |
| 3.3.3.4. Modelle eines autoregressiven Prozesses der gleitenden Mittel (ARMA-Modelle)                             | 119 |
| 3.3.3.5. Kombinierte Signalmodelle                                                                                | 121 |
| 3.4. Ausgewählte Methoden der Signalaufbereitung                                                                  | 125 |
| 3.4.1. Notwendigkeit einer Signalaufbereitung                                                                     | 125 |
| 3.4.2. Methoden zum Erkennen von Verfälschungen der Prozeßsignale/-zustände                                       | 126 |
| 3.4.3. Methoden zur Korrektur gemessener Signale                                                                  | 129 |
| 3.4.3.1. Eliminierung von Signalwerten                                                                            | 130 |
| 3.4.3.2. Statische Korrektur von Signalen                                                                         | 130 |
| 3.4.3.3. Dynamische Korrektur von Signalen                                                                        | 130 |

|                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.4.4. Filterung von Signalen                                                                                                     | 130 |
| 3.4.4.1. Grundstrategie des Filterentwurfs                                                                                        | 131 |
| 3.4.4.2. Digitale Tiefpaßfilter                                                                                                   | 132 |
| 3.4.4.3. Digitale Hochpaßfilter                                                                                                   | 144 |
| 3.5. Übungsaufgaben zum Abschnitt 3                                                                                               | 148 |
| <b>4. Bestimmung des dynamischen Verhaltens ungestörter Systeme</b>                                                               | 152 |
| 4.1. Systemeigenschaften, Systemmodelle und Testsignale                                                                           | 152 |
| 4.1.1. Voraussetzungen für die Anwendbarkeit deterministischer Methoden                                                           | 152 |
| 4.1.2. Verwendete Systemmodelle                                                                                                   | 152 |
| 4.1.3. Ausgewählte Testsignale                                                                                                    | 153 |
| 4.2. Ein-/Ausgangs-Modelle im Zeitbereich                                                                                         | 155 |
| 4.2.1. Modellbestimmung anhand von Kenngrößen der Sprungantwort bzw. der Übergangsfunktion                                        | 155 |
| 4.2.1.1. Modellbestimmung von $P$ - $T_1$ - und $P$ - $T_1$ - $T_{D1}$ -Systemen                                                  | 156 |
| 4.2.1.2. Modellbestimmung von $P$ - $T_n$ - $T_t$ -Systemen                                                                       | 158 |
| 4.2.1.3. Modellbestimmung von $I_1$ - $T_n$ - $T_t$ -Systemen                                                                     | 162 |
| 4.2.1.4. Bestimmung diskreter Werte des Frequenzgangs $G(j\omega)$ aus der Übergangsfunktion                                      | 163 |
| 4.2.2. Modellbestimmung anhand von Kenngrößen der Impulsantworten bzw. der Gewichtsfunktionen                                     | 164 |
| 4.2.2.1. Auswertung von Impulsantworten bei idealem Eingangssignal (Dirac-Impuls)                                                 | 164 |
| 4.2.2.2. Auswertung von Impulsantworten unter Beachtung der Impulsbreite des Eingangssignals                                      | 165 |
| 4.2.3. Ermittlung von Stützstellen der Gewichtsfunktion aus beliebigen Eingangs- und Ausgangssignalen – Entfaltung ohne Ausgleich | 166 |
| 4.3. Ein-/Ausgangs-Modelle im Frequenzbereich                                                                                     | 167 |
| 4.3.1. Methoden zur Aufnahme des Frequenzgangs $G(j\omega)$                                                                       | 168 |
| 4.3.1.1. Synchronaufzeichnungsverfahren                                                                                           | 168 |
| 4.3.1.2. Komponentenverfahren                                                                                                     | 169 |
| 4.3.1.3. Frequenzgangmessung mit Rechteck- und Dreieckswellen                                                                     | 170 |
| 4.3.2. Approximation von $G(j\omega)$ durch ein Zeitkonstantenmodell                                                              | 172 |
| 4.3.3. Approximation von $G(j\omega)$ durch ein Polynommodell                                                                     | 174 |
| 4.4. Ermittlung des Zustands/Beobachter                                                                                           | 177 |
| 4.4.1. Problemstellung                                                                                                            | 177 |
| 4.4.2. Zustandsbeobachtung aus den Eingangsgrößen und einem Systemmodell                                                          | 178 |
| 4.4.3. Zustandsbeobachtung aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen – Luenberger Beobachter                                           | 180 |
| 4.5. Übungsaufgaben zum Abschnitt 4                                                                                               | 186 |
| <b>5. Bestimmung des statischen Verhaltens von gestörten Systemen</b>                                                             | 189 |
| 5.1. Ausgewählte Grundlagen der Schätztheorie                                                                                     | 189 |
| 5.1.1. Aufgabe der Schätzmethoden                                                                                                 | 189 |
| 5.1.2. Grundideen wesentlicher Schätzmethoden                                                                                     | 190 |

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1.2.1. Bayes-Schätzung .....                                                         | 190 |
| 5.1.2.2. Maximum-Likelihood-Schätzung .....                                            | 191 |
| 5.1.2.3. Markov-Schätzung – ein Spezialfall der verallgemeinerten Regression ..        | 192 |
| 5.1.2.4. Methode der kleinsten Fehlerquadrate – Regression .....                       | 193 |
| 5.1.3. Kriterien zur Beurteilung der Schätzung .....                                   | 194 |
| 5.1.3.1. Verwendung von Verteilungen .....                                             | 194 |
| 5.1.3.2. Verwendung von Momenten .....                                                 | 195 |
| 5.1.4. Möglichkeiten zur Fehlerbildung zwischen System- und Modellsignalen             | 196 |
| 5.1.5. Grundstrategien zur Minimierung der Zielfunktion .....                          | 198 |
| 5.1.5.1. Direkte Lösung der Schätzaufgabe .....                                        | 198 |
| 5.1.5.2. Iterative Lösung der Schätzaufgabe .....                                      | 199 |
| 5.1.5.3. Rekursive Lösung der Schätzaufgabe .....                                      | 200 |
| 5.2. Direkte Schätzverfahren .....                                                     | 201 |
| 5.2.1. Voraussetzungen .....                                                           | 201 |
| 5.2.2. Direkte Methode der Regression .....                                            | 202 |
| 5.2.3. Methode der Kammlinienregression .....                                          | 206 |
| 5.2.4. Direkte Methode der verallgemeinerten Regression/Markov-Schätzung               | 209 |
| 5.3. Iterative Schätzverfahren .....                                                   | 212 |
| 5.3.1. Allgemeine Grundstruktur .....                                                  | 212 |
| 5.3.2. Newton-Raphson-Verfahren .....                                                  | 213 |
| 5.3.3. Levenberg-Marquard-Verfahren .....                                              | 214 |
| 5.4. Indirekte/rekursive Schätzverfahren .....                                         | 215 |
| 5.4.1. Allgemeiner Ansatz .....                                                        | 215 |
| 5.4.2. Gradientenmethoden .....                                                        | 216 |
| 5.4.2.1. Allgemeine Grundstrukturen .....                                              | 216 |
| 5.4.2.2. Methode der Relaxation .....                                                  | 218 |
| 5.4.2.3. Methode der stochastischen Approximation .....                                | 221 |
| 5.4.2.4. Kombinierte Methode der Relaxation und der stochastischen Approximation ..... | 222 |
| 5.4.3. Methode der rekursiven Regression .....                                         | 222 |
| 5.4.3.1. Ungewichtete rekursive Regression .....                                       | 222 |
| 5.4.3.2. Gewichtete rekursive Regression .....                                         | 225 |
| 5.4.4. Methode der rekursiven verallgemeinerten Regression .....                       | 229 |
| 5.5. Methoden der optimalen Versuchsplanung .....                                      | 232 |
| 5.5.1. Zielstellung und ausgewählte Grundlagen .....                                   | 232 |
| 5.5.2. Mehrfaktorpläne für lineare Modelle .....                                       | 236 |
| 5.5.2.1. Allgemeine Betrachtungen .....                                                | 236 |
| 5.5.2.2. Vollständige Faktorpläne .....                                                | 237 |
| 5.5.2.3. Teilfaktorpläne .....                                                         | 240 |
| 5.5.3. Mehrfaktorpläne für nichtlineare Modelle 2. Ordnung .....                       | 246 |
| 5.5.3.1. Problemstellung .....                                                         | 246 |
| 5.5.3.2. Orthogonale zentrale Versuchspläne .....                                      | 248 |
| 5.5.3.3. Drehbare zentrale Versuchspläne .....                                         | 250 |
| 5.5.3.4. Vereinfachte zentrale Versuchspläne .....                                     | 251 |
| 5.6. Übungsaufgaben zum Abschnitt 5 .....                                              | 252 |

|                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6. Bestimmung des dynamischen Verhaltens gestörter Systeme .....                           | 255 |
| 6.1. Zielstellung .....                                                                    | 255 |
| 6.2. Schätzung der Stützstellen der Kerne der Volterra-Reihe .....                         | 256 |
| 6.2.1. Systembeschreibung durch die Volterra-Reihe .....                                   | 256 |
| 6.2.2. Schätzung der Stützstellenwerte der Gewichtsfunktion .....                          | 260 |
| 6.2.2.1. Entfaltung mit Ausgleich bei linearen Systemen .....                              | 260 |
| 6.2.2.2. Korrelationsverfahren .....                                                       | 261 |
| 6.2.3. Schätzung der Stützstellenwerte der Kerne der Volterra-Reihe 2. Ordnung .....       | 263 |
| 6.2.3.1. Schätzung bei Hammerstein-Struktur des Systems .....                              | 263 |
| 6.2.3.2. Schätzung bei Wiener-Struktur des Systems .....                                   | 267 |
| 6.2.4. Schätzung der Stützstellen der Gewichtsfunktionen in Mehrgrößensystemen .....       | 269 |
| 6.3. Schätzung der Koeffizienten der Differenzengleichung .....                            | 271 |
| 6.3.1. Systembeschreibungen und Fehlergleichungen .....                                    | 271 |
| 6.3.1.1. Lineare Eingrößensysteme .....                                                    | 271 |
| 6.3.1.2. Einfache nichtlineare Eingrößensysteme .....                                      | 275 |
| 6.3.2. Methoden der Regression .....                                                       | 277 |
| 6.3.2.1. Direkte Methode der Regression .....                                              | 277 |
| 6.3.2.2. Rekursive Methode der Regression .....                                            | 281 |
| 6.3.3. Methoden der Hilfsvariablen .....                                                   | 283 |
| 6.3.3.1. Direkte Methode der Hilfsvariablen .....                                          | 283 |
| 6.3.3.2. Rekursive Methode der Hilfsvariablen .....                                        | 287 |
| 6.3.4. Weitere Parameterschätzverfahren .....                                              | 288 |
| 6.3.4.1. Methode der verallgemeinerten Regression .....                                    | 288 |
| 6.3.4.2. Maximum-Likelihood-Methode .....                                                  | 291 |
| 6.3.5. Parameterschätzung einfacher nichtlinearer Systeme .....                            | 292 |
| 6.3.5.1. Direkte Schätzstrategien .....                                                    | 293 |
| 6.3.5.2. Mehrstufige Schätzstrategien .....                                                | 293 |
| 6.3.5.3. Iterative Schätzstrategien .....                                                  | 296 |
| 6.4. Entwurf von Testsignalfolgen .....                                                    | 297 |
| 6.4.1. Notwendigkeit und Ziele .....                                                       | 297 |
| 6.4.2. Pseudostochastische binäre Testsignale .....                                        | 298 |
| 6.4.3. Pseudostochastische mehrwertige Testsignale .....                                   | 301 |
| 6.4.4. Entwurf optimaler Testsignalfolgen .....                                            | 303 |
| 6.4.4.1. Optimale Testsignalfolgen für die Gewichtsfunktion .....                          | 303 |
| 6.4.4.2. Testsignalfolgen für das Volterra-Reihen-Modell 2. Ordnung .....                  | 307 |
| 6.4.4.3. Testsignalfolgen für lineare Differenzengleichungsmodelle .....                   | 312 |
| 6.4.4.4. Testsignalfolgen für nichtlineare Differenzengleichungsmodelle .....              | 314 |
| 6.5. Schätzung des Zustands/Zustandsfilter .....                                           | 314 |
| 6.5.1. Aufgabe und Voraussetzungen .....                                                   | 314 |
| 6.5.2. Zustandsschätzung aus den gemessenen Ausgangsgrößen des Systems                     | 316 |
| 6.5.3. Zustandsschätzung aus den gemessenen Eingangs- und Ausgangsgrößen des Systems ..... | 318 |
| 6.6. Ausgewählte Probleme der Schätzung dynamischer Systeme .....                          | 322 |
| 6.6.1. Parameterschätzung in geschlossenen Ketten .....                                    | 322 |

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| 6.6.2. Verfahren zur Strukturprüfung .....                 | 324 |
| 6.6.3. Parameterschätzung linearer Mehrgrößensysteme ..... | 326 |
| 6.6.4. Möglichkeiten zur Wahl der Abtastzeit $T$ .....     | 328 |
| 6.7. Übungsaufgaben zum Abschnitt 6 .....                  | 329 |
| Lösungen der Übungsaufgaben .....                          | 331 |
| Anhang .....                                               | 374 |
| Literaturverzeichnis .....                                 | 380 |
| Sachwörterverzeichnis .....                                | 387 |

## Formelzeichenverzeichnis

|                           |                                                                   |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $A$                       | Signalamplitude                                                   |
| $A$                       | Systemmatrix für kontinuierliche Systeme                          |
| $A^*$                     | Systemmatrix für zeitdiskrete Systeme                             |
| $A(z^{-1})$               | Nennerpolynom einer diskreten Übertragungsfunktion                |
| $\hat{A}_H(z^{-1})$       | Nennerpolynom der diskreten Übertragungsfunktion des Hilfsmodells |
| $A(q^{-1})$               | Summenverschiebeoperator des ARMA-Modells                         |
| $a_i$                     | Systemparameter                                                   |
| $B$                       | Signalamplitude                                                   |
| $B$                       | Steuermatrix für kontinuierliche Systeme                          |
| $B^*$                     | Steuermatrix für zeitdiskrete Systeme                             |
| $B(z^{-1})$               | Zählerpolynom einer diskreten Übertragungsfunktion                |
| $B(t)$                    | Bewertungsfunktion                                                |
| $\hat{B}_H(z^{-1})$       | Zählerpolynom der diskreten Übertragungsfunktion des Hilfsmodells |
| $B(X_1, X_1, \dots, X_m)$ | Bestimmtheitsmaß                                                  |
| $B(q^{-1})$               | Summenverschiebeoperator des ARMA-Modells                         |
| $b_i$                     | Systemparameter                                                   |
| $C(\xi, s)$               | Kostenfunktion                                                    |
| $C$                       | Beobachtungsmatrix für kontinuierliche Systeme                    |
| $C^*$                     | Beobachtungsmatrix für zeitdiskrete Systeme                       |
| $C(z^{-1})$               | Nennerpolynom einer diskreten Störfilterübertragungsfunktion      |
| $\text{Cov} \{ \dots \}$  | Kovarianzmatrix                                                   |
| $C \{ \dots \}$           | Inverse der Kovarianzmatrix                                       |
| $c$                       | Konstante                                                         |
| $c_i$                     | Parameter des Störfilters                                         |
| $\text{cov} \{ \dots \}$  | Kovarianz                                                         |
| $D$                       | Durchgangsmatrix für kontinuierliche Systeme                      |
| $D(z^{-1})$               | Zählerpolynom einer diskreten Störfilterübertragungsfunktion      |
| $d_i$                     | Parameter des Störfilters                                         |
| $E$                       | Kovarianzmatrix des Fehlers                                       |
| $E^*$                     | Matrix des Fehlers                                                |
| $E(z)$                    | $z$ -Transformierte des Fehlers                                   |
| $E \{ \dots \}$           | Erwartungswert                                                    |
| $e$                       | Fehler (allgemein)                                                |
| $e_v$                     | verallgemeinerter Fehler                                          |
| $F(x)$                    | Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße                            |
| $F(x_1, x_2)$             | Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsgröße          |
| $F(z)$                    | diskrete Übertragungsfunktion des erweiterten Störfilters         |
| $F^*(z)$                  | diskrete Übertragungsfunktion des Störfilters                     |
| $F$                       | Testgröße                                                         |
| $F_{\alpha, f_1, f_2}$    | Tafelwert der $F$ -Verteilung                                     |
| $F$                       | Dreiecksmatrix                                                    |
| $f$                       | Frequenz, Freiheitsgrad                                           |
| $f(x)$                    | Verteilungsdichte einer Zufallsgröße                              |
| $f(x_1, x_2)$             | Verteilungsdichte einer zweidimensionalen Zufallsgröße            |

|                            |                                                          |
|----------------------------|----------------------------------------------------------|
| $G(p)$                     | Übertragungsfunktion                                     |
| $G(j\omega)$               | Frequenzgang                                             |
| $ G(j\omega) $             | Amplitudenfrequenzgang                                   |
| $G(e^{j\omega T})$         | diskreter Frequenzgang                                   |
| $ G(e^{j\omega T}) $       | Amplitudengang des diskreten Frequenzgangs               |
| $G(z)$                     | diskrete Übertragungsfunktion                            |
| $G_F(z)$                   | diskrete Übertragungsfunktion eines Filters              |
| $G_S(z)$                   | diskrete Übertragungsfunktion der Strecke                |
| $G_R(z)$                   | diskrete Übertragungsfunktion des Reglers                |
| $g(k)$                     | Gewichtsfolge                                            |
| $g(t)$                     | Gewichtsfunktion                                         |
| $g(\tau_1, \dots, \tau_m)$ | Volterra-Kerne                                           |
| $H$                        | Prognosebereich                                          |
| $H_0$                      | Hypothese                                                |
| $H$                        | Matrix der Hilfsvariablen                                |
| $H_n$                      | Hadamard-Matrix                                          |
| $h$                        | Vektor der Hilfsvariablen                                |
| $h(t)$                     | Übergangsfunktion                                        |
| $h_w$                      | Wendepunktordinate der Sprungantwort                     |
| $I$                        | Einheitsmatrix                                           |
| $I(V_n)$                   | Fishersche Informationsmatrix für den Versuchsplan $V_n$ |
| $K$                        | Verstärkungsfaktor (allgemein)                           |
| $K_p$                      | proportionaler Verstärkungsfaktor                        |
| $K_i$                      | integraler Verstärkungsfaktor                            |
| $K(k+1)$                   | Korrekturmatrix                                          |
| $k(k+1)$                   | Korrekturvektor                                          |
| $k$                        | Abtastzeitpunkt                                          |
| $k^*$                      | normierter Anstieg im Amplitudenfrequenzgang             |
| $L$                        | Anzahl der Taktimpulse/Periode                           |
| $L\{\dots\}$               | Laplace-Operator                                         |
| $L^*\{\dots\}$             | diskreter Laplace-Operator                               |
| $L(\dots)$                 | Likelihoodfunktion                                       |
| $M$                        | Meßwertmatrix der allgemeinen Eingangsgrößen             |
| $\tilde{M}$                | gefilterte Meßwertmatrix                                 |
| $m$                        | allgemeiner Eingangsgrößenvektor                         |
| $N$                        | Kovarianzmatrix der Störung $n^*(t)$                     |
| $n^*(t)$                   | korrelierte Störung                                      |
| $n$                        | Anzahl der Beobachtungen                                 |
| $n_A$                      | Anzahl der Beobachtungen des Ereignisses $A$             |
| $n_K$                      | Klassenanzahl                                            |
| $P(k)$                     | Präzisionsmatrix                                         |
| $P^*(k)$                   | gewichtete Präzisionsmatrix                              |
| $P^*$                      | Wichtungsmatrix                                          |
| $P(\dots)$                 | Wahrscheinlichkeit                                       |
| $p$                        | komplexe Frequenz                                        |
| $p_i$                      | Wahrscheinlichkeit für $X = x_i$                         |
| $p_{ij}$                   | Elemente der Matrix $P(k)$                               |
| $p_{ik}$                   | Wahrscheinlichkeit für $X_1 = x_{1i}$ und $X_2 = x_{2k}$ |
| $Q$                        | Gütefunktion                                             |

|                  |                                                        |
|------------------|--------------------------------------------------------|
| $Q'$             | Kovarianzmatrix des Extrapolationsfehlers des Zustands |
| $q(t)$           | kontinuierlicher Zustandsvektor                        |
| $q(k)$           | zeitdiskreter Zustandsvektor                           |
| $q^*(k)$         | zeitdiskreter extrapolierter Zustandsvektor            |
| $\tilde{q}(k)$   | zeitdiskreter Zustandsfehlervektor                     |
| $q^{-1}$         | Verschiebeoperator                                     |
| $R$              | Matrix der Korrelationsfunktion                        |
| $R'$             | Richtungsmatrix                                        |
| $R_{xx}(\tau)$   | Autokorrelationsfunktion                               |
| $R_{xu}(\tau)$   | Kreuzkorrelationsfunktion                              |
| $R(z)$           | z-Transformierte des zeitdiskreten Testsignals         |
| $r(t)$           | Testsignal                                             |
| $r$              | Parametervektor der Steuereinrichtung                  |
| $S_{uu}(\omega)$ | Autoleistungsdichtespektrum                            |
| $S_{ux}(\omega)$ | Kreuzleistungsdichtespektrum                           |
| $S_R$            | Restquadratsumme                                       |
| $s^2$            | Streuung einer Stichprobe                              |
| $s_R^2$          | Reststreuung                                           |
| $s$              | allgemeiner Parametervektor                            |
| $T$              | Abtastzeit                                             |
| $T$              | Matrix der Zeitwerte                                   |
| $T'$             | Zeitkonstante                                          |
| $T_i$            | Trägheitszeitkonstante                                 |
| $T_{Di}$         | Vorhaltzeitkonstante                                   |
| $T_t$            | Totzeit                                                |
| $T_\Sigma$       | Summenzeitkonstante                                    |
| $T_w$            | Wendepunktabszisse der Sprungantwort                   |
| $T_a$            | Übergangszeit                                          |
| $T_n$            | Anlaufzeit                                             |
| $T_u$            | Verzugszeit                                            |
| $T_o$            | Periodenlänge, Beobachtungsintervall                   |
| $T_p$            | Testsignalperiode                                      |
| $T_m$            | Zeitpunkt des Maximums der Gewichtsfunktion            |
| $t$              | Zeit, Testgröße bei $t$ -Test                          |
| $t_i$            | $i$ -ter Zeitwert                                      |
| $t_{a, f}$       | Tafelwert der $t$ -Verteilung                          |
| $U$              | Matrix der Eingangsgrößen                              |
| $U(z)$           | z-Transformierte der zeitdiskreten Eingangsgröße       |
| $u(t)$           | Eingangsgröße                                          |
| $u_i(t)$         | $i$ -te Eingangsgröße/Statik                           |
| $V$              | Kovarianzmatrix der Störung auf die Zustandsgrößen     |
| $V_n$            | konkreter Versuchsplan                                 |
| $V_n^*$          | optimaler konkreter Versuchsplan                       |
| $V^*(z)$         | z-Transformierte der zeitdiskreten Störgröße $v^*$     |
| $v(t)$           | Zustandsstörung                                        |
| $v^*(t)$         | Störgröße im erweiterten Systemmodell                  |
| $W$              | Wichtungsmatrix                                        |
| $w(t)$           | Führungsgröße                                          |
| $w^*(mT)$        | Wichtungsfaktor                                        |

|                         |                                                              |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $X(z)$                  | z-Transformierte der zeitdiskreten Ausgangsgröße             |
| $X^0(z)$                | z-Transformierte der zeitdiskreten ungestörten Ausgangsgröße |
| $x(t)$                  | Ausgangsgröße                                                |
| $x^0(t)$                | ungestörte Ausgangsgröße/Signal                              |
| $x'(t)$                 | verfälschtes Signal                                          |
| $\tilde{x}(t)$          | Signal (gefiltert/transformiert)                             |
| $x_T(t)$                | Trendfunktion                                                |
| $x_0$                   | Signalamplitude                                              |
| $x_m$                   | maximaler Wert der Gewichtsfunktion                          |
| $\bar{x}$               | Mittelwert                                                   |
| $y(t)$                  | Zwischensignal                                               |
| $Z$                     | Kovarianzmatrix der Ausgangsstörung                          |
| $Z(z)$                  | z-Transformierte der zeitdiskreten Ausgangsstörung           |
| $Z\{\dots\}$            | z-Transformationsoperator                                    |
| $z(t)$                  | Ausgangsstörung                                              |
| $z$                     | Testgröße                                                    |
| $z_a$                   | Tafelwert der z-Verteilung                                   |
| $z_{IS}$                | Pole der diskreten Übertragungsfunktion des Systems          |
| $x_{IB}$                | Pole der diskreten Übertragungsfunktion des Beobachters      |
| $\alpha$                | Faktor, Irrtumswahrscheinlichkeit                            |
| $\beta$                 | Faktor                                                       |
| $\gamma$                | Schiefe                                                      |
| $\gamma(k)$             | Schrittweite                                                 |
| $\delta(t)$             | Impulsfunktion                                               |
| $\sigma(t)$             | Sprungfunktion                                               |
| $\sigma^2$              | Streuung, Varianz                                            |
| $\sigma_z^2$            | Varianz der Ausgangsstörung                                  |
| $\sigma_e^2$            | Varianz des unkorrelierten Fehlers                           |
| $\sigma_c^2$            | Varianz des korrelierten Fehlers                             |
| $\mu$                   | Erwartungswert                                               |
| $\Delta$                | Klassenbreite                                                |
| $\Delta T$              | Impulsbreite                                                 |
| $\nabla\{\dots\}$       | erste partielle Ableitung                                    |
| $\nabla\nabla\{\dots\}$ | zweite partielle Ableitung                                   |
| $\chi^2$                | Testgröße                                                    |
| $\chi_{\alpha, f}^2$    | Tafelwert der $\chi^2$ -Verteilung                           |
| $\varepsilon$           | Exzeß, Abbruchgrenze                                         |
| $\varepsilon(t)$        | unkorrelierter Fehler, weißes Rauschsignal                   |
| $\varepsilon(z)$        | z-Transformierte des zeitdiskreten unkorrelierten Fehlers    |
| $\tau$                  | Zeitverschiebung                                             |
| $\tau_u$                | Ordinatenabschnitt der Wendetangente der Sprungantwort       |
| $\varrho$               | Korrelationskoeffizient                                      |
| $\lambda$               | Faktor, Lagrange-Multiplikation                              |
| $\lambda_i$             | i-ter Eigenwert                                              |
| $\varphi$               | Phasenwinkel                                                 |
| $\varphi(\omega T)$     | Phasengang                                                   |
| $\omega$                | Kreisfrequenz                                                |
| $\omega_g$              | Grenzfrequenz                                                |
| $\omega^*$              | Bezugsfrequenz                                               |

# 1. Einführung

## 1.1. Stellung des Modells bei der Lösung kybernetischer Aufgaben

Die effektive Lösung von Diagnose-, Überwachungs-, Steuer- und Vorhersageaufgaben für Mengen- und/oder Qualitätsgrößen in technischen und nichttechnischen Prozessen ist eine der vorrangigen Aufgaben jeder Gesellschaft. Sie dienen zunehmend der Automatisierung körperlicher und geistiger Tätigkeiten und Fähigkeiten des Menschen, d.h. der komplexen Automatisierung. Eine der wesentlichsten Grundlagendisziplinen der Prozeßautomatisierung ist die Kybernetik. Die Kybernetik ist die Wissenschaft von der zielgerichteten Beeinflussung von Systemen (Steuerung) sowie der Informationsverarbeitungsprozesse und deren Automatisierung, die das Wesentliche der Steuervorgänge ausmachen [1.1, 1.2]. Die Bewältigung der oben genannten Aufgaben kann durch die im Bild 1.1 dargestellten Strategien erfolgen.

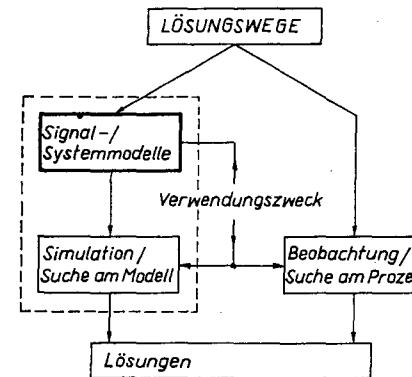


Bild 1.1  
Strategie zur Lösung kybernetischer Aufgaben

Die erste Strategie besteht darin, daß die Aufgaben mit den Mitteln der Simulation auf Analog- und Digitalrechnern unter Verwendung von Modellen der Signale und Systeme sowie von Zielkriterien gelöst werden. Dabei soll unter einem Modell die Abbildung wesentlicher Aspekte des realen Prozesses verstanden werden. Die Modelle der Signale und/oder der Systeme sind gekennzeichnet durch Struktur, Parameter- und/oder Zustandswerte. Die genannte Entwurfsstrategie besitzt die Vorteile, daß keine unmittelbare „Störung“ des Prozesses erforderlich und daß eine effektive Bewältigung der Aufgaben möglich ist. Nachteilig ist der Aufwand für die Erstellung der Signal- und Systemmodelle sowie der Umstand, daß die Modelle immer eine Approximation des realen Prozesses darstellen. Die zweite Strategie besteht in der Lösung der genannten Aufgaben durch eine Beobachtung und Suche direkt am Prozeß. Vorteil dieses Weges ist die Lösung der Aufgabe unter den realen aktuellen Bedingungen; dagegen sind der notwendige Zeitaufwand, die ökonomischen Verluste durch die Experimente am Prozeß und die fehlende

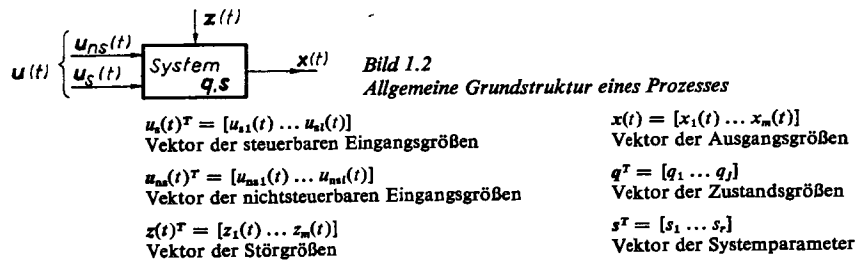


Bild 1.2

Allgemeine Grundstruktur eines Prozesses

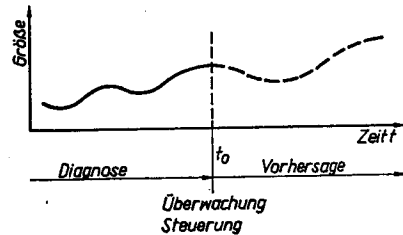


Bild 1.3. Zeiträume für die Diagnose-, Überwachungs-, Steuer- und Vorhersageaufgabe

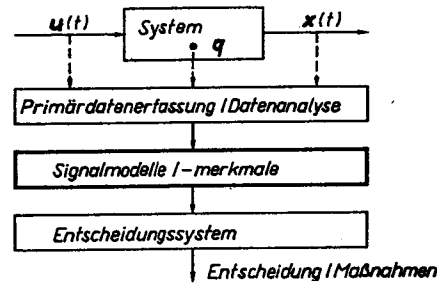


Bild 1.4. Struktur zur Lösung von Diagnose- und Überwachungsaufgaben

| Kybernetische Methoden zur Gewinnung und Beschreibung von Informationen                                                                                | Menge der Informationen über                  |                             |                                  | Kybernetische Methoden zur Steuerung/Entscheidungsfindung                                                                                 | Zweckmäßige Realisierung durch                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                        | Prozeßstruktur und -parameter                 | Prozeßsignale und -zustände | Steuerziele und Nebenbedingungen |                                                                                                                                           |                                                                       |
|                                                                                                                                                        | volle (ausreichende) Information              |                             |                                  | klassische Lösung der Steueraufgabe                                                                                                       | AUTOMAT/MASCHINE<br>Einsatz von Beratungs-/Expertensystemen<br>MENSCH |
| Theoretische Prozeßanalyse<br>Experimentelle Prozeßanalyse<br>Entscheidungsverhalten des Menschen<br>– Expertenbefragung<br>– Beobachtung des Experten | * Risikosituation *<br><br>* Spielsituation * |                             |                                  | Polyoptimierung Lernverfahren (einschl. Klassifikation, Vorhersage, Adaption)<br>Entscheidungstheorie<br>– Bayeskonzept<br>– Spieltheorie |                                                                       |
|                                                                                                                                                        | keine Information                             |                             |                                  | Steueraufgabe nicht lösbar                                                                                                                |                                                                       |

Bild 1.5. Zusammenhang zwischen „Information“ und Steuerkonzept

Möglichkeit des Entwurfs von Steuereinrichtungen vor Inbetriebnahme des Prozesses schwerwiegende Nachteile. Häufig werden beide Strategien gleichzeitig angewendet.

Um die Stellung des Modells bei der Bewältigung kybernetischer Aufgaben besser zu erkennen, werden, ausgehend von der allgemeinen Grundstruktur eines Prozesses im Bild 1.2, die Teilaufgaben der Diagnose, Überwachung, Steuerung und Vorhersage kurz erläutert. Dabei bedeuten:

**Diagnose.** Die Analyse der Informationen über Mengen- und/oder Qualitätsgrößen zurückliegender Zeitabschnitte ( $t < t_0$ ; Darstellung des zeitlichen Aspekts im Bild 1.3).

**Überwachung.** Die Analyse der aktuellen Information über Mengen- und/oder Qualitätsgrößen ( $t = t_0$ ; Bild 1.3). Die Aufgaben der Diagnose und Überwachung werden vorwiegend auf der Grundlage von Signalmodellen und bestimmter charakteristischer Werte/Merkmale von Prozeßgrößen gelöst. Im Bild 1.4 ist die allgemeine Struktur dieser Aufgaben dargestellt.

**Steuerung.** Aktueller und geplanter zielgerichteter Eingriff in den zugeordneten Prozeß ( $t \geq t_0$ ; Bild 1.3).

Für die Lösung dieser Aufgaben sind eine Vielzahl von Konzepten zur automatischen und operativen Steuerung entworfen worden, die auf Prozeßmodellen basieren. Das zweckmäßigste Steuerkonzept wird dabei wesentlich von der vorhandenen Menge und Art an Information über

- die Prozeßsignale und -zustände
- die Prozeßstruktur und -parameter
- die Steuerziele und Nebenbedingungen

bestimmt. Als Möglichkeiten zur Ermittlung dieser Informationen in Form von Signal- und/oder Systemmodellen stehen Methoden der theoretischen und der experimentellen Prozeßanalyse (Modellbildung) sowie das Entscheidungsverhalten/Wissen des Menschen zur Verfügung (Bild 1.5). Die theoretische Prozeßanalyse beruht auf der Ausnutzung bekannter Gesetzmäßigkeiten/Bilanzgleichungen; die experimentelle Prozeßanalyse beruht auf der Auswertung der gemessenen Eingangs- und Ausgangssignale. Liegt eine ausreichende Information über die Prozeßsignale und -zustände sowie über das Systemverhalten vor, können automatische Steuereinrichtungen – Automaten – die Aufgabe vollständig lösen.

Im Bild 1.6 sind ausgewählte typische vorangepaßte und selbstanpassende Steuersysteme dargestellt, die automatisch arbeiten. Häufig treten in der Praxis aber Prozesse auf, bei denen

- ungenaue, unsichere und subjektiv beeinflusste Informationen und/oder
- quantitative und qualitative Informationen und/oder
- unzureichende A-priori-Kenntnisse bezüglich der Lösung der Steueraufgabe und/oder
- unvorhersehbare Situationen

vorliegen.

In diesen Fällen hat sich das Konzept der operativen Steuerung bewährt (Bild 1.7) [1.3]. Bei diesem Steuerkonzept löst der Mensch auf der Grundlage von Entscheidungs-/Steuervorschlägen eines Beratungs-/Expertensystems diese Aufgabe. Das Beratungs-/Expertensystem, dessen Grundstruktur im Bild 1.7 dargestellt ist, ist in der Lage, auf der Grundlage seines gespeicherten „Wissens“, der erfaßten Situation und den Algorithmen zur Ermittlung des Wissens über den konkreten Prozeß sowie den Algorithmen zur Lösung der Entscheidungs-/Steueraufgabe dem Menschen Vorschläge zu unterbreiten.

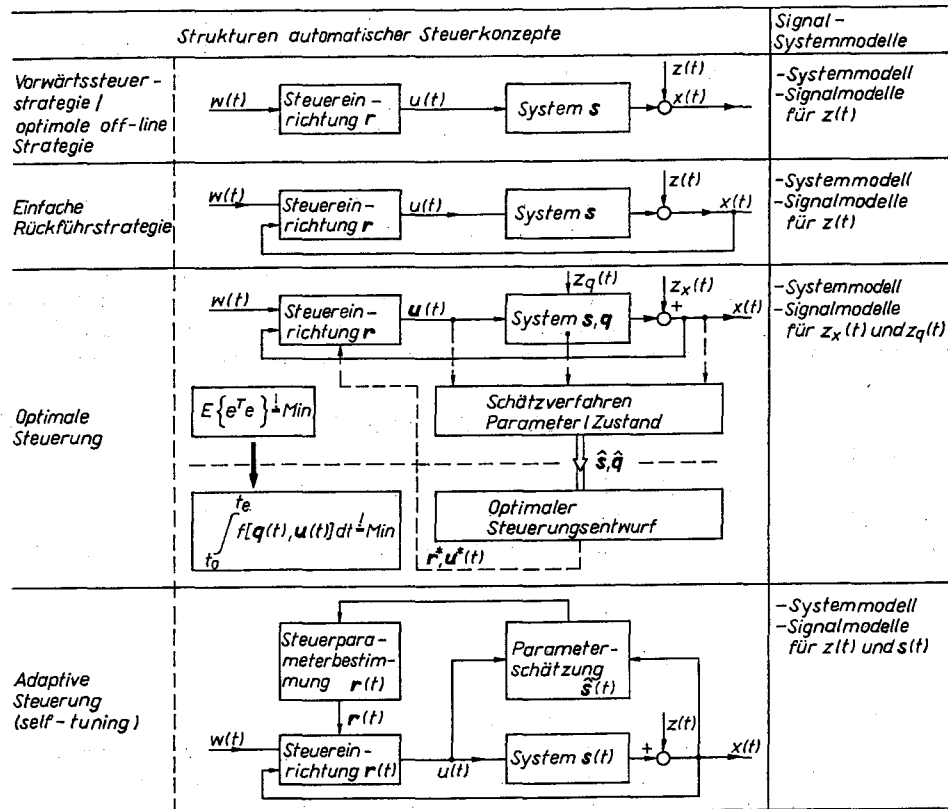


Bild 1.6. Ausgewählte Strukturen automatischer Steuerkonzepte

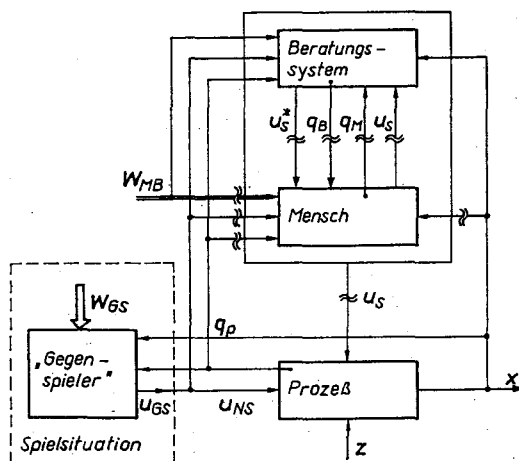
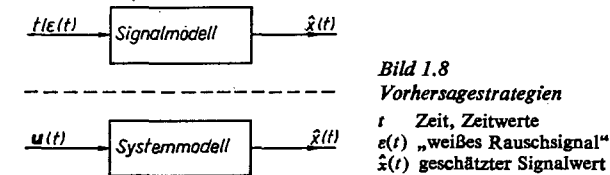


Bild 1.7

## Konzept der operativen Steuerung

- $q_M$  Zustandsvektor des Menschen  
 $q_B$  Zustandsvektor des Beratungssystems  
 $u_{GS}$  Vektor der Steuergrößen der Gegenspieler  
 $w_{MB}$  Vektor der Führungsgrößen für das Entscheidungssystem „Mensch-Beratungssystem“  
 $w_{GS}$  Vektor der Führungsgrößen für die Gegenspieler  
 $u_s^*$  Vorschlag für steuerbare Eingangsgrößen, Schnittstelle Mensch-Maschine

**Vorhersage.** Abschätzung der zukünftigen Entwicklung von Mengen- und/oder Qualitätsgrößen und Bewertung von geplanten Steuer- und Handlungsvarianten ( $t > t_0$ ; Bild 1.3). Die Aufgabe der Vorhersage kann auf der Grundlage von Signal- und/oder Systemmodellen entsprechend den Strukturen im Bild 1.8 realisiert werden. Die vorhergesagten Werte der Prozeßgrößen können bei Verwendung von Signalmodellen für vorgegebene Zeiten  $t_i$  bzw. Signalwerte  $e(t_i)$  und bei Verwendung von Systemmodellen aus vorgegebenen Signalwerten  $u(t)$  ermittelt werden.



## 1.2. Praktische Beispiele für Prozeßmodelle

In den letzten Jahrzehnten gibt es kein Gebiet im technischen und nichttechnischen Bereich, in dem nicht die Methoden der experimentellen Ermittlung von Signal- und/oder Systemmodellen zur Lösung von speziellen Aufgaben angewendet worden sind [1.4, 1.5]. Dabei sind folgende Aspekte für diese Entwicklung charakteristisch:

1. Die enorme Entwicklung der Sensortechnik, der digitalen Rechentechnik und der Informationstechnik erlaubt die effektive Anwendung bereits bekannter Methoden der Erstellung von Signal- und/oder Systemmodellen.
2. Die unterschiedlichsten Anwendungsgebiete befruchteten sich gegenseitig mit ihren Methoden, z.B. übernimmt der technische Bereich (vorwiegend dynamisch-deterministische) Methoden der Versuchsplanung und der Klassifikation aus den Bereichen der Landwirtschaft und der Medizin.
3. Die sehr umfangreich durchgeführten Vergleiche von Methoden der experimentellen Prozeßanalyse zeigen, daß es nicht einen günstigen Weg bzw. eine günstige Methode gibt, sondern die subjektive Komponente beim Entwurf der Modelle erhalten bleibt.

Tafel 1.1. Vorgestellte Anwendungsfälle

| Bereich          | Modelle                                                                               | Ziele                                            |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Mikroelektronik  | Modelle einer Fertigungszelle für den Zyklus I                                        | Mengen- und Qualitätssteuerung                   |
| Landwirtschaft   | Innentemperaturmodell des Gewächshauses G300                                          | Ertragsoptimierung bei minimalen Kosten          |
| Wasserwirtschaft | Wassergütermodelle von Flüssen und Talsperren<br>Wassermengenmodelle von Flußgebieten | Entwurf von optimalen Bewirtschaftungsstrategien |
| Biotechnologie   | Modelle der kontinuierlichen Fermentation                                             | Auslegung und Steuerung von Fermentern           |
| Medizin          | Blutglukosemodelle des Menschen<br>Herz-Kreislauf-Modelle des Menschen                | Entwurf von Diagnose- und Steuerstrategien       |

Um dem Leser einen Einblick in unterschiedliche Bereiche der praktischen Anwendung zu geben, wird in diesem Buch nicht der Versuch unternommen, die Vielfalt der bereits national und international realisierten Einsatzfälle darzustellen, sondern es werden ausgewählte Objekte kurz vorgestellt, an denen der Autor in den letzten Jahren selbst mitgearbeitet hat. Ausgewählt wurden die in Tafel 1.1 angegebenen Praxisobjekte.

### 1.2.1. Modelle zur Steuerung der Fertigung hochintelligierter Schaltkreise im Zyklus I

Für eine Fertigungszelle in der Mikroelektronik für hochintegrierte Schaltkreise, deren Struktur im Bild 1.9 dargestellt ist, wurde gemeinsam mit dem VEB Mikroelektronik „Karl Marx“, Erfurt, zur Lösung der Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Planungsaufgaben aller Mengen- und Qualitätsparameter das rechnergestützte Prozeßführungssystem PROFIS entworfen und realisiert [1.6, 1.7].

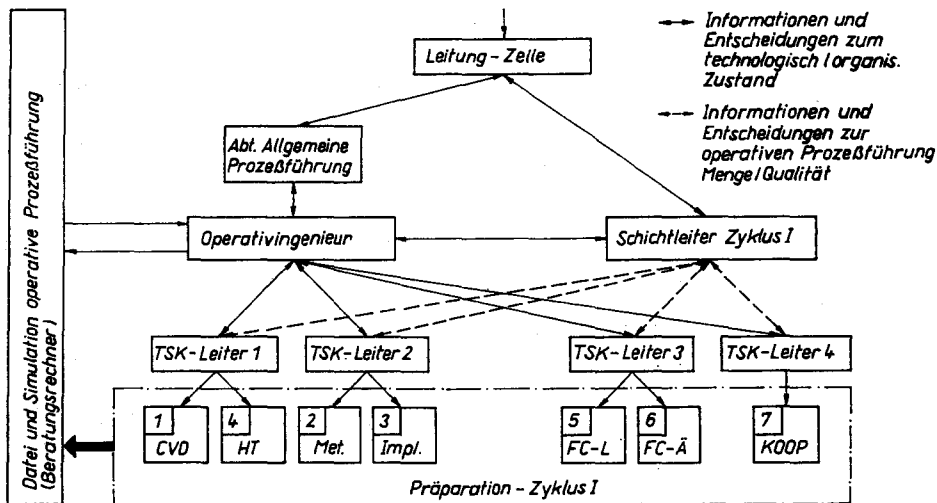


Bild 1.9. Struktur einer Fertigungszelle der Mikroelektronik  
CVD CVD-Prozesse; Met. Metallisierung; Impl. Implantation; HT Hochtemperaturprozesse;  
FC-L Fotochemie/Lack; FC-Ä Fotochemie/Ätzen; KOOP Kooperation

Die Struktur dieses Prozeßführungssystems ist mit seinen Elementen

- PROFIS-KOMPAKT 2 (Datenbank)
- PROFIS-DATAN (Datenanalyse)
- PROFIS-KOMPAK (Komplexanalyse)
- PROFIS-TEPRO (technologieorientierte Prozeßsimulation)
- PROFIS-DURST (Durchlaufsteuerung)
- PROFIS-EXPERT (Dialogführung der Beratungs-/Expertensysteme)

im Bild 1.10 dargestellt. Für die Ableitung von Entscheidungsvorschlägen bzw. Steuermaßnahmen in den einzelnen Ebenen des hierarchisch strukturierten Prozesses wurden fünf verschiedene Modelltypen entsprechend Bild 1.11 entwickelt. Charakteristisch ist, daß die Präzision der Modelle mit höherer Ebene abnimmt. Die Beschreibungen gehen

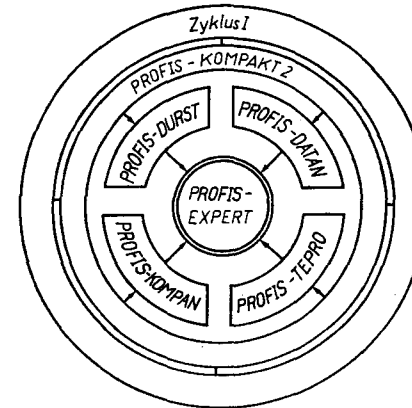


Bild 1.10  
Struktur des Prozeßführungssystems  
PROFIS

| Ebene                     | Modell                                            | Struktur                 |
|---------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------|
| Bereich                   | Modell des Bereiches                              | $u^*$ → Bereich → $x^*$  |
| F - Zelle                 | Modell der F - Zelle (Koppelstrukturmodell)       | TSK1 → TSK2              |
| Teilschritt-komplex (TSK) | Teilschrittkomplexmodelle (Koppelstrukturmodelle) | TS1 → TS2                |
| Teilschritt (TS)          | Teilschrittmodelle                                | La1 → TS → R → n → La2   |
| Anlage (Anl.)             | Anlagenmodelle techn.- physikal. Modelle          | $u(t)$ → Anlage → $x(t)$ |

Bild 1.11. Modellebenen der Fertigungszelle

von Modellen mit verteilten Parametern zu Anlagenmodellen mit konzentrierten Parametern bis zu strukturellen Modellen des Fertigungsprozesses über. Das Grobmodell der höchsten Ebene beschreibt nur noch das Verhalten von eingesteuerter Chipfläche zur angesteuerten Gutchipfläche, d.h. die Ausbeute. Ein typisches Problem der Erstellung eines Anlagenmodells ist in den Bildern 1.12 und 1.13 für eine Oxydations-/Diffusionsanlage dargestellt.

Neben Methoden zur Diagnose und Überwachung wichtiger Qualitätsparameter der Fertigung (z.B. Eindringtiefe, Konzentrationen) wurden Schätzverfahren für das statische Systemverhalten angewendet, um ein Modell für die Steuerung der Diffusion bzw. Oxydation aus den im Bild 1.12 dargestellten gemessenen Größen zu ermitteln.

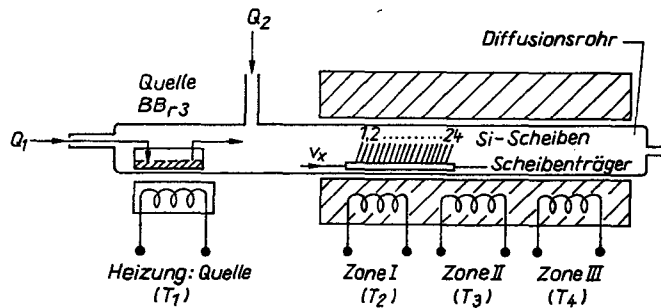


Bild 1.12  
Schema einer  
Oxydations-/Diffusions-  
anlage (Bezeichnungen  
s. Bild 1.13)

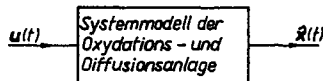


Bild 1.13  
Modell einer Oxydations-/Diffusionsanlage

- |                                                                         |                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $u_1(t)$ Sauerstoffstrom $Q_1, \text{l} \cdot \text{h}^{-1}$            | $u_6(t)$ Zeit, min                                                                                                |
| $u_2(t)$ Stickstoffstrom $Q_2, \text{l} \cdot \text{h}^{-1}$            | $u_9(t)$ Gasfeuchte, ppm                                                                                          |
| $u_3(t)$ Chargiergeschwindigkeit $v_x, \text{cm} \cdot \text{min}^{-1}$ | $x_1(t)$ bis $x_5(t)$ Borkonzentration in Si in einer Tiefe von 0,1 bis 0,9 $\mu\text{m}, \dots / \text{cm}^{-3}$ |
| $u_4(t)$ Temperatur Quelle $T_1, ^\circ\text{C}$                        | $x_6(t)$ Oberflächenkonzentration, $\dots / \text{cm}^{-3}$                                                       |
| $u_5(t)$ Zonentemperatur $T_2, ^\circ\text{C}$                          | $x_7(t)$ Oberflächenwiderstand, $\Omega$                                                                          |
| $u_6(t)$ Zonentemperatur $T_3, ^\circ\text{C}$                          | $x_8(t)$ Eindringtiefe, $\mu\text{m}$                                                                             |
| $u_7(t)$ Zonentemperatur $T_4, ^\circ\text{C}$                          |                                                                                                                   |

## 1.2.2. Innentemperaturmodell zur Steuerung von Gewächshäusern

Die effektive Verwendung von Heizungsenergie bei den zu den Großverbrauchern zählenden Gewächshausanlagen ist eine vorrangige Aufgabe in der Landwirtschaft. Neben der Ermittlung von Klimabedingungen, Ernährungszuständen usw., die zu maximalen Erträgen führen [1.8], ist der Entwurf von Steuerstrategien zur Einhaltung dieser vorgegebenen Führungsgrößen notwendig. Für eine der wesentlichsten Einflußgrößen auf die Ertragsbildung, die Innentemperatur des Gewächshauses, wurde deshalb in enger Zusammenarbeit mit dem Institut für Gemüseproduktion Großbeeren der Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR ein Innentemperaturmodell für das Gewächshaus G300 entwickelt und erprobt [1.9, 1.10, 1.11]. Das Gewächshaus vom Typ G300 (Bild 1.14) ist ein vierschiffiger plastbedeckter Typenbau mit einer Anbaufläche von 3740 m<sup>2</sup>. Als Heizungssysteme stehen die Stehwandheizung und 18 Heizlüfter, die für Heizwasser mit einer Vorlauftemperatur von 120 °C ausgelegt sind, zur Verfügung.

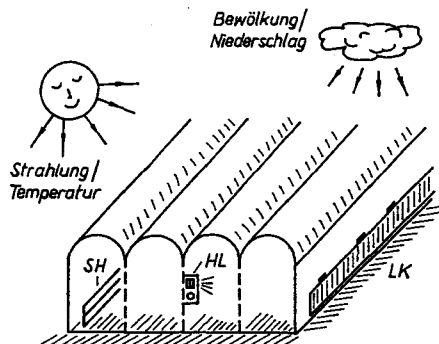


Bild 1.14  
Schema des Gewächshauses vom Typ G300  
SH Stehwandheizung  
HL Heizlüfter  
LK Lüftungsklappen

Die Lüftungsklappen können zur Absenkung der Innentemperatur benutzt werden. Auf der Grundlage einer theoretischen Prozeßanalyse setzt sich das Innentemperaturmodell aus den Signalmodellen für die Außenklimagrößen (Außentemperatur, Globalstrahlung) und den Merkmalen der Heizungssysteme zusammen (Bild 1.15). Bei dessen Ermittlung kamen u.a. Methoden der Signalidentifikation, der Parameterschätzung dynamischer Systeme und der Versuchsplanung zum Einsatz. Das erstellte Modell wurde mit Erfolg in einer mikrorechnergestützten Steuerung, die auf einer Innentemperaturvorhersage beruht, eingesetzt [1.11].

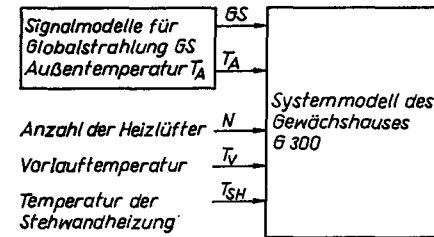


Bild 1.15  
Struktur des Innentemperatur-  
modells des Gewächshauses G300  
 $u_1(t)$  Globalstrahlung,  $\text{cal} \cdot \text{cm}^{-2}$   
 $u_2(t)$  Außentemperatur,  $^\circ\text{C}$   
 $u_3(t)$  Anzahl der Heizlüfter  
 $u_4(t)$  Vorlauftemperatur,  $^\circ\text{C}$   
 $u_5(t)$  Temperatur der Stehwand-  
heizung,  $^\circ\text{C}$   
 $x(t)$  Gewächshausinnentemperatur,  $^\circ\text{C}$

## 1.2.3. Modelle des Sauerstoffgehalts limnischer Ökosysteme

In den letzten Jahren haben Methoden der Identifikation zur mathematischen Modellierung limnischer Ökosysteme verstärkt Anwendung gefunden [1.12, 1.13].

Auf der Grundlage der erstellten Signal- und/oder Systemmodelle werden die funktionellen und strukturellen Beziehungen zwischen den Größen des Prozesses aufgeklärt. Gleichzeitig dienen die Modelle zur Ableitung von Steuermaßnahmen bei vorgegebenen Situationen.

Die Lösung dieser Aufgabe ist für die DDR von besonderer Bedeutung, weil der Grad der Nutzung des Wasserdargebots schon sehr hoch ist (etwa 80%). Zudem haben sich die Belastungen der Gewässer durch die Einleitungen aus dem kommunalen, dem industriellen und dem landwirtschaftlichen Bereich erhöht.

Für eines der wichtigsten Merkmale für die Wasserbeschaffenheit und für den Erholungswert von Gewässern, die „Sauerstoffbilanz“, wurden gemeinsam mit der Oberflußmeisterei Berlin und der TU Dresden, Sektion Wasserwesen, für unterschiedliche Gewässer Signal- und/oder Systemmodelle erstellt [1.14, 1.15, 1.16].

### Modelle des Sauerstoffhaushalts der Spree im Stadtgebiet der Hauptstadt der DDR, Berlin

Die Spree im Raum von Berlin (Bild 1.16) besitzt im Vergleich zu anderen europäischen Flüssen folgende Besonderheiten:

- geringe Fließgeschwindigkeit ( $\leq 0,07 \text{ m/s}$ )
- Stauhaltungen im Flußgebiet
- hohe Nährstoffbelastung.

Außerdem bestehen in diesem Gebiet sehr enge Beziehungen zwischen der Nutzung des Grund- und Oberflächenwassers, der Einleitung von Kühl- und Abwasser, der fischereilichen Nutzung und der Nutzung als Erholungsgebiet. Im Rahmen der Arbeiten wurden für die im Bild 1.16 angegebenen Zielpiegel sowohl Signal- als auch Systemmodelle für die in den Bildern 1.17 und 1.18 angegebenen Eingangs- und Ausgangsgrößen erstellt.

Sie dienen einerseits zur aktuellen Überwachung des Sauerstoffgehalts der Spree.

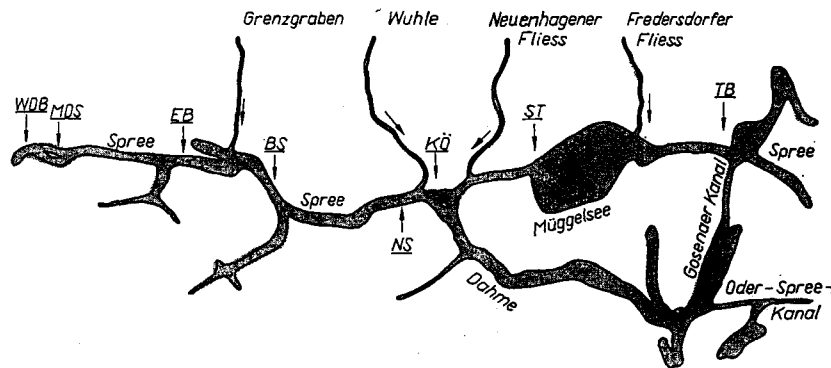


Bild 1.16. Verlauf der Spree im Gebiet Berlin und verwendete Gütepegel

TB Triglawbrücke; ST Spreetunnel; KÖ Köpenick; NS Nixenstraße; BS Baumschulenweg; EB Eisenbrücke; MDS Mühlendamm Schleuse; WDB Weidendammbrücke

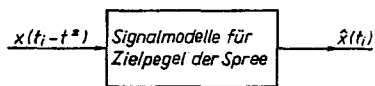


Bild 1.17

Signalmodelle für Zielpegel der Spree

$x(t_i)$  Sauerstoffgehalt zum Zeitpunkt  $t_i$ , mg/l  
 $x(t_i - t^*)$  Sauerstoffgehalt zum Zeitpunkt  $t_i - t^*$ , mg/l

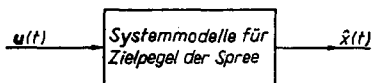


Bild 1.18

Systemmodelle für Zielpegel der Spree

$u_1(t)$  Wassertemperatur, °C  
 $u_2(t)$  biologischer Sauerstoffverbrauch BSB<sub>2</sub>, mg O<sub>2</sub>/l  
 $u_3(t)$  Durchfluß, m<sup>3</sup>/s  
 $u_4(t)$  Ammonium, mg/l

$u_5(t)$  chemischer Sauerstoffbedarf, mg O<sub>2</sub>/l  
 $u_6(t)$  abfiltrierbare Stoffe, mg TS/l  
 $u_7(t)$  Globalstrahlung, cal·cm<sup>-2</sup>  
 $x(t)$  Sauerstoffgehalt, mg O<sub>2</sub>/l

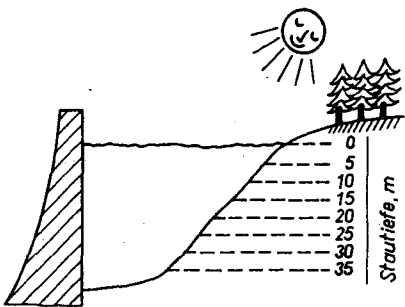


Bild 1.19. Schema des Ökosystems „Talsperre“

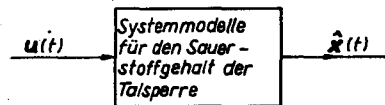


Bild 1.20. Modellkonzept für den Sauerstoffgehalt einer Talsperre

$u_1(t)$  Temperatur, °C  
 $u_2(t)$  biologischer Sauerstoffverbrauch, mg O<sub>2</sub>/l  
 $u_3(t)$  Sestonengehalt, mg TS/l  
 $u_4(t)$  Chlorophyllkonzentration, µg/l  
 $u_5(t)$  Nitratstickstoffkonzentration, mg NO<sub>3</sub>/l  
 $u_6(t)$  chemischer Sauerstoffverbrauch, mg O<sub>2</sub>/l  
 $u_7(t)$  Orthophosphatkonzentration, µg PO<sub>4</sub>/l  
 $u_8(t)$  Sichttiefe, m  
 $x_1(t)$  bis  $x_8(t)$  Sauerstoffgehalt in den Tiefen 0 m, 5 bis 35 m in mg O<sub>2</sub>/l

Andererseits werden auf ihrer Grundlage die Bedingungen ermittelt, bei denen der Sauerstoffgehalt der Spree im Stadtgebiet der Hauptstadt der DDR unter Berücksichtigung der Einleitungen von Kläranlagen sowie von Entnahmen durch industrielle und kommunale Nutzer nicht unter 4 mg O<sub>2</sub>/l sinkt. Mit den Modellen können ferner Vorhersagen gegeben werden, wie sich die Zielgröße Sauerstoffgehalt an den Meßpegeln infolge beabsichtigter oder unbeabsichtigter Eingriffe ändern wird. Aus diesen Vorhersagen müssen die entsprechenden Entscheidungen abgeleitet werden.

#### Modelle des Sauerstoffhaushalts der Talsperre Saidenbach (DDR)

Für die im mittleren Erzgebirge gelegene Trinkwassertalsperre Saidenbach wurden für die Wassertiefen von 0 bis 35 m in Stufen von jeweils 5 m Modelle des Sauerstoffgehalts ermittelt (Bild 1.19). Die erstellten statischen zeitinvarianten und zeitvarianten Modelle dienen zur Ermittlung des aktuellen Einflusses der Eingangsgrößen auf die Rohwasserqualität (Bild 1.20). Damit kann der aktuelle Zustand des Ökosystems „Talsperre“ ermittelt und die Entwicklung der Rohwasserqualität für verschiedene bedeutsame wasserwirtschaftliche Situationen simuliert werden. Auf der Grundlage dieser Simulation sind Entscheidungen für die bewußte Gestaltung der „Umweltfaktoren“ abzuleiten.

#### 1.2.4. Modelle zur Vorhersage und Steuerung der Wassermenge im Flußgebiet der Werra (DDR)

Die Wasserbewegung in einem Flußgebiet ist ein sehr komplizierter Prozeß, und seine Beschreibung mittels mathematischer Modelle enthält viele Aspekte der Identifikation großer Systeme. Das Ziel der Entwicklung eines Gesamtmodells für das Flußgebiet der

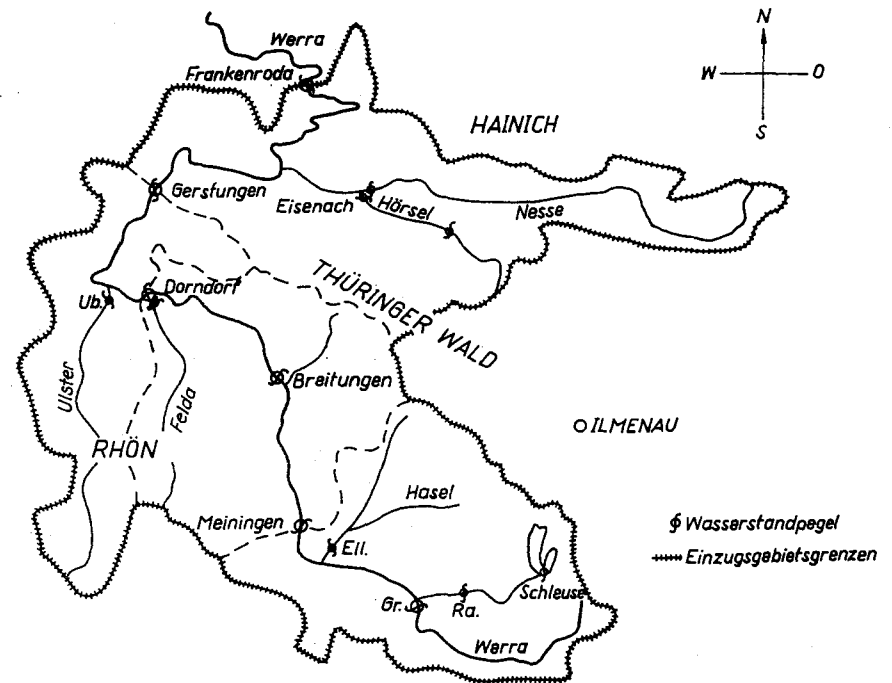


Bild 1.21. Schema des Flußgebietes der Werra auf dem Gebiet der DDR

Werra wurde abgeleitet aus der Aufgabenstellung der Vorhersage und/oder Steuerung der Wassermenge für ausgewählte Punkte (Pegel) des Flußgebiets. Die gemeinsam mit den Oberflußmeistereien Suhl und Erfurt und dem Meteorologischen Dienst der DDR, Sitz Weimar, durchgeführten Arbeiten haben durch die rechtzeitige Warnung und Ableitung von Schutzmaßnahmen eine große gesellschaftspolitische und ökonomische Bedeutung. Das Gesamtmodell der Werra ist ein wesentlicher Bestandteil des Beratungssystems WERRA, das der Entscheidungsfindung der Oberflußmeistereien dient [1.17, 1.18, 1.19].

Das Modell wurde für das im Bild 1.21 dargestellte Einzugsgebiet entwickelt. Es enthält folgende Merkmale:

- Länge des Flusses 190 km
- Einzugsgebietsfläche 4215 km<sup>2</sup>
- Höhenlage etwa 200 bis 900 m über NN
- Zuflüsse: 8 Nebenflüsse.

Im Hochwasserfall wird der Abfluß wesentlich bestimmt durch den Oberflächenabfluß, der wiederum abhängt von starken Niederschlägen, großen Schneehöhen in den Kammagen und schnellem Eindringen von Warmluftmengen in das Gebiet des Thüringer Waldes. Die erfaßten Informationen (Niederschläge, Temperaturen, Schneehöhen, Durchflüsse usw.) sind nicht für das gesamte Gebiet repräsentativ und teilweise ungenau. Dies betrifft auch die vorhergesagten Werte des Wetterdienstes. Die Aufgabe bestand nun darin, Modelle für die Wasserbewegung zu erstellen, die

1. die Unsicherheit der Information berücksichtigen
2. ausreichend genau für die Lösung der Vorhersage- und/oder Steueraufgabe und
3. für den Mikrorechnereinsatz geeignet sind.

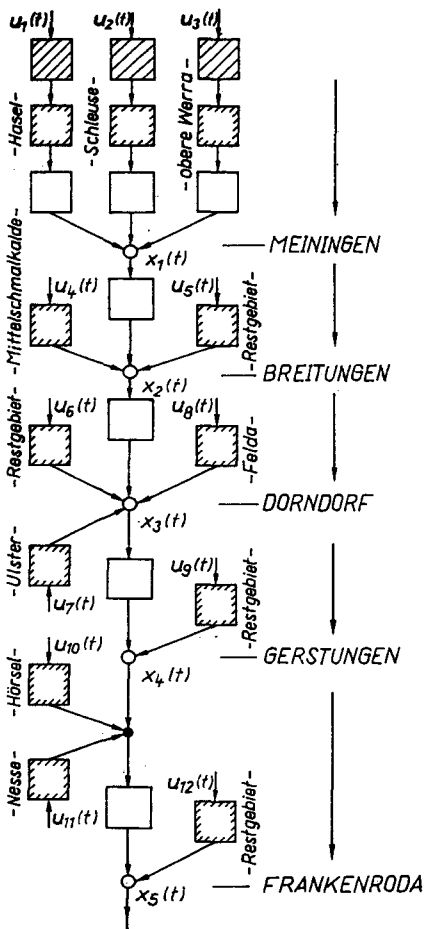


Bild 1.22

Struktur des Gesamtmodells WERRA

 $u_i(t)$  Vektor der Einflussgrößen für das  $i$ -te Teilmodell $u_1$  Niederschläge, mm · h<sup>-1</sup> $u_2$  Lufttemperatur, °C $u_3$  Schneehöhe, cm $u_4$  Schneedichte, mm · cm<sup>-1</sup> $u_5$  Globalstrahlung, cal · cm<sup>-2</sup> $u_6$  Bodenfeuchte, ppm $x_i(t)$  Durchflußmenge in den Zielpegeln des Flußgebietes, m<sup>3</sup> · s<sup>-1</sup>

[Schraffur] Schneeschmelzmodelle

[gestrichelt] Niederschlagabflußmodelle

[leer] Flußlaufmodelle

Das Gesamtmodell der Werra (Bild 1.22) besteht aus fünf Teilmodellen für die Gebiete Meiningen, Breitungen, Dorndorf, Gerstungen und Frankenroda, weil an diesen Stellen Meßpegel für den Durchfluß existieren. In den Teilmodellen sind drei Typen von Modellen entwickelt worden: Schneeschmelzmodelle, Niederschlagabflußmodelle und Flußlaufmodelle. Insgesamt besteht das Flußgebietsmodell der Werra aus 22 Einzelmodellen für die Beobachtungsintervalle von 3, 6, 12, 24 h. Die Modelle wurden aus den Beobachtungen der letzten 50 Jahre und teilweise auf der Grundlage von aktiven Experimenten mittels Methoden der Schätzung des dynamischen Systemverhaltens erstellt.

### 1.2.5. Modelle der kontinuierlichen Fermentation

Die Bedeutung biotechnologischer Verfahren in der Gesellschaft ist aufgrund ihrer Vorteile ständig gestiegen. Ein schwieriges Problem ist der Entwurf von Steuerstrategien, die die gewünschten Wachstums- und Sterbebedingungen von Mikroorganismen im Fermenter garantieren. In Zusammenarbeit mit dem VEB Jenapharm wurden deshalb Untersuchungen zur optimalen Prozeßgestaltung, besonders zur Bestimmung der Abhängigkeit des Prozeßverlaufs von Nährmedien, Temperaturen, Belüftung, Rührerdrehzahl, Durchflußrate usw., geführt [1.20, 1.21]. Untersucht wurde eine zweistufige kontinuierliche Fermentation, deren technologisches Schema im Bild 1.23 dargestellt ist.

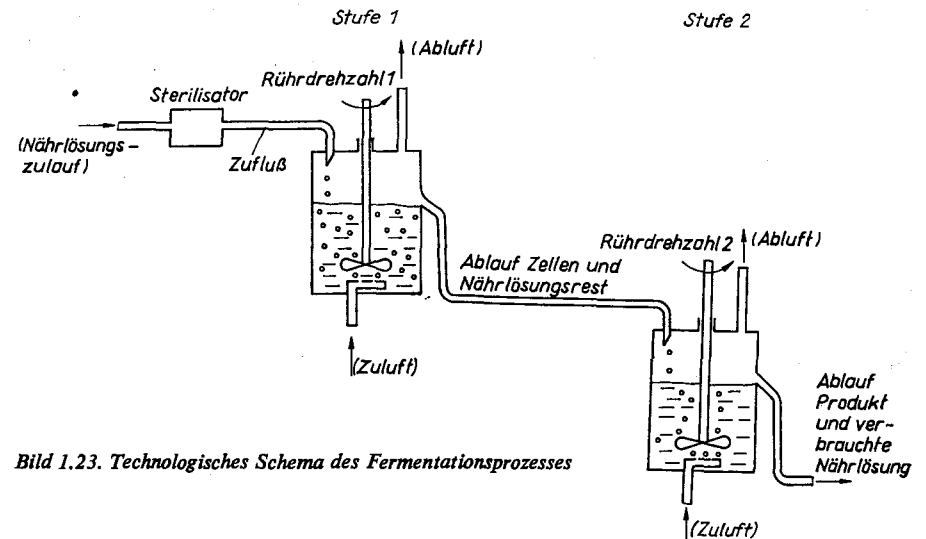
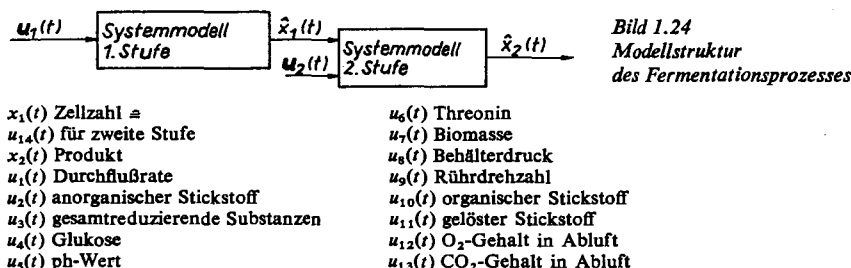


Bild 1.23. Technologisches Schema des Fermentationsprozesses

Bei diesem Typ der Fermentation sollen in der ersten Stufe unter ständiger Zugabe einer Nährlösung und Einblasen von Luftsauerstoff die Bedingungen so gesteuert werden, daß eine maximale Zahl von Zellen gebildet wird (d.h. maximales Wachstum). Ein Gemisch von Nährlösung, Zellen und Produkt (Resultat des Sterbevorgangs der Zellen) gelangt in die zweite Stufe. In dieser Stufe sind nun die Bedingungen im Fermenter so zu steuern, daß eine maximale Zahl von Zellen abstirbt, d.h., daß viel Produkt gebildet wird. Bei einer richtigen Gestaltung aller steuerbaren und konstruktiven Parameter stellt sich ein stationärer Arbeitspunkt ein.

Für die Erstellung des im Bild 1.24 dargestellten Modells der zweistufigen Fermentation wurden Methoden der Auswahl wesentlicher Einflußgrößen, der Primärdatenverarbeitung und der Parameterschätzung statischer zeitinvarianter und zeitvarianter Systemmodelle verwendet. Die Ergebnisse führten zu einer wesentlichen Reduzierung des Meß- und Steueraufwands sowie zu neuen Vorschriften bei der konstruktiven Auslegung der zweistufigen Fermentation.

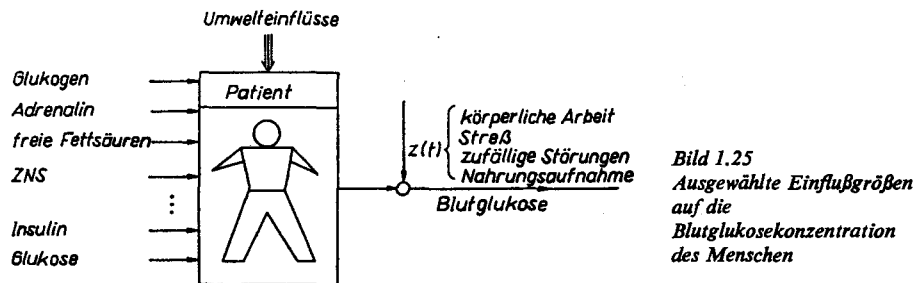


## 1.2.6. Modelle zur Lösung medizinischer Aufgaben

Gemeinsam mit verschiedenen Partnern aus dem medizinischen Bereich wurden in den letzten Jahren Methoden der experimentellen Identifikation zur Lösung von Diagnose- und Entscheidungs-/Steueraufgaben sowie zur Klärung physiologischer Grundzusammenhänge erfolgreich angewendet. Zwei typische Projekte seien hier kurz vorgestellt.

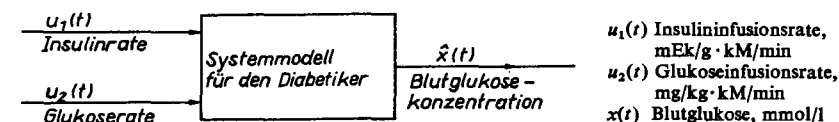
### Modelle zur Blutglukoseführung des Menschen vor, während und nach Operationen

Der Diabetes mellitus gehört zu den häufigsten chronischen Krankheiten vieler Länder (in der DDR etwa 4 % der Bevölkerung). Trotz der modernen komplexen Diabetikerbetreuung treten vielfältige kurzzeitige und langzeitige Komplikationen auf. Das Ziel der gemeinsam mit der Karl-Marx-Universität Leipzig durchgeführten Untersuchungen bestand in der Entwicklung von Wirkmodellen von Insulin und Glukose auf die Blutglukose des Menschen. Diese Modelle werden zur Ableitung von Steuervorschlägen des entworfenen Beratungs- und Steuersystems zur Blutglukoseführung GLUCON benötigt [1.22, 1.23, 1.24].



Der Zusammenhang zwischen der Blutglukose und den wesentlichen Einflußgrößen und Störgrößen (Bild 1.25) ist sehr kompliziert und in seinem statischen und dynamischen Verhalten individuell sehr verschieden, zeitvariant und häufig stark gestört. Hinzu kommt, daß nur wenige Einflußgrößen erfaßt werden können (z.B. Insulin-, Glukose-

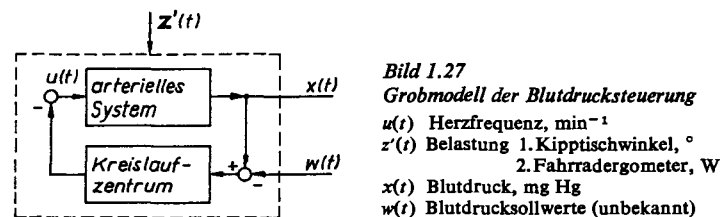
rate). Als ein ausreichender Modellansatz für die genannte Aufgabe hat sich ein einfaches zeitvariantes Modell mit der Struktur von Bild 1.26 erwiesen, das schnell an den aktuellen Zustand des Patienten über eine Änderung der statischen Wirkfaktoren von Insulin und Glukose angepaßt werden kann. In diesem Einsatzfall wurden mehrere Modelle für den Operationsablauf entwickelt und über eine zustandsabhängige Umsteuerung angewendet. Als Methoden der experimentellen Prozeßanalyse wurden Verfahren der Signalanalyse und der Parameterschätzung dynamischer Systemmodelle genutzt.



### Modelle des Herz-Kreislauf-Systems des Menschen

Aufgrund vieler Einflußfaktoren nehmen die Anzahl und die Stärke der Erkrankungen des Herz-Kreislauf-Systems des Menschen zu. Eine der wichtigsten Aufgaben auf diesem Gebiet besteht deshalb z. Z. darin, Methoden für die Abschätzung der Leistungsfähigkeit und des Steuerungsverhaltens des kardiovaskulären Systems des Menschen zu entwickeln und zu erproben. Die gemeinsam mit dem Institut für Pathophysiologie der Medizinischen Akademie Erfurt durchgeführten Untersuchungen der letzten Jahre dienen

- der Modellierung des Herz-Kreislauf-Systems zur Aufklärung physiologischer Zusammenhänge
- der Klassifikation der Patienten bezüglich verschiedener Merkmale (z.B. Alter, Geschlecht, Trainingszustand, Risikofaktoren)
- dem Entwurf zweckmäßiger Belastungstests für die Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Kreislaufsystems in der Funktions- und Leistungsdiagnostik [1.25 bis 1.30].



Um die im Bild 1.27 stark vereinfachte Struktur des Herz-Kreislauf-Systems auf experimentellem Wege zu identifizieren, wurde eine Reihe von Belastungstests ( $z'(t)$ ) auf der Grundlage der optimalen Versuchsplanung entworfen und angewendet. Als Belastungsformen wurden verwendet

1. die passive Orthostase (Kipptischversuche)
2. der Ergometertest.

Aus den Analysen der Belastungstests wurden Modelle für das statische und dynamische Verhalten der wichtigsten Zusammenhänge

- Belastung – Herzfrequenz
- Belastung – Blutdruck

entsprechend der Struktur im Bild 1.28 ermittelt. Ihre Parameter und/oder Struktur gestatten bei Kenntnis des Zustands des Patienten eine spätere Verwendung zur Klassifi-

kation und zur Beurteilung neuer Patienten bzw. des gleichen Patienten zu einem späteren Zeitpunkt. Als Modelle wurden lineare und nichtlineare parametrische (Differenzengleichungen) und nichtparametrische (Volterra-Reihen) Beschreibungen verwendet.

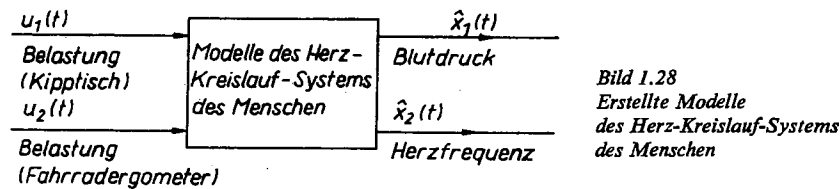


Bild 1.28  
Erstellte Modelle  
des Herz-Kreislauf-Systems  
des Menschen

### 1.2.7. Schlußfolgerungen

Bereits die hier angeführten wenigen Anwendungsbeispiele machen dem Leser klar, daß

- eine große Vielfalt von Modellformen und Methoden zu ihrer Bestimmung vorliegen und auch erforderlich sind
- eine rechnergestützte Arbeit unbedingt erforderlich ist
- Praxisfälle nur in Verbindung und mit Unterstützung des jeweiligen Prozeßspezialisten gelöst werden können.

Deshalb soll dieses Buch ausgewählte Modelle und Methoden ihrer Ermittlung vorstellen, die sich praktisch bewährt haben. Gleichzeitig sollen dem Anwender Richtlinien für ihren effektiven Einsatz gegeben werden.

## 1.3. Gesamtkonzeption der experimentellen Prozeßanalyse

Im Rahmen dieses Buches werden Methoden und Strategien vorgestellt, die auf der Basis der gemessenen Eingangs- und Ausgangssignale sowie von A-priori-Informationen Modelle für das Verhalten der Signale und des Systems ermitteln. Damit kann die allgemeine Aufgabenstellung entsprechend Bild 1.29 formuliert werden.

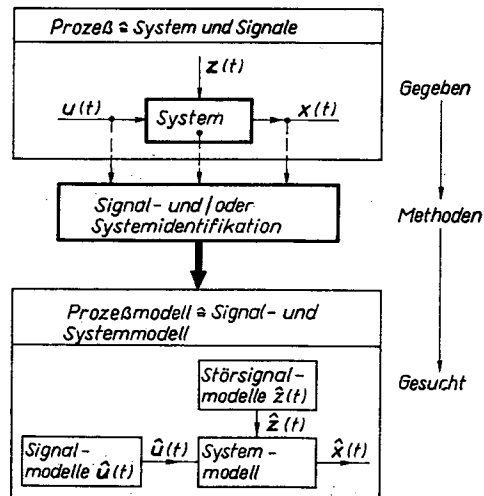


Bild 1.29  
Aufgabenstellung  
der experimentellen Prozeßanalyse

Es sind gegeben:

1. gemessene Eingangs- und Ausgangssignale  $u(t)$ ,  $x(t)$  und/oder
2. gemessene Zustände  $q(t)$  und/oder
3. A-priori-Informationen über Signale und Systeme.

Gesucht sind:

1. mathematische Zusammenhänge zwischen den Eingangs-, Ausgangs- und ggf. Zustandsgrößen – Systemmodelle – und/oder
2. mathematische Beschreibung der Signale – Signalmodelle – und
3. geeignete Methoden und Strategien zur Ermittlung der Signal- und/oder Systemmodelle.

Damit ist die Frage zu beantworten:

Welches MODELL ist auf Grundlage welcher INFORMATION (Messungen u. a.) mit welcher METHODE/STRATEGIE für welche AUFGABE (Diagnose, Überwachung, Steuerung, Vorhersage)

zu entwickeln?

Die Aufgabe der experimentellen Prozeßanalyse (-identifikation) besteht in der Bestimmung (ungestörtes System bzw. Signal) und der Schätzung (gestörtes System bzw. Signal) von *Signalmodellen* der Typen

1. Kennfunktionen für das Amplitudenverhalten (Abschn.2), z.B. Verteilung, Momente,
2. Kennfunktionen für das Zeit- und Frequenzverhalten (s. Abschn.3), z.B. Korrelationsfunktionen, Leistungsdichtespektren,
3. deterministische Beschreibung des dynamischen Signalverhaltens (s. Abschn.3.3) in der Form  

$$x(t) = f_1(t) + z(t),$$
z.B.  $f_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$
4. stochastische Beschreibung des dynamischen Signalverhaltens (s. Abschn.3.3) in der Form

$$x(t) = f_2\left(\varepsilon(t), \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \dots, \frac{dx(t)}{dt}, \dots\right),$$

z.B.

$$x(t) = b_0 \varepsilon(t) + b_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} - a_1 \frac{dx(t)}{dt};$$

$\varepsilon(t)$  (weißes Rauschen)

und/oder von *Systemmodellen* der Form

$$\hat{x}(t) = f_4(m(t), \hat{s}). \quad (1.1)$$

Dabei wird davon ausgegangen, daß der im Bild 1.2 dargestellte allgemeine Prozeß durch das System und die auf das System wirkenden Signale beschrieben werden kann. Damit gilt für diese Prozeßbeschreibung (Ein-/Ausgangs-Beschreibung)

$$x(t) = f_3(u(t), s) + z(t). \quad (1.2)$$

Bei der Schätzung einiger Modelle werden zurückliegende Ausgangssignalwerte bzw. transformierte Signale als Pseudoeingangssignale verwendet. Damit gilt als allgemeine

## Prozeßbeschreibung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_6(\mathbf{m}(t), \mathbf{s}) + \mathbf{z}(t) \quad (1.3)$$

mit dem „Meßwertvektor“  $\mathbf{m}(t)$

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{f}_7(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)).$$

Neben der Bestimmung von Ein-/Ausgangs-Modellen ist die Ermittlung (Beobachtung) und Schätzung (Filterung) der Zustände eines Systems von großer Bedeutung für die Lösung der gestellten kybernetischen Aufgaben. Als Systembeschreibung gilt entsprechend Bild 1.30 für ein System mit 1 Eingängen und einem Ausgang:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{q}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{q}(t) + \mathbf{z}(t); \quad (1.4)$$

$\mathbf{v}(t)$  Störung des Zustands  
 $\mathbf{z}(t)$  Störung des Ausgangs.

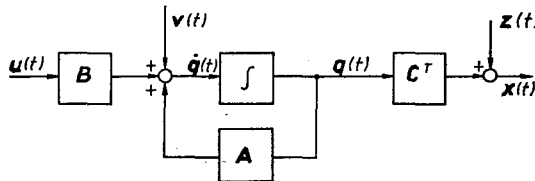


Bild 1.30  
Zustandsdarstellung  
des Prozesses

Für das Zustandsmodell gilt analog

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}(t) = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{q}}(t) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t), \quad \hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{q}}(t). \quad (1.5)$$

Die Aufgaben der Ermittlung von Modellen für das statische und dynamische Verhalten von Signalen und Systemen werden mit den Methoden der Signal- und Systemanalyse gelöst. Als Oberbegriff wird häufig die Bezeichnung Prozeßidentifikation bzw. Prozeßanalyse verwendet.

Mit Signalanalyse/-identifikation bezeichnet man die Ermittlung von Modellen und Kennfunktionen zur Beschreibung des stationären und dynamischen Verhaltens der im Prozeß auftretenden Signale (Eingangs-, Ausgangs-, Störgrößen).

Die Systemanalyse/-identifikation dient der Ermittlung von Modellen des statischen und dynamischen Verhaltens des Systems in Form von

1. *Ein-/Ausgangs-Modellen* (bilden die Beziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen ab)
2. *Zustandsmodellen* (bilden die Beziehung zwischen Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen ab).

Die Systemmodelle werden charakterisiert durch die

- *Struktur* (z.B. Art der Verkopplung von Eingangs- und Ausgangsgrößen, Polynomgrad der statischen Kennlinie, Ordnung der Differentialgleichung);
- *Parameter* (z.B. Koeffizienten der Differentialgleichung, Verstärkung, Trägheits- und Vorhaltzeitkonstanten).

Wenn die Ermittlung von Systemmodellen bei a priori bekannter oder angenommener Struktur erfolgt, spricht man von einer *Parameteridentifikation*.

Die Ermittlung des Zustands bei gegebenem Zustandsmodell entsprechend Gl. (1.4) wird als *Zustandsidentifikation* bezeichnet. Ist die Aufgabe für ungestörte Systeme zu lösen, bezeichnet man häufig die entworfenen Algorithmen zur Zustandsidentifikation

mit *Beobachter*. Müssen die Zustände eines gestörten Systems ermittelt werden, wird diese Aufgabe gewöhnlich *Zustandsschätzung/-filterung* genannt.

Die Lösung der Aufgaben der Signal- und Systemidentifikation ist auf den zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen

1. der theoretischen Prozeßanalyse
  2. der experimentellen Prozeßanalyse
- möglich.

Bei den Methoden der *theoretischen Prozeßanalyse* erfolgt die Beschreibung der im Prozeß (Signal und System) ablaufenden physikalischen, chemischen, biologischen, ökonomischen und anderen Elementarprozesse auf der Grundlage bekannter Gesetzmäßigkeiten. In vielen Prozessen ergeben sich die mathematischen Modelle aus der Lösung von Bilanzgleichungen aus den Erhaltungssätzen (z.B. für Masse, Energie und Impuls). Damit wird bei der *theoretischen Signalanalyse* das statische und/oder das dynamische Verhalten der im Prozeß auftretenden Signale durch bekannte Gesetzmäßigkeiten beschrieben. Bei der *theoretischen Systemanalyse* wird das statische und/oder das dynamische Verhalten des Systems durch Ein-/Ausgangs-Modelle oder Zustandsmodelle durch bekannte Gesetzmäßigkeiten beschrieben.

Die *experimentelle Prozeßanalyse* dient dem Ziel der Erstellung von Signal- und Systemmodellen des statischen und dynamischen Verhaltens von Signalen – *experimentelle Signalanalyse* – und/oder von Systemen – *experimentelle Systemanalyse* – auf der Grundlage der gemessenen Signale des Prozesses.

Die theoretische und die experimentelle Prozeßanalyse ergänzen sich in ihren Vor- und Nachteilen, und ihre gemeinsame Anwendung ist immer sinnvoll. In Tafel 1.2 sind einige ausgewählte Eigenschaften beider Wege aufgezeigt. Die Wahl der Methode hängt wesentlich von der Aufgabenstellung ab. Für die Aufgaben der rechnergestützten Diagnose, Überwachung, Steuerung und Vorhersage hat sich die Festlegung wesentlicher Einflußgrößen (Stufe 2 im Bild 1.31) und die Ermittlung der Koppel- und/oder Teilstruktur des

Tafel 1.2. Ausgewählte Eigenschaften der theoretischen und experimentellen Prozeßanalyse

| Theoretisch                                                                                              | Experimentell                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| – Zustandsmodelle mit innerer Struktur des realen Prozesses                                              | – Ein-/Ausgangs-Modelle und Signalmodelle vorwiegend ohne Struktur des realen Prozesses                |
| – Parameter der Modelle stehen in Zusammenhang mit konstruktiven, technologischen und anderen Daten      | – kein Zusammenhang zwischen den Modellparametern und konstruktiven, technologischen und anderen Daten |
| – Modellvereinfachungen entsprechend der Aufgabenstellung schwierig                                      | – Modellvereinfachung entsprechend der Aufgabenstellung einfach möglich                                |
| – Gültigkeit der Modelle in großen Bereichen und für verschiedene Prozesse                               | – Gültigkeit der Modelle im untersuchten Bereich und für den speziellen Prozeß                         |
| – Modelle häufig zu aufwendig für Lösung der Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Vorhersageaufgabe | – Modelle sehr günstig für die Lösung der Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Vorhersageaufgabe  |
| – Modell bereits in der Entwurfs-/Projektierungsphase erstellbar                                         | – Modell erst mit Existenz/Inbetriebnahme des Prozesses erstellbar                                     |
| – keine „Störung“ des Prozesses bei der Modellerstellung                                                 | – häufig „Störung“ des Prozesses erforderlich (aktives Experiment)                                     |

Systems (Stufe 3 im Bild 1.31) aufgrund einer theoretischen Prozeßanalyse bewährt. Dagegen ist die Aufgabe der Ermittlung der Modellparameter sowie möglicher erstrebter Modellvereinfachungen durch Methoden der experimentellen Prozeßanalyse effektiver zu lösen (Stufe 4 im Bild 1.31).

Als eine allgemeine Methodologie der experimentellen Prozeßanalyse hat sich das im Bild 1.31 angegebene Schema bewährt [1.31].

Ausgehend von der Ableitung der Anforderungen an die zu erstellenden Signal- und/oder Systemmodelle entsprechend der zu lösenden Diagnose-, Überwachungs-, Steuer- und Vorhersageaufgabe ist die Bearbeitung der Teilaufgaben in der im Bild 1.31 angegebenen Reihenfolge zweckmäßig. Dabei muß davon ausgegangen werden, daß bei komplizierten Prozessen einzelne oder alle Stufen mehrfach bearbeitet werden müssen. Die Signal- und/oder Systemmodelle werden in diesen Fällen iterativ dem realen Prozeß angepaßt. Ist eine für die Lösung der Aufgabenstellung ausreichende Modellgüte erreicht, wird diese Iterationsprozedur beendet.

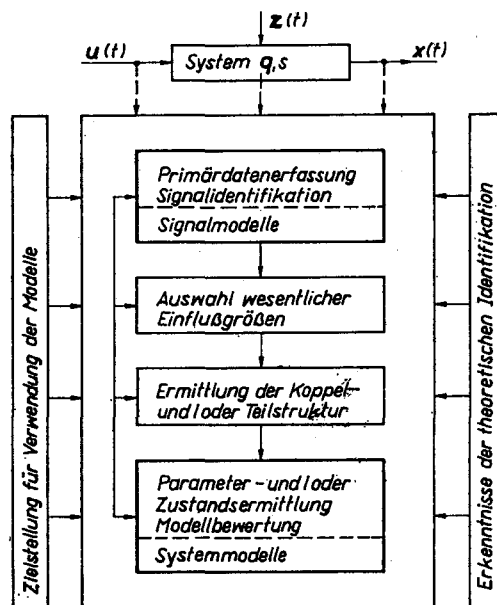


Bild 1.31  
Strategie der experimentellen  
Prozeßanalyse

In der ersten Stufe – Primärdatenerfassung und Signalidentifikation – werden die vom Prozeß vorliegenden Meßdaten zuerst gesichert, zugeordnet, aufbereitet und transformiert. Danach können Kennwerte und Signalmodelle für das stationäre und dynamische Verhalten der Signale berechnet werden. Einige Aufgaben dieser Stufe sind in Tafel 1.3 dargestellt.

Die Aufgaben dieser Stufe bilden in der Praxis oft den aufwendigsten Teil, und sie erfordern die Zusammenarbeit verschiedener Fachdisziplinen. Die Vorstellung von Methoden und Strategien dieser Stufen bilden den ersten Schwerpunkt dieser Abhandlung.

Die zweite Stufe – Auswahl wesentlicher Einflußgrößen – gewinnt bei der Erstellung von Modellen technischer und nichttechnischer Systeme aus ökonomischen Gründen und aufgrund der Kompliziertheit der Systeme immer mehr an Bedeutung. Wichtige Methoden sind in Tafel 1.4 dargestellt.

Tafel 1.3. Ausgewählte Aufgaben der Stufe: Primärdatenerfassung und Signalidentifikation

|                                                          |                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Sicherung<br>Zuordnung<br>Aufbereitung<br>Transformation | Korrektur von Fehlmessungen<br>Filterung (Hoch-, Tief-, Bandpaß)<br>Zeit- und Maßstabstransformationen |
| Statisches<br>Verhalten                                  | Verteilungen, Lageparameter<br>Korrelationskoeffizienten<br>Faktoranalyse                              |
| Dynamisches<br>Verhalten                                 | Korrelationsfunktionen<br>Leistungsdichtespektren<br>determinierte und stochastische Signalmodelle     |

Tafel 1.4. Methoden zur Auswahl wesentlicher Einflußgrößen

| Passive Methoden          | Aktive Methoden                             |
|---------------------------|---------------------------------------------|
| Rangkorrelation           | vollständiges Faktorexperiment              |
| Korrelationskoeffizienten | Teilfaktorpläne (zufällige Balance)         |
| Faktoranalyse             | gesättigte Pläne<br>(Plackett-Burman-Pläne) |
| Varianzanalyse            |                                             |

Bei den vom Verfasser durchgeführten praktischen Untersuchungen hat sich von den passiven Methoden die Verwendung des partiellen Korrelationskoeffizienten zur Auswahl bewährt. Dies gilt besonders für die Untersuchungen im nichttechnischen Bereich (Medizin, Landwirtschaft, Wasserwirtschaft). Von den aktiven Methoden, die alle auf der Auswertung der Reaktion der Zielgröße auf Positiv/Negativ-Änderungen der Eingangsgrößen beruhen, ist die Verwendung von gesättigten Versuchsplänen in der ersten Phase vorteilhaft. Mit ihnen kann der lineare Einfluß von  $n$  Größen mit  $n + 1$  Versuchen ermittelt werden. Liegen theoretische Kenntnisse über wesentliche Einflußgrößen vor, was bei technischen Systemen überwiegend der Fall ist, werden sie natürlich als A-priori-Information in dieser Stufe mit benutzt.

In der dritten Stufe – Festlegung der Koppel- und Teilstrukturen des Systemmodells – wird mit den vorhandenen Kenntnissen aus den Stufen 1 und 2, den Kenntnissen aus der theoretischen Prozeßanalyse und der Kenntnis des späteren Verwendungszwecks des Modells die Koppel- und Teilstruktur des Modells festgelegt. In dieser Stufe ist häufig die engste Verflechtung mit der theoretischen Prozeßanalyse vorhanden.

Mit der Wahl der Koppel- und Teilstrukturen des Systemmodells geht das Identifikationsproblem in ein Parameterschätzproblem über. Wesentliche Methoden dieser vierten Stufe zur Schätzung der Parameter statischer und dynamischer Systemmodelle bilden den zweiten Schwerpunkt des Buches.

Das erstellte Gesamtmodell (Signal- und Systemmodelle) muß zum Schluß der Bearbeitung einer Gütebewertung unterzogen werden. Diese sollte in zwei Stufen erfolgen:

1. Test des Modells auf der Grundlage von Gütewerten
2. Test unter den Bedingungen, in denen das System arbeitet.

Dabei ist die Erfüllung der ersten Stufe notwendig; die Entscheidung, ob sie hinreichend ist, liefert erst der zweite Test. Sind beide Tests negativ, ist entsprechend der Konzeption von Bild 1.31 in die einzelnen Vorstufen zurückzugehen. Aus ökonomischen Gründen sollte dabei in der Regel die Reihenfolge

1. Änderung der Teilstruktur
2. Hinzunahme weiterer Einflußgrößen
3. Änderung der Primärdatenerfassung

eingehalten werden. Zur effektiven Realisierung der entworfenen Strategie ist die Verwendung von Programmsystemen zur rechnergestützten Prozeßanalyse sehr vorteilhaft. Beispiele für solche Programmsysteme sind die an der TH Ilmenau entwickelten Programmpakete EXPRAN für den Rechner EC1040 in der Sprache PL1 und DIOPRAN zur dialogorientierten rechnergestützten Prozeßanalyse auf Mikrorechnern in der Sprache FORTRAN [1.32, 1.33].

#### 1.4. Verwendete Klassifikationsmerkmale der Methoden der experimentellen Prozeßanalyse

Die sehr vielfältigen Methoden und Strategien zur Erstellung von Signal- und Systemmodellen sind nach vielen Merkmalen klassifizierbar. Auf der Grundlage einer Analyse des internationalen Standes [1.34 bis 1.54], der Erfahrungen des Autors bei der Realisierung von Praxisobjekten und bei der Ausbildung von Studenten der Fachrichtung Technische Kybernetik/Automatisierungstechnik an der TH Ilmenau werden die folgenden Merkmale für die Klassifikation von Methoden der Identifikation von Prozessen, die durch konzentrierte Parameter beschrieben werden können, verwendet:

- Signal- oder Systemanalyse
- Größe der Störsignale  $z(t)$
- Systemverhalten/-beschreibung
- Art des Eingangssignals.

Weitere Klassifikationskriterien werden in den einzelnen Abschnitten dieses Buches eingeführt und erläutert.

Das gewählte Hauptmerkmal ist die Analyse und damit die Trennung der Methoden in die zur Erstellung von Signal- und die von Systemmodellen (s. Abschnitte 2, 3 und 4, 5, 6). Alle anderen Merkmale sind diesem untergeordnet worden (Tafel 1.5).

| Merkmal                               | Klassen                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Aufgabe                               | Signal-/Systemidentifikation                                                                                                                                                                                            |
| Störungsgröße                         | ungestört/gestört                                                                                                                                                                                                       |
| Prozeßeigenschaften<br>/-beschreibung | <ul style="list-style-type: none"> <li>– statisch/dynamisch</li> <li>– linear/nichtlinear</li> <li>– Ein-/Mehrgrößen-System</li> <li>– zeitinvariant/zeitvariant</li> <li>– kontinuierlich/diskontinuierlich</li> </ul> |
| Eingangssignal                        | natürliche/künstliche<br>Eingangssignale                                                                                                                                                                                |

Tafel 1.5  
Verwendete Klassifikations-  
merkmale für die Methoden  
der experimentellen  
Prozeßanalyse

Als zweites Klassifikationsmerkmal wird die Stärke der Störung durch die Einteilung der Prozesse in ungestörte ( $z(t) = 0$ ) und in gestörte Prozesse ( $z(t) \neq 0$ ) verwendet. Werden die Modelle für ungestörte Prozesse ermittelt, wird von einer *Modellbestimmung* gesprochen. Im gestörten Fall wird die Analyseaufgabe dagegen mit *Modellschätzung* bezeichnet.

Die unterschiedlichen Beschreibungen für das Prozeßverhalten und ausgewählte typische Prozeßeigenschaften bilden eine dritte Gruppe möglicher Klassifikationsmerkmale entsprechend Tafel 1.5. Sie machen gleichzeitig die in diesem Buch bewußt vorgenommene Einschränkung sichtbar.

Als viertes Klassifikationsmerkmal wird die Gestaltung der für die Identifikation eingesetzten Eingangssignale verwendet. Dabei wird zwischen der Anwendung natürlicher Eingangssignale (Methoden der passiven Versuchsplanung) und der Verwendung künstlich aufgeprägter Eingangssignale (Methoden der aktiven Versuchsplanung) unterschieden.

Diese vier Merkmale sind bewußt gegenüber anderen (z.B. Gütekriterien, Methoden zur Minimierung der Gütekriterien) bevorzugt worden, weil damit eine relativ in sich geschlossene Darstellung der sehr großen Vielfalt von entwickelten und für die Lösung der praktischen Aufgaben notwendigen Methoden der experimentellen Erstellung von Signal- und Systemmodellen möglich erscheint.

## 2. Beschreibung des Amplitudenverhaltens von Signalen

### 2.1. Zielstellung der Ermittlung von Signalmodellen

Die Aufgabe der folgenden Abschnitte besteht in der Vorstellung ausgewählter Beschreibungen für das stationäre und dynamische Verhalten von Signalen sowie in der Darlegung von Methoden zu ihrer experimentellen Ermittlung in Form von Modellen der Signale, die teilweise auch als Kennfunktionen bezeichnet werden. Dabei wird grundsätzlich davon ausgegangen, daß Werte der beobachteten Signale zur Verfügung stehen. Als Klassifikationsgesichtspunkte werden

- die Beschreibung des Amplituden-/Zeitverhaltens
- das deterministische/statistische Verhalten und
- die Beschreibung im Zeit-/Frequenzbereich

verwendet. Das Signalmodell ergibt sich somit aus einer Reihe von Teilmodellen, z. B. Verteilung  $f(x)$  für das Amplitudenverhalten, Korrelationsfunktion  $R(\tau)$  und Leistungsdichtespektrum  $S(\omega)$  für das dynamische Verhalten (Bild 2.1).

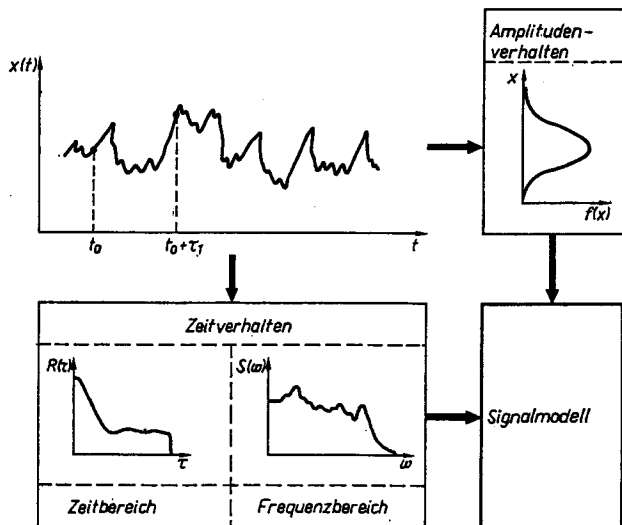


Bild 2.1  
Signalmodelle  
des Amplituden-  
und Zeitverhaltens

Die Ergebnisse der Identifikation von Signalen werden im Rahmen von Diagnose-, Überwachungs-, Steuer- und Vorhersageaufgaben genutzt für

- die Beurteilung des statischen und/oder dynamischen Verhaltens der Signale
- die Festlegung des Stichprobenumfangs (Gesamtmeßzeit) und der Abtastzeit
- die Festlegung der Gestalt des Testsignals
- die Festlegung von Maßnahmen zur Primärdatenaufbereitung

- die Wahl der Methode zur Systemidentifikation
- die Wahl und den Entwurf der Vorhersage-, Entscheidungs-, Steuerstrategie.

Der Autor strebt bei der Darstellung von Beschreibungen und Methoden der Ermittlung des Signalverhaltens bewußt keine Vollständigkeit an. Die Auswahl aus der sehr umfangreichen Literatur auf diesem Gebiet, besonders der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik und der Informationstheorie [2.1 bis 2.12], wurde aus der Anlage der Gesamtkonzeption dieses Buches getroffen. Des weiteren wird auf eine strenge mathematische Beweisführung verzichtet; sie ist in der angegebenen weiterführenden Literatur zu finden.

## 2.2. Ausgewählte Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 2.2.1. Beschreibung eindimensionaler Zufallsgrößen

#### 2.2.1.1. Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Um Aussagen über Gesetzmäßigkeiten zufälliger Ereignisse (d. h. Ereignisse, die unter gleichen Versuchsbedingungen eintreten oder nicht eintreten) machen zu können, wird versucht, den Charakter der Zufälligkeit durch die *absolute* und *relative Häufigkeit* zu quantifizieren. Ist bei  $n$  Wiederholungen eines zufälligen Versuchs ein Ereignis  $A$   $n_A$ -mal eingetreten, dann wird als

$$\bullet \text{ absolute Häufigkeit } H_A(A) = n_A \quad (2.1)$$

$$\bullet \text{ relative Häufigkeit } H_r(A) = n_A/n \quad (2.2)$$

bezeichnet. Die relative Häufigkeit hat folgende Eigenschaften:

1.  $0 \leq H_r(A) \leq 1$
2.  $H_r(A \vee B) = H_r(A) + H_r(B) - H_r(A \wedge B)$
3.  $H_r(\bar{A}) = 1 - H_r(A)$ .

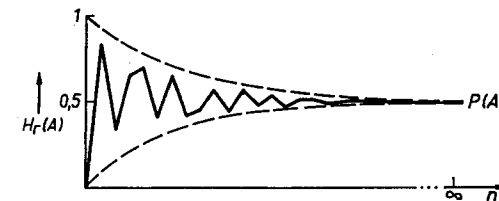


Bild 2.2  
Entwicklung der relativen Häufigkeit

Die Werte der Häufigkeiten sind stark von der Anzahl der durchgeführten Versuche/Beobachtungen abhängig (Bild 2.2). Aus diesem Grunde wurde zu dem allgemeineren Begriff der *Wahrscheinlichkeit* übergegangen. Es existieren zwei Wege zur Beschreibung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs:

Grenzwertbildung der relativen Häufigkeit

$$* P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_r(A). \quad (2.4)$$

**Axiomatische Beschreibung**

Jedes Ereignis  $A$  eines zufälligen Versuchs/Beobachtung aus der Menge  $E$  aller möglichen Ereignisse wird durch eine Zahl  $P(A)$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$ , beschrieben, die folgende Axiome erfüllt:

$$P(A) \geq 0 \quad (2.5)$$

$$P(E) = 1$$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

für  $P(A \wedge B) = 0.$

Aus den Axiomen können weitere Eigenschaften abgeleitet werden. Es gilt:

$$P(0) = 0,$$

d.h., die Wahrscheinlichkeit eines unmöglichen Ereignisses ist Null;

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

$$P(A/B) = P(A \wedge B)/P(B).$$

$P(A/B)$  ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $A$  unter der Bedingung, daß das Ereignis  $B$  bereits eingetreten ist.

$P(A \wedge B) = P(A)P(B)$  für unabhängige Ereignisse  $A$  und  $B$ .

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(A/B_i) P(B_i); \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Formel für die totale Wahrscheinlichkeit;

$$P(A_i/B) = P(B/A_i) P(A_i) / \sum_{k=1}^m P(B/A_k) P(A_k), \quad \text{Bayessche Formel.}$$

**2.2.1.2. Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen**

Wird jedem Versuchsergebnis eine reelle Zahl zugeordnet, wird also das zufällige Ereignis auf die Menge der reellen Zahlen abgebildet, erhält man eine statistische Variable, die *Zufallsgröße*. Die Zufallsgröße beschreibt damit jedes zufällige Ereignis aus der Menge der möglichen Ereignisse durch eine reelle Zahl bzw. durch ein Intervall reeller Zahlen.

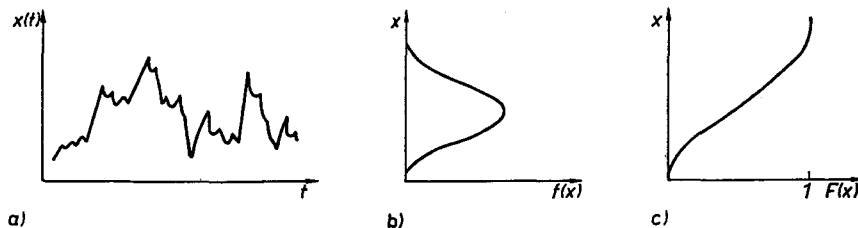


Bild 2.3. Beschreibungen einer stetigen Zufallsgröße

a) Zufallsgröße; b) Verteilungsdichte; c) Verteilungsfunktion

Eine Zufallsgröße  $X$  wird als *stetige Zufallsgröße* bezeichnet, wenn sie in einem endlichen Intervall  $a, b$  unendlich viele  $x_i$  annehmen kann (Bild 2.3 a). Dagegen nimmt eine *diskrete Zufallsgröße* in einem Intervall  $a, b$  eine endliche oder höchstens abzählbar unendliche Menge von Werten  $x_i$  an (Bild 2.4 a). Von Interesse ist nun, wie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einzelnen Werte der Zufallsgröße über ihren Wertebereich verteilt ist. Diese Information ist in der *Wahrscheinlichkeitsverteilung* – Verteilungsdichtefunktion  $f(x)$ , Verteilungsfunktion  $F(x)$  – enthalten.

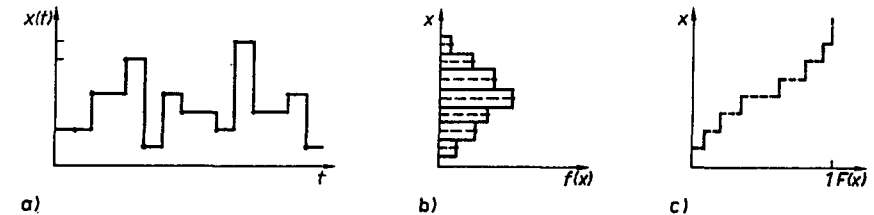


Bild 2.4. Beschreibungen einer diskreten Zufallsgröße

a) Zufallsgröße; b) Verteilung; c) Verteilungsfunktion

Die *diskrete Verteilungsdichtefunktion*  $f(x)$  für eine diskrete Zufallsgröße – im folgenden mit *Verteilung* bezeichnet – ergibt sich durch die Darstellung aller Einzelwahrscheinlichkeiten  $p_i = P(X = x_i)$  mit  $i = 1, 2, \dots$  über  $x$  (Bild 2.4 b). Aus der diskreten Verteilung kann die *diskrete Verteilungsfunktion*  $F(x)$  eindeutig nach der Vorschrift

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \quad (2.6)$$

bestimmt werden. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der diskreten Zufallsgröße im Bereich  $-\infty, x$  an. Ihre Eigenschaften sind u. a.

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$
2.  $F(-\infty) = 0; \quad F(+\infty) = 1$
3.  $F(x)$  monoton, nichtfallend.

Die Verteilung einer stetigen Zufallsgröße ist als Verteilungsdichte auf der Basis der stetigen Verteilungsfunktion

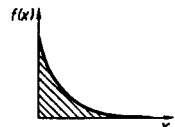
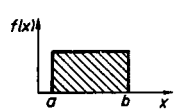
$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz \quad (2.7)$$

zu ermitteln, da die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Wertes null ist. Mit Gl. (2.7) gilt für die *stetige Verteilungsdichte*

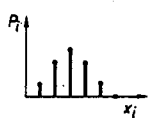
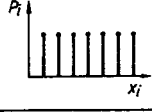
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2.8)$$

mit  $f(x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 1.$

Tafel 2.1. Ausgewählte stetige Verteilungen

| Verteilung                      | Gestalt                                                                           | Parameter                                 | Verteilungsgesetz                                                                                    |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Normalverteilung                |  | $-\infty < \mu < +\infty$<br>$\sigma > 0$ | $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$<br>$(-\infty < x < +\infty)$          |
| Exponentialverteilung           |  | $\lambda > 0$                             | $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |
| Gleichmäßige stetige Verteilung |  | $a, b$<br>$a < b$                         | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$   |

Tafel 2.2. Ausgewählte diskrete Verteilungen

| Verteilung                       | Gestalt                                                                             | Parameter                        | Verteilungsgesetz                                                        |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Binomialverteilung               |    | $n = 1, 2, \dots$<br>$0 < p < 1$ | $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$<br>$(k = 0, 1, 2, \dots)$      |
| Poissonverteilung                |   | $\lambda > 0$                    | $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$<br>$(k = 0, 1, 2, \dots)$ |
| Gleichmäßige diskrete Verteilung |  | $n = 1, 2, 3, \dots$             | $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$<br>$(i = 1, 2, \dots, n)$                     |

In den Tafeln 2.1 und 2.2 sind ausgewählte typische stetige und diskrete Verteilungen dargestellt.

### 2.2.1.3. Kenngrößen der Verteilung von Zufallsgrößen

Die Verteilung und die Verteilungsfunktion beschreiben das Amplitudenverhalten von Zufallsgrößen vollständig. Die Verteilungsgesetze enthalten einige Parameter, die bereits das gesuchte Verhalten der Zufallsgröße und die Gestalt/Lage der Verteilung beschreiben. Diese Kenngrößen sind *Momente* und aus den Momenten abgeleitete Größen.

Als *normales Moment*  $k$ -ter Ordnung wird der Ausdruck

$$\alpha_k = E\{X^k\} \quad (2.9)$$

mit  $k = 1, 2, \dots$  und  $E\{\dots\}$  = Erwartungswert  $\{\dots\}$  bezeichnet. Die Ermittlung für stetige bzw. diskrete Zufallsgrößen erfolgt entsprechend Gl. (2.10):

$$\alpha_k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, & \text{falls } X \text{ diskret.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Wichtige normale Momente sind

– das erste normale Moment/Erwartungswert  $\mu$

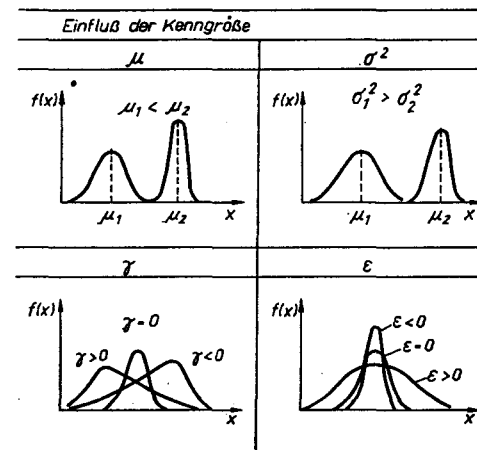
$$\alpha_1 = \mu = E\{X\} \quad (2.11)$$

*Deutung:* Schwerpunkt der Verteilung;

– das zweite normale Moment

$$\alpha_2 = E\{X^2\} \quad (2.12)$$

*Deutung:* Varianz der Zufallsgröße, bezogen auf den Nullpunkt (Tafel 2.3).



Tafel 2.3  
Einfluß der Momente auf die Gestalt der stetigen Verteilung

Das *zentrale Moment*  $k$ -ter Ordnung wird nach der Vorschrift

$$m_k = E\{(X - \mu)^k\} \quad \text{mit } k = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

ermittelt. Wesentliche zentrale Momente bzw. abgeleitete Kenngrößen sind

– das zweite zentrale Moment/Varianz  $\sigma_x^2$

$$m_2 = \sigma_x^2 = E\{(X - \mu)^2\} \quad (2.14)$$

*Deutung:* Varianz um den Erwartungswert der Zufallsgröße (s. Tafel 2.3).

Die positive Wurzel der Varianz wird als Standardabweichung  $\sigma_x$  bezeichnet.

– das dritte zentrale Moment/Schiefe  $\gamma$

$$\gamma = \frac{m_3}{\sigma^3} \quad \text{mit} \quad m_3 = E\{(X - \mu)^3\} \quad (2.15)$$

Deutung: Charakterisierung der Symmetrie der Verteilung (s. Tafel 2.3);

– das vierte zentrale Moment/Exzeß  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 \quad \text{mit} \quad m_4 = E\{(X - \mu)^4\} \quad (2.16)$$

Deutung: Maß für die Abweichung der Verteilung von der Normalverteilung in der Umgebung von  $\mu$  (bei einer Normalverteilung ist  $\varepsilon = 0$ ; s. Tafel 2.3).

## 2.2.2. Beschreibung mehrdimensionaler Zufallsgrößen

### 2.2.2.1. Mehrdimensionale Zufallsgrößen und ihre Verteilungen

In der Realität muß häufig der Einfluß von  $m$  Zufallsgrößen, die gleichzeitig das Objekt beeinflussen, untersucht werden (s. Darstellungen im Abschn. 1.2).

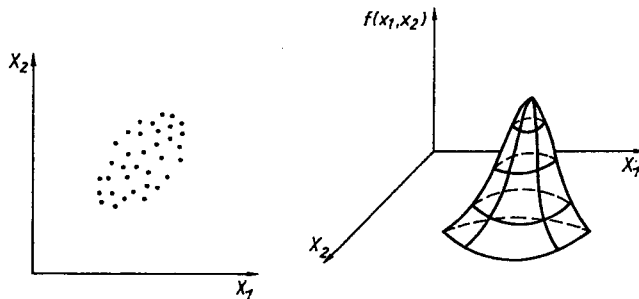


Bild 2.5  
Zweidimensionale  
stetige Verteilung

Die  $m$ -dimensionale Zufallsgröße bzw. der Zufallsvektor ergibt sich aus den Werten von  $m$  gleichzeitig auftretenden Zufallsgrößen ( $X_1, \dots, X_m$ ) in einem  $m$ -dimensionalen euklidischen Raum. Die entsprechenden Verteilungen werden als  $m$ -dimensionale Verteilung bezeichnet. Wie im eindimensionalen Fall wird zwischen stetigen und diskreten Zufallsgrößen unterschieden. Im Rahmen dieses Buches werden nur zweidimensionale Zufallsgrößen (Bild 2.5) betrachtet, da die für sie geltenden Beziehungen leicht auf  $m$ -dimensionale Zufallsgrößen übertragen werden können.

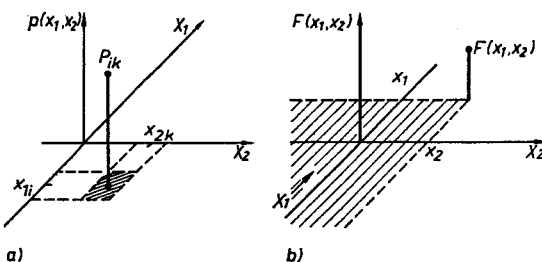


Bild 2.6  
Kenngröße:  
Verbundwahrscheinlichkeit a)  
und Verteilungsfunktion b)  
einer zweidimensionalen  
diskreten Zufallsgröße

Werden die Wertepaare  $x_{1i}, x_{2k}$  mit  $i, k = 1, 2, \dots$  einer zweidimensionalen diskreten Zufallsgröße ( $X_1, X_2$ ) und die entsprechenden Verbundwahrscheinlichkeiten

$$P(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2k}) = p_{ik} \quad (2.17)$$

ermittelt (Bild 2.6a), so hat die Verteilungstabelle, die diskrete zweidimensionale Verteilung, die in Tafel 2.4 angegebene Form.

Die diskrete zweidimensionale Verteilungsfunktion lautet entsprechend Gl. (2.17):

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \sum_i \sum_k p_{ik} \quad (2.18)$$

mit  $i = 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, l$  (Bild 2.6b).

Aus der Verteilungstabelle können mittels Gl. (2.19) die Verteilungen der einzelnen Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$ , die diskreten Randverteilungen, berechnet werden (Tafel 2.4).

|                      |          |          |          |
|----------------------|----------|----------|----------|
| $X_1 \backslash X_2$ | $x_{21}$ | $\dots$  | $x_{2l}$ |
| $x_{11}$             | $p_{11}$ | $\dots$  | $p_{1l}$ |
| $\vdots$             | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $x_{1r}$             | $p_{r1}$ | $\dots$  | $p_{rl}$ |

Tafel 2.4  
Verteilungstabelle und Rand-  
verteilung für die diskrete  
Zufallsgröße  $X_2$

Randverteilung  
für  $x_2$   
 $\rightarrow P(x_2)$

Es gilt

– für die Randverteilung von  $X_1$

$$p(x_{1i}) = \sum_{k=1}^l p(x_{1i}, x_{2k}) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.19)$$

– für die Randverteilung von  $X_2$

$$p(x_{2k}) = \sum_{i=1}^r p(x_{2k}, x_{1i}) \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Wird die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Wertes  $x_{1i}$  der Zufallsgröße  $X_1$  unter der Bedingung gesucht, daß die Zufallsgröße  $X_2$  den Wert  $x_{2k}$  angenommen hat, so ist der Wert

$$P(X_1 = x_{1i} | X_2 = x_{2k}) = \frac{P(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2k})}{P(X_2 = x_{2k})} = p(x_{1i} | x_{2k}) \quad (2.20)$$

als bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

In Analogie zur Beschreibung eindimensionaler stetiger Zufallsgrößen gilt für die zweidimensionale stetige Verteilung (sdichte) (s. Bild 2.4)

$$f(X_1, X_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.21)$$

Die zweidimensionale stetige Verteilungsfunktion kann nach der Vorschrift

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.22)$$

ermittelt werden.

Als Randverteilungen der stetigen Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  ergeben sich die Randdichten zu

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \quad \text{für } X_1, \\ f(x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \quad \text{für } X_2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

### 2.2.2.2. Kenngrößen zweidimensionaler Zufallsgrößen

Wesentliche Kenngrößen zweidimensionaler Zufallsgrößen und ihrer Verteilungen sind die Erwartungswerte, die Kovarianzen und der Korrelationskoeffizient.

Erwartungswerte  $E\{\dots\}$

Zwischen den Erwartungswerten der Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} E\{X_1 + X_2\} &= E\{X_1\} + E\{X_2\} \\ E\{\alpha X_1 + \beta X_2\} &= \alpha E\{X_1\} + \beta E\{X_2\} \\ E\{X_1 X_2\} &= E\{X_1\} E\{X_2\} \quad \text{für } X_1 \text{ und } X_2 \text{ unabhängig.} \end{aligned}$$

Varianzen  $E\{(\dots)^2\}$

Für die Varianz der Summe der Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  gilt

$$E\{(X_1 + X_2)^2\} = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + 2 \operatorname{cov}\{X_1, X_2\}$$

für  $X_1$  und  $X_2$  abhängig

mit  $\operatorname{cov}\{X_1, X_2\} = E\{(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\}$ ,

$$E\{(X_1 + X_2)^2\} = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2$$

für  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig.

Kovarianzen, Korrelationskoeffizienten

Sind  $X_1$  und  $X_2$  zwei beliebige Zufallsgrößen, so wird der Ausdruck

$$\operatorname{cov}\{X_1, X_2\} = E\{(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\} \quad (2.24)$$

als Kovarianz von  $X_1$  und  $X_2$  bezeichnet. Die Kovarianz ist ein Maß für den mittleren linearen statistischen Zusammenhang zweier Zufallsgrößen. Für ihren Wertebereich gilt

$$-\infty \leq \operatorname{cov}\{X_1, X_2\} \leq +\infty.$$

Ist der Wert der Kovarianz null, hängen  $X_1$  und  $X_2$  linear nicht voneinander ab, d.h., sie sind unabhängig. Das Vorzeichen dieser Kenngröße gibt die Richtung des Zusammenhangs an. Wenn z.B.  $X_1$  wächst und  $X_2$  abnimmt, folgt  $\operatorname{cov}\{X_1, X_2\} < 0$ .

Die auftretenden Kovarianzen werden in der Kovarianzmatrix  $\operatorname{COV}\{X_1, X_2\}$  zusammengefaßt zu

$$\operatorname{COV}\{X_1, X_2\} = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}\{X_1, X_1\} & \operatorname{cov}\{X_1, X_2\} \\ \operatorname{cov}\{X_2, X_1\} & \operatorname{cov}\{X_2, X_2\} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

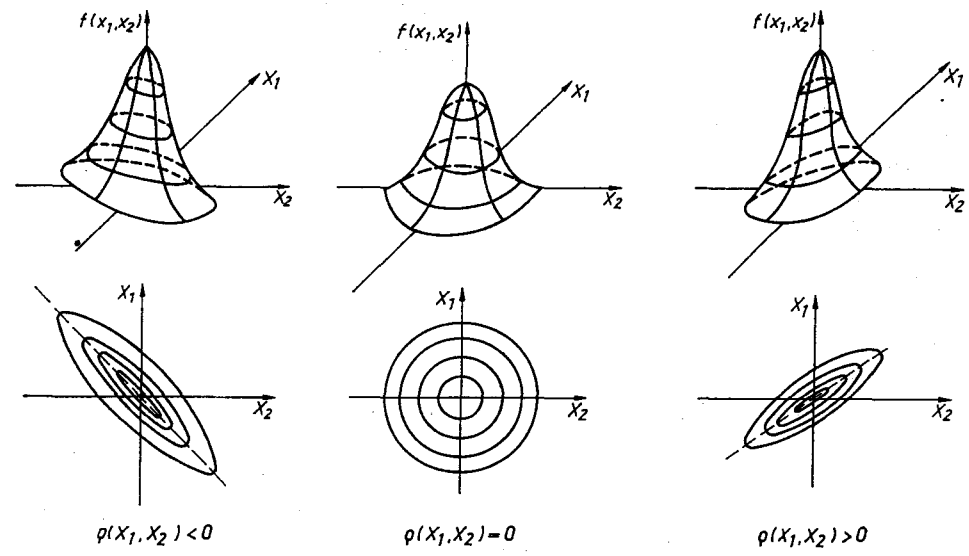
Sie ist immer eine symmetrische Matrix, deren Diagonalelemente die Varianzen der einzelnen Zufallsgrößen darstellen.

Um den Wertebereich der Kovarianz von der Dimension der Zufallsgrößen unabhängig zu machen, wurde der Korrelationskoeffizient  $\rho(X_1, X_2)$

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\operatorname{cov}\{X_1, X_2\}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \quad (2.26)$$

mit dem Wertebereich  $-1 \leq \rho(X_1, X_2) \leq +1$  eingeführt.

Tafel 2.5. Stetige zweidimensionale Verteilungen und Wert der Korrelationskoeffizienten



In Tafel 2.5 sind typische Formen einer zweidimensionalen Verteilung und des Korrelationskoeffizienten dargestellt. Als Information enthält er

- die Richtung des Zusammenhangs im Vorzeichen
- die Stärke der Bündelung der Verteilung der Zufallsgrößen um eine Gerade.

Der Korrelationskoeffizient  $\rho(X_1, X_2)$  ist eine wichtige Kenngröße für den mittleren linearen statistischen Zusammenhang zweier Zufallsgrößen. Er wird auch als totaler oder einfacher Korrelationskoeffizient bezeichnet.

Vom Korrelationskoeffizienten wird das Bestimmtheitsmaß

$$B(X_1, X_2) = \rho^2(X_1, X_2) \quad (2.27)$$

abgeleitet. Für seinen Wertebereich gilt

$$0 \leq B(X_1, X_2) \leq 1.$$

Wird der statistische Zusammenhang zwischen zwei Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  gesucht, wenn gleichzeitig die Zufallsgrößen  $X_3, \dots, X_m$  auftreten, ist entsprechend Bild 2.7 der „echte“ Zusammenhang zwischen  $X_1$  und  $X_2$  zu ermitteln. Der Einfluß über alle anderen Größen wird beseitigt, indem die Zufallsgrößen  $X_3, \dots, X_m$  konstant gehalten, d.h. Kennwerte von bedingten  $m$ -dimensionalen Verteilungen verwendet werden. Der so ermittelte Koeffizient wird als *partieller Korrelationskoeffizient*  $\varrho(X_1, X_2/X_3, \dots, X_m)$  bezeichnet. Er ist durch Gl. (2.28)

$$\varrho(X_1, X_2/X_3, \dots, X_m) = \frac{\text{cov}\{X_1, X_2/X_3, \dots, X_m\}}{\sigma_{X_1/X_2, \dots, X_m} \sigma_{X_2/X_1, X_3, \dots, X_m}}, \quad (2.28)$$

sein Wertebereich durch

$$-1 \leq \varrho(X_1, X_2/X_3, \dots, X_m) \leq +1$$

gegeben. Unter Verwendung der Elemente  $c_{ii}$  und  $c_{ij}$  der Inversen der Kovarianzmatrix Gl. (2.25)

$$C(X_1, \dots, X_m) = \text{COV}\{X_1, X_2, \dots, X_m\}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{1m} \\ c_{m1} & c_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

kann der partielle Korrelationskoeffizient nach der Vorschrift

$$\varrho(X_i, X_j/\dots) = -\frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} \quad (2.30)$$

ermittelt werden.

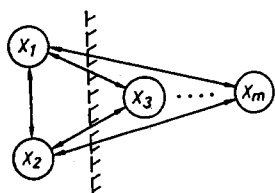


Bild 2.7  
Mögliche Zusammenhänge  
der Zufallsgrößen  $X_1 \dots X_m$

Das *partielle Bestimmtheitsmaß* ist dann gegeben als

$$B(X_i, X_j/\dots) = \varrho^2(X_i, X_j/\dots).$$

Den Zusammenhang zwischen einer Zufallsgröße  $X_1$  und einer Gruppe von Zufallsgrößen  $X_2 \dots X_m$  gibt der *multiple Korrelationskoeffizient*  $\varrho(X_1; X_2 \dots X_m)$  an. Er wird nach der Beziehung

$$\varrho(X_1; X_2 \dots X_m) = +\sqrt{1 - \frac{\sigma_{X_1/X_2 \dots X_m}^2}{\sigma_{X_1}^2}} \quad (2.31)$$

ermittelt. Der Wertebereich ist

$$0 \leq \varrho(X_1; X_2 \dots X_m) \leq 1.$$

In Gl. (2.31) bedeutet  $\sigma_{X_1/X_2 \dots X_m}^2$  die Varianz von  $X_1$  in der bedingten Verteilung  $X_1/X_2 \dots X_m$  und  $\sigma_{X_1}^2$  die Varianz von  $X_1$ . Unter Verwendung der Elemente der inversen Kovarianzmatrix kann die multiple Korrelation entsprechend

$$\varrho(X_i; X_1 \dots X_m) = +\sqrt{1 - \frac{1}{c_{ii}c_{ii}}} \quad (2.32)$$

ermittelt werden.

Das *multiple Bestimmtheitsmaß* ist gleich dem Quadrat des multiplen Korrelationskoeffizienten

$$B(X_i; X_1 \dots X_m) = \varrho^2(X_i; X_1 \dots X_m).$$

Für einen  $m$ -dimensionalen Zufallsvektor erhält man bei Ermittlung aller Zusammenhänge die *Korrelationsmatrix*  $R$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_{12} & \dots & \varrho_{1m} \\ \varrho_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varrho_{m1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Die Matrix der totalen und partiellen Korrelationskoeffizienten wird u. a. zur Ermittlung der Modellstruktur verwendet.

## 2.3. Elemente der mathematischen Statistik

### 2.3.1. Ausgewählte Stichprobenfunktionen und ihre Verteilungen

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird von der vollständigen Information über die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der betrachteten Zufallsgrößen ausgegangen. Bei den Methoden der Statistik wird angenommen, daß keine oder nur eine unvollständige Information über die Verteilungen oder deren Parameter vorliegen. Aus einer Menge von  $n$  Realisierungen aus der Grundgesamtheit, die als *konkrete Stichprobe* vom Umfang  $n$  bezeichnet wird, wird die *Stichprobenfunktion*

$$\varphi = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.34)$$

gebildet. Bekannte wichtige Stichprobenfunktionen sind

$$\varphi_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \quad (\text{Stichprobenmittel}),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2 \quad (\text{Stichprobenvarianz}).$$

Die Stichprobenfunktionen sind ebenfalls Zufallsgrößen, weil die konkrete Stichprobe Zufallsgrößen entnommen wird. Damit haben die Stichprobenfunktionen Verteilungen, die als *Stichprobenverteilungen* bezeichnet werden.

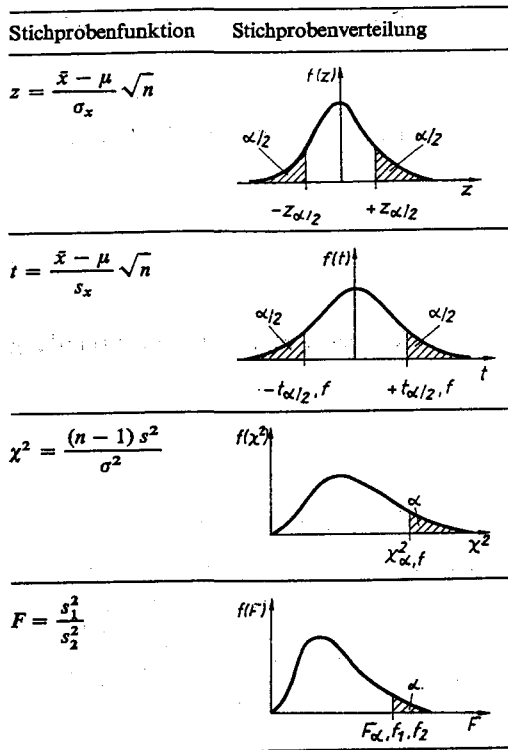
Wenn die Stichprobe einer normalverteilten Zufallsgröße, deren Werte außerdem unabhängig voneinander sind, entnommen wird, ist die Verteilung des Stichprobenmittels  $\bar{x}$  eine Normalverteilung mit den Parametern

$$E\{\bar{x}\} = \mu \quad \text{und} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{n}.$$

Häufig wird die normierte Stichprobenfunktion

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \sqrt{n} \quad (2.35)$$

verwendet, die ebenfalls normalverteilt (Tafel 2.6) mit den Parametern  $E\{z\} = 0$  und  $\sigma_z = 1$  ist.



Tafel 2.6  
Ausgewählte Stichprobenfunktionen  
und ihre Verteilungen

In Tafel A1 des Anhangs sind ausgewählte Werte der normierten Normalverteilung, aus denen bei Vorgabe der Werte von  $\alpha$  die Größen  $z_{\alpha/2}$  zu entnehmen sind, dargestellt. Die in die Stichprobenverteilung eingetragenen Vertrauensgrenzen  $-z_{\alpha/2}$  und  $+z_{\alpha/2}$  ergeben sich aus der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $P = 1 - \alpha$  für das mögliche Eintreten von  $\mu$  in diesem Bereich (Konfidenzintervall). Die Größe  $\alpha$  wird als *Irrtumswahrscheinlichkeit* bezeichnet. Damit gilt

$$P(\bar{x} - \Delta x < \mu < \bar{x} + \Delta x) = P(|x - \mu| < \Delta x) = 1 - \alpha. \quad (2.36)$$

Ist die Varianz  $\sigma_x^2$  nicht bekannt und muß sie durch die Varianz der Stichprobenwerte  $s_x^2$  ersetzt werden, ergibt sich aus Gl. (2.35) die Stichprobenfunktion

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x} \sqrt{n}. \quad (2.37)$$

Die Stichprobenfunktion  $t$  unterliegt für eine Stichprobe aus einer normalverteilten Zufallsgröße einer *Student-Verteilung/t-Verteilung* (s. Tafel 2.6). In Tafel A2 des Anhangs sind die Werte der  $t$ -Verteilung als Funktion der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und des Freiheitsgrads  $f = n - 1$  aufgetragen. Als normierte Stichprobenfunktion für die Varianz wird

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad (2.38)$$

verwendet. Die Verteilung der Zufallsgröße  $\chi^2$  ist die *Chi-Quadrat-Verteilung/ $\chi^2$ -Verteilung* (s. Tafel 2.6). Ihre Werte sind in Abhängigkeit von der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und dem Freiheitsgrad  $f = n - 1$  in Tafel A3 dargestellt.

Als zweite Stichprobenverteilung, die auf der Streuung von Stichproben basiert, ist die *Fishersche Verteilung/F-Verteilung* entwickelt worden. Werden von zwei unabhängigen normalverteilten Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  Stichproben im Umfang  $n_1$  und  $n_2$  mit den Streuungen  $s_1^2$  und  $s_2^2$  entnommen, so hat die Stichprobenfunktion

$$F = s_1^2/s_2^2 \quad \text{mit} \quad s_1^2 > s_2^2 \quad (2.39)$$

eine  $F$ -Verteilung mit den Freiheitsgraden  $f_1 = n_1 - 1$  und  $f_2 = n_2 - 1$  (s. Tafel 2.6). Ausgewählte Werte der Verteilung sind für die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0,05$  in Tafel A4 dargestellt.

Auf die Anwendung der genannten Stichprobenverteilungen zur Überprüfung von Hypothesen und zur Ableitung von Konfidenzintervallen wird in den Abschnitten 2.3.2 und 2.3.3. näher eingegangen.

### 2.3.2. Empirische Ermittlung von Verteilungen und Kenngrößen von Zufallsgrößen

In diesem Abschnitt soll auf Probleme der empirischen Ermittlung von Verteilungen und Kenngrößen von Zufallsgrößen eingegangen werden. Es wird vorausgesetzt, daß für

a) diskrete Zufallsgrößen die Realisierungen

$$\{x_{11}, \dots, x_{1n}; x_{21}, \dots, x_{2n}; \dots\},$$

b) stetige Zufallsgrößen die Realisierungen über ein Beobachtungsintervall

$$-T_0 \leq t \leq +T_0$$

vorliegen.

#### Kenngrößen/Momente

Auf der Basis dieser Beobachtungen (Stichprobe) können die in Tafel 2.7 angegebenen Kenngrößen und Momente eindimensionaler Zufallsgrößen ermittelt werden.

Tafel 2.7. Empirische Kenngrößen und Momente eindimensionaler Zufallsgrößen

| Kenngröße                     | Diskrete Zufallsgröße                                | Stetige Zufallsgröße                                            |
|-------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Variationsbreite $R$          | $R = x(t)_{\max} - x(t)_{\min}$                      |                                                                 |
| Variationskoeffizient $V$     | $V = \frac{s}{\bar{x}} 100\%$                        |                                                                 |
| Mittelwert $\bar{x}$          | $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$             | $\bar{x} = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) dt$           |
| Quadr. Mittelwert $\bar{x}^2$ | $\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$         | $\bar{x}^2 = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t)^2 dt$       |
| Varianz/Streuung $s^2$        | $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ | $s^2 = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} [x(t) - \bar{x}]^2 dt$ |

**Verteilung/Verteilungsfunktion**

Die empirische Verteilungsdichte  $f(x)$  einer stetigen Zufallsgröße kann auf der Grundlage der Bestimmung der Auftretenswahrscheinlichkeit der Zufallsgröße

$$\Delta \hat{F}(x) = \hat{F}(x + \Delta x) - \hat{F}(x) \quad (2.40)$$

im Bereich  $\Delta x$  über die Beziehung

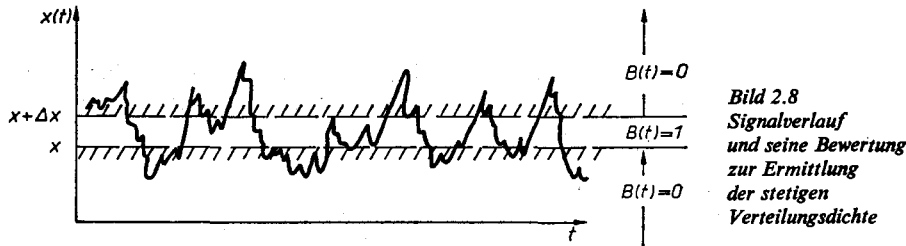
$$\hat{f}(x) = \frac{\Delta \hat{F}(x)}{\Delta x} \quad (2.41)$$

ermittelt werden; s. Gl. (2.8). Über eine Bewertung des Amplitudenfensters  $\Delta x$  (Bild 2.8) mit der Funktion

$$B(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq x(t) < x + \Delta x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.42)$$

wird die Auftretenswahrscheinlichkeit im Bereich  $\Delta x$  bestimmt aus

$$E\{B(t)\} = P\{x \leq x(t) < x + \Delta x\} \approx \Delta \hat{F}(x). \quad (2.43)$$



Mit Gl. (2.41) ergibt sich aus Gl. (2.43) die Ermittlungsvorschrift für die empirische Verteilungsdichte  $f(x)$  für das Amplitudenfenster  $\Delta x$  zu

$$\hat{f}(x) = \frac{E\{B(t)\}}{\Delta x}. \quad (2.44)$$

Die Rechenschaltung für einen Analogrechner (ohne Phasendrehung der Elemente) und die Signalverläufe sind im Bild 2.9 dargestellt. Sie dient im Rahmen dieses Buches mehr zum Verständnis der Verteilungsdichte  $f(x)$  als zu ihrer echten Ermittlung, da die analoge Rechentechnik kaum für diesen Zweck eingesetzt wird.

Die empirische diskrete Verteilung kann auf der Grundlage der Stichprobe auf zwei Wegen ermittelt werden.

**Weg 1.** Exakte Ermittlung der Häufigkeitsverteilung in folgenden Schritten:

- Zuordnung der  $n_i$  zu den  $x_i$
- Berechnung der  $H_R(x_i) = n_i/n$
- Auftragen der  $H_R(x_i)$  über  $x$ .

**Weg 2.** Näherungsweise Ermittlung der Häufigkeitsverteilung in folgenden Schritten:

- Bestimmung der Klassenanzahl  $n_K$ ,

- a)  $n_K = 1 + 3,2 \lg n$
  - b)  $n_K = \sqrt{n}$
- (2.45)

- Bestimmung der Klassenbreite

$$\Delta = \frac{x(t) \max - x(t) \min}{n_K}$$

- Ermittlung der Anzahl der Beobachtungen  $n_m$ , die zur  $m$ -ten Klasse gehören,
- Berechnung der Häufigkeiten  $H_{rm} = n_m/n$ ,
- Ermittlung des Mittelpunktes zweier benachbarter Klassen

$$x_m^* = \frac{x_{m-1} + x_m}{2},$$

- Auftragen der  $H_{rm}$  über  $x_m^*$ .

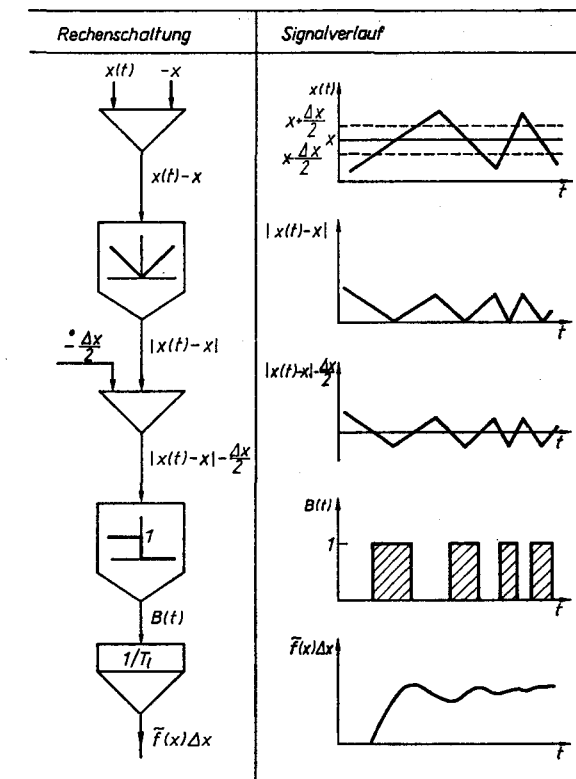


Bild 2.9  
Analogrechenschaltung  
und Signalverlauf zur Ermittlung  
der stetigen Verteilungsdichte

Die näherungsweise Ermittlung der Häufigkeitsverteilung ist vor allem bei geringem Stichprobenumfang und/oder für die notwendigen Grobabschätzungen sinnvoll. Die in Gl. (2.45) angegebenen Beziehungen zur Bestimmung der Klassenanzahl sind heuristisch gefunden worden und gehen davon aus, daß die Anzahl der Klassen mindestens 1 ist (d. h. Gleichverteilung) sowie mit Zunahme der Beobachtungen nicht mehr proportional zunimmt.

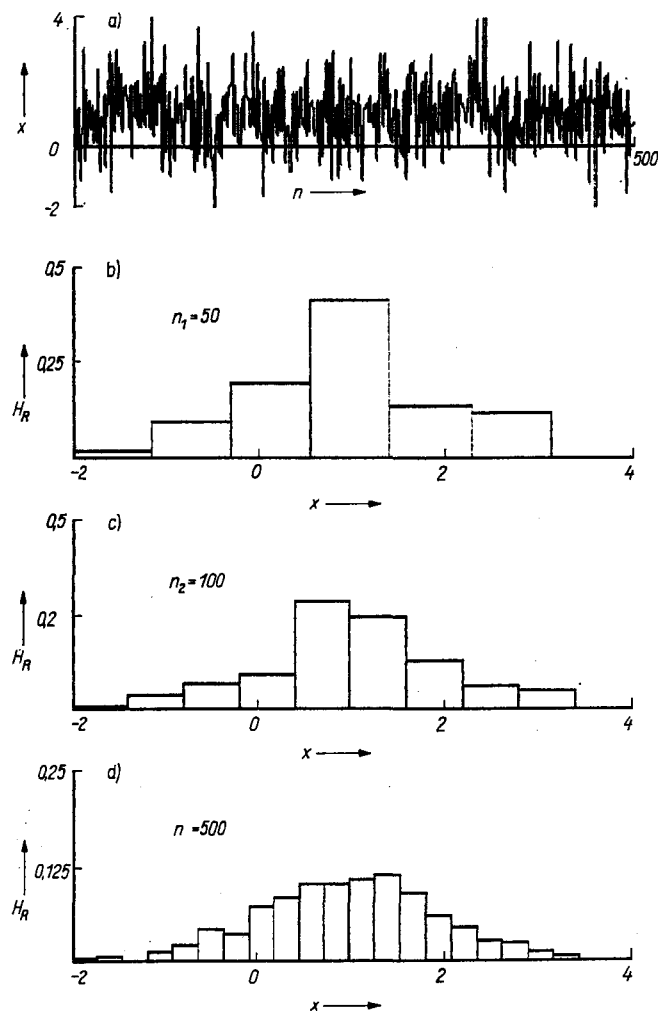
Im Beispiel 2.1 ist die näherungsweise Ermittlung der Verteilung einer normalverteilten Zufallsgröße als Funktion des Stichprobenumfangs dargestellt.

|              |                                                                          |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Beispiel 2.1 | Empirische Bestimmung der Verteilung einer normalverteilten Zufallsgröße |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------|

Gegeben:  $X \cong NV(1, 1)$ , unkorreliert,  
 $n_{\max} = 500$  Beobachtungen.

Gesucht: Empirische Verteilungen für die Stichprobenumfänge  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$ ,  $n_3 = 500$  auf der Grundlage der Klassenanzahl  $n_k = \sqrt{n}$ .

Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 2.1.



Die Ergebnisse zeigen, daß

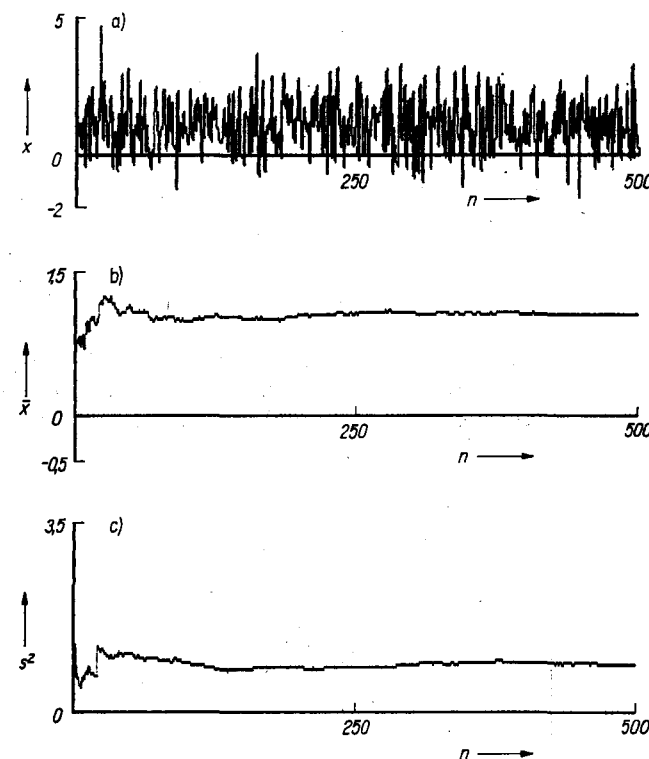
1. das Verteilungsgesetz erst mit wachsender Zahl von Beobachtungen erkennbar ist,
2. die näherungsweise Bestimmung eine sehr leistungsfähige Methode darstellt.

|              |                                                                       |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Beispiel 2.2 | Empirische Bestimmung der Momente einer normalverteilten Zufallsgröße |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------|

Gegeben:  $X \cong NV(1, 1)$ , unkorreliert,  
 $n_{\max} = 500$  Beobachtungen.

Gesucht: Konvergenzverhalten der empirischen Momente  $\bar{x}$  und  $s^2$  in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang  $n$ .

Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 2.2.



Die dargestellten Resultate zeigen, daß

1. die Güte der Schätzung der Momente stark vom Stichprobenumfang abhängt,
2. für hinreichend große Stichproben die empirischen Momente der Stichprobe sich gut den Momenten der Grundgesamtheit nähern.

Das Konvergenzverhalten der Momente  $\bar{x}$  und  $s^2$  bei ihrer empirischen Ermittlung in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang ist im Beispiel 2.2 aufgezeigt.

Die empirische Verteilungsfunktion  $\hat{F}(x)$  einer stetigen Zufallsgröße wird auf der Grundlage der Beobachtungen im Intervall  $-T_0 \leq t \leq +T_0$  nach der Vorschrift

$$\hat{F}(x) \approx P\{x(t) < x\} = \int_{-\infty}^x f(z) dz \quad (2.46)$$

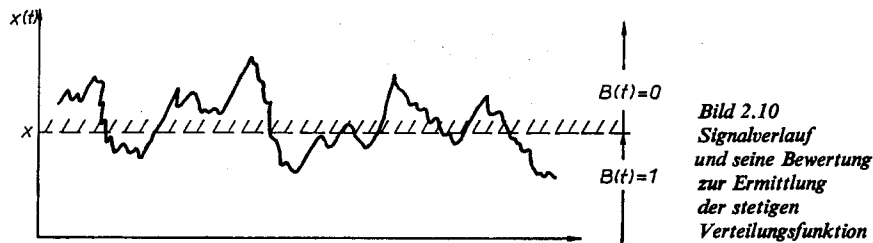
realisiert. Über eine Bewertungsfunktion  $B(t)$  mit den Eigenschaften

$$B(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x(t) < x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird der Amplitudenbereich  $-\infty < x(t) < x$  aus der Zufallsgröße  $x(t)$  herausgeschnitten (Bild 2.10). Die empirische Verteilungsfunktion  $\hat{F}(x)$  kann dann aus der Mittelwertbildung der Bewertungsfunktion  $B(t)$  nach Gl. (2.47) zu

$$E\{B(t)\} = P\{x(t) < x\} \approx \hat{F}(x) \quad (2.47)$$

bestimmt werden.



Die Rechenschaltung für einen Analogrechner (ohne Phasendrehung der Elemente um  $180^\circ\text{C}$ ) und die entsprechenden Signalverläufe sind im Bild 2.11 dargestellt.

Die empirische Verteilungsfunktion  $\hat{F}(x)$  einer diskreten Zufallsgröße ergibt sich aus der Häufigkeitsverteilung durch die Beziehung

$$\hat{F}(x) = \sum H_r(x_i), \quad x_i < x. \quad (2.48)$$

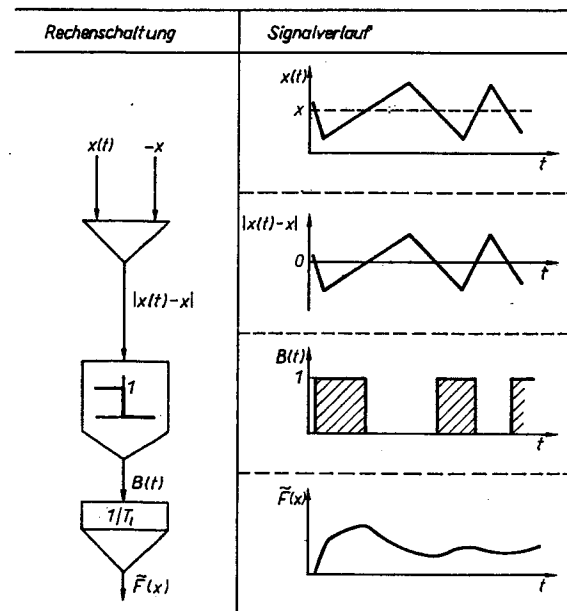


Bild 2.11  
Analogrechenschaltung  
und Signalverlauf  
zur Ermittlung  
der stetigen  
Verteilungsfunktion

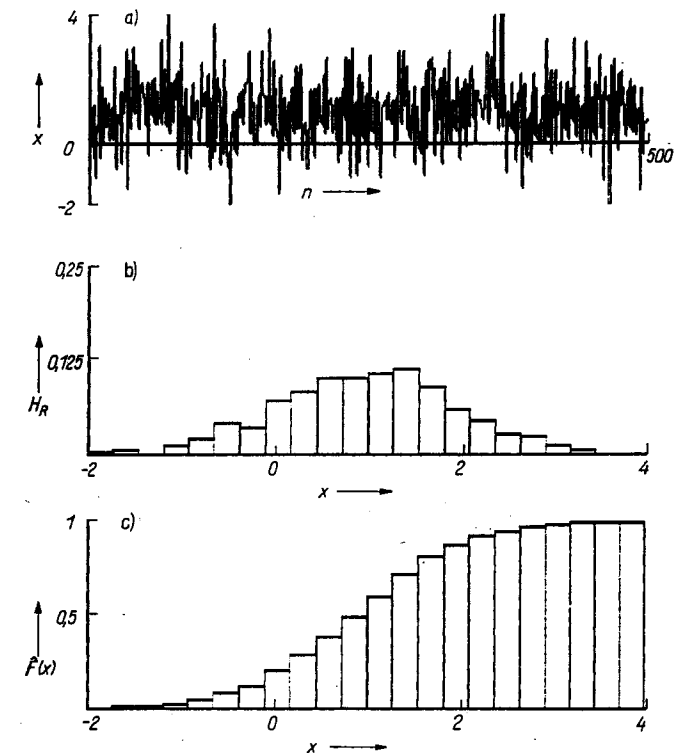
| Beispiel 2.3 | Empirische Ermittlung der Verteilung und der Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------|

Gegeben:  $X \cong NV(1, 1)$ , unkorreliert,

$n_{\max} = 500$  Beobachtungen.

Gesucht: Empirische Verteilung und Verteilungsfunktion für  $n = 500$  und die Klassenanzahl  $n_k = \sqrt{n}$ .

Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 2.3.



Die Berechnungen zeigen, daß

1. das Verteilungsgesetz sehr gut erkennbar ist,
2. die Verteilungsfunktion auch unter Verwendung des Näherungsverfahrens gut aus der empirischen Verteilungsfunktion ermittelt werden kann.

Für eine normalverteilte Zufallsgröße ist im Beispiel 2.3 die empirische Verteilung und ihre Verteilungsfunktion dargestellt.

**Korrelationskoeffizienten**

Für den einfachen empirischen Korrelationskoeffizienten erhält man entsprechend Gl. (2.26) für den Stichprobenumfang  $n$  die Beziehung

$$\hat{\rho}(X_1, X_2) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}}. \quad (2.49)$$

Das Bestimmtheitsmaß ergibt sich dann aus Gl. (2.49) zu

$$\hat{B}(X_1, X_2) = \hat{\rho}^2(X_1, X_2). \quad (2.50)$$

Unter Verwendung der inversen empirischen Kovarianzmatrix entsprechend Gl. (2.29)

$$\hat{C}(X_1, X_2, \dots, X_m) = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \dots & \hat{c}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{c}_{m1} & \dots & \hat{c}_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

gilt für den empirischen partiellen Korrelationskoeffizienten entsprechend Gl. (2.30)

$$\hat{\rho}(X_i, X_j / \dots) = -\frac{\hat{c}_{ij}}{\sqrt{\hat{c}_{ii} \hat{c}_{jj}}}. \quad (2.52)$$

In Analogie zu Gl. (2.32) gilt für den empirischen multiplen Korrelationskoeffizienten

$$\hat{\rho}(X_i; X_1 \dots X_m) = +\sqrt{1 - \frac{1}{s_i^2 \hat{c}_{ii}}}. \quad (2.53)$$

Die empirische Korrelationsmatrix  $\hat{R}$  ergibt sich bei einem Stichprobenumfang von  $n$  aus den Korrelationskoeffizienten – Gl. (2.49) oder Gl. (2.52) – zu

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_{12} & \dots & \hat{\rho}_{1m} \\ \hat{\rho}_{21} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{m1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Die Signalverläufe von drei korrelierten Zufallsgrößen und die aus einer Stichprobe von  $n = 500$  berechneten einfachen und partiellen Korrelationskoeffizienten sind im Beispiel 2.4 für einen Testfall dargestellt.

Auf der Grundlage der aus der Stichprobe erhaltenen Information in Form der empirischen Kenngrößen und Verteilungen muß nun ein Weg gefunden werden, Aussagen über das Gesamtverhalten der Zufallsgrößen abzuleiten. Dabei sind grundsätzlich die folgenden Aufgabenstellungen möglich:

1. Zu prüfen ist, ob Annahmen/Hypothesen über den Typ oder die Momente der Verteilung der Grundgesamtheit mit der aus der Stichprobe entnommenen Information vereinbart sind – *Prüfen von Hypothesen*.
2. Für einen a priori bekannten Verteilungstyp der Grundgesamtheit sind auf der Grundlage der konkreten Stichprobe Bereiche (Konfidenzintervalle) für die unbekannten Momente dieser Verteilung zu schätzen – *Schätzen von Bereichen der Momente der Grundgesamtheit*.

Beispiel  
2.4

**Empirische Berechnung von Korrelationskoeffizienten**

Gegeben:

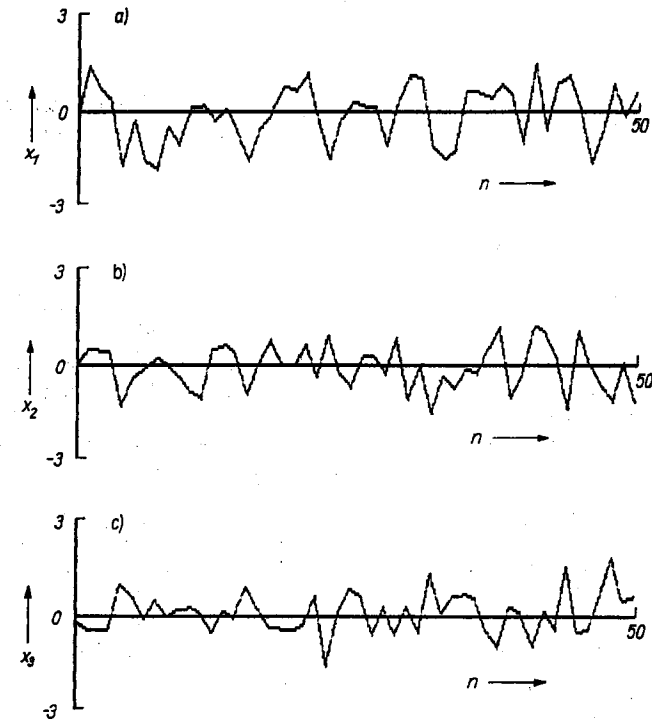
$X_1 \triangleq \text{NV}(0, 1)$ , unkorreliert,  
 $X_2 = -0,8X_1 + 0,2 \{\text{NV}(0, 1)\}$ ,  
 $X_3 = +0,3X_1 - 0,3X_2 + 0,4 \{\text{NV}(0, 1)\}$ ,  
 $n_{\max} = 500$  Beobachtungen.

Gesucht:

Einfache und partielle Korrelationskoeffizienten und die Signalverläufe von  $X_1, X_2$  und  $X_3$ .

Ergebnis:

1. Signalverläufe der Zufallsgrößen  
 Siehe Bild zu Beispiel 2.4.

**2. Matrizen der Korrelationskoeffizienten**

– Matrix der einfachen Korrelationskoeffizienten,

|       | $X_1$ | $X_2$  | $X_3$  |
|-------|-------|--------|--------|
| $X_1$ | 1     | -0,962 | 0,774  |
| $X_2$ |       | 1      | -0,770 |
| $X_3$ |       |        | 1      |

– Matrix der partiellen Korrelationskoeffizienten.

|       | $X_1$ | $X_2$  | $X_3$  |
|-------|-------|--------|--------|
| $X_1$ | 1     | -0,925 | 0,172  |
| $X_2$ |       | 1      | -0,130 |
| $X_3$ |       |        | 1      |

Der Testfall zeigt, daß

1. die einfachen Korrelationskoeffizienten Zusammenhänge teilweise sehr verfälscht darstellen können (z.B.  $X_1, X_3$  oder  $X_2, X_3$ ),
2. die partiellen Korrelationskoeffizienten den Anteil des Einflusses anderer Zufallsgrößen sehr gut nachbilden (sowohl die Richtung als auch die Stärke des Zusammenhangs sind deutlich erkennbar),
3. die Richtung des Zusammenhangs teilweise auch schon aus dem Verlauf der Signale erkannt werden kann.
4. Die Korrelationskoeffizienten sind mit 95% gesichert, da der kritische Korrelationskoeffizient, siehe Anhang A 6, den Wert 0,088 besitzt, d.h., die linearen Zusammenhänge werden alle wiedererkannt.

In den folgenden Abschnitten werden ausgewählte Prüf- und Schätzverfahren für normalverteilte Zufallsgrößen vorgestellt. Auf verteilungsfreie Verfahren muß aus Platzgründen verzichtet werden.

### 2.3.3. Statistische Prüfverfahren

Die aus der Grundgesamtheit entnommene konkrete Stichprobe enthält bekanntlich unvollständige Informationen über die Verteilung der Grundgesamtheit und über ihre Momente. Diese unvollständigen Informationen werden nun benutzt, um in Verbindung mit einer gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  eine Entscheidung über statistische Hypothesen  $H$  zur Verteilung oder deren Momente zu treffen. Die Prüfung der Hypothesen wird mittels *statistischer Prüfverfahren*, auch *statistische Tests* genannt, durchgeführt. Dabei wird die Hypothese  $H$  als *Nullhypothese*  $H_0$  bezeichnet, wenn weitere Hypothesen, die *Alternativhypothesen* genannt werden, aufgestellt werden können. Für die Entscheidung über die Nullhypothese  $H_0$  werden die normierten Stichprobenfunktionen Gl. (2.35) und Gln. (2.37) bis (2.39) aus Abschnitt 2.3.1 mit jeweils eingesetzter Hypothese verwendet. Die sich dann ergebenden Zufallsgrößen werden als *Prüfgrößen* bzw. *Testgrößen* ( $z$ ,  $t$ ,  $\chi^2$ ,  $F$ ) bezeichnet. Die Prüfung der Hypothese  $H_0$  für eine Stichprobenfunktion kann nach folgendem allgemeinem Schema erfolgen:

1. Aufstellen der Nullhypothese  $H_0$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$
3. Ermittlung des Ablehnungsbereichs für die Nullhypothese für  $\alpha$  (s. Tafel 2.6, Bilder 2.12 bis 2.14)
4. Berechnung der Prüfgröße auf der Grundlage der Stichprobe
5. Entscheidung über Nullhypothese  $H_0$  durch Vergleich der Prüfgröße mit den Werten des Ablehnungsbereichs.

Es gibt sehr viele Möglichkeiten zur Festlegung eines Ablehnungsbereichs (kritischer Bereich) bei einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit. Für die Praxis haben sich die sog. zweiseitige und die einseitige Fragestellung als wichtig erwiesen. Bei einer zweiseitigen Fragestellung wird davon ausgegangen, daß der kritische Bereich für die Hypothese  $H_0$  mit jeweils einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha/2$  ermittelt wird. Im Bild 2.12 ist dies für eine Testgröße NV (0; 1) dargestellt. Bei einer einseitigen Fragestellung wird der kritische Bereich für eine symmetrisch verteilte Prüfgröße auf der linken oder rechten

Seite mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha$  betrachtet. Dieser Sachverhalt wird im Bild 2.13 gezeigt.

Im folgenden werden wichtige Prüfverfahren für die Momente Erwartungswert und Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit vorgestellt.

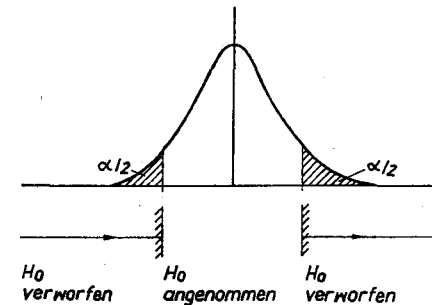


Bild 2.12  
Zweiseitige Fragestellung  
im Hypothesentest des Moments  $\mu$

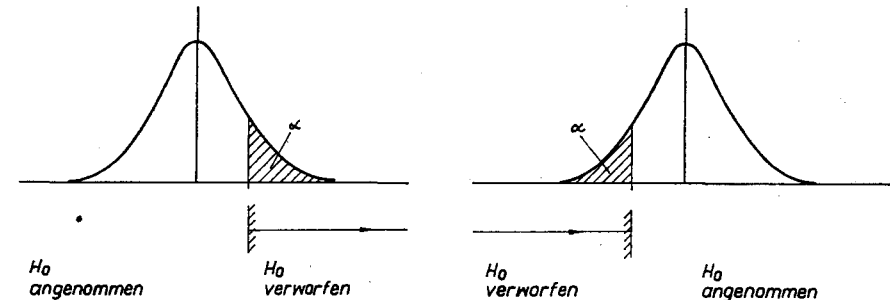


Bild 2.13. Einseitige Fragestellungen im Hypothesentest des Moments  $\mu$

#### Prüfung des Erwartungswerts $\mu$ bei bekannter Varianz $\sigma^2$ der Grundgesamtheit

Bei diesem Test soll geprüft werden, ob der unbekannte Erwartungswert  $\mu$  einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz  $\sigma^2$  einen bestimmten Wert  $\mu_0$  besitzt. Der Test (z-Test) erfolgt entsprechend der allgemeinen Strategie in folgenden Schritten:

1. Aufstellen der Hypothese  $H_0: \mu = \mu_0$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$
3. Berechnung der Prüfgröße aus Gl. (2.35)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \quad (2.55)$$

4. Ermittlung der Grenzen  $\pm z_{\alpha/2}$  des kritischen Bereichs aus der Normalverteilung (Tafel A 1)
5. Entscheidung

– zweiseitige Fragestellung

$$|z| \geq z_{\alpha/2} \quad H_0 \text{ wird abgelehnt}$$

$$|z| < z_{\alpha/2} \quad H_0 \text{ wird angenommen}$$

## – einseitige Fragestellung

$z \geq z_\alpha$  bzw.  $z \leq -z_\alpha$   $H_0$  wird abgelehnt

$z < z_\alpha$  bzw.  $z > -z_\alpha$   $H_0$  wird angenommen.

Wird die Hypothese  $H_0$  angenommen, bedeutet dies, daß die Abweichung zwischen dem Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  und der Hypothese  $H_0: \mu = \mu_0$  nur zufällig ist. Im anderen Fall ist die auftretende Abweichung signifikant.

**Prüfung des Erwartungswerts  $\mu$  bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$  der Grundgesamtheit**

Geprüft werden soll, ob der unbekannte Erwartungswert  $\mu$  einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz  $\sigma^2$  einen bestimmten Wert  $\mu_0$  besitzt. Unbekannt sind damit die Kenngrößen  $\mu$  und  $\sigma^2$ . Der Test ( $t$ -Test) für diesen Fall erfolgt in folgenden Schritten:

1. Aufstellen der Hypothese  $H_0: \mu = \mu_0$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$
3. Berechnung der Prüfgröße aus Gl. (2.37)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} \quad (2.56)$$

4. Ermittlung des kritischen Bereichs mit seinen Grenzen  $\pm t_{\alpha/2, f}$  aus der Student-Verteilung (Tafel A 2)
5. Entscheidung

## – zweiseitige Fragestellung

$|t| \geq t_{\alpha/2, f}$   $H_0$  wird abgelehnt

$|t| < t_{\alpha/2, f}$   $H_0$  wird angenommen

## – einseitige Fragestellung

$t \geq t_{\alpha, f}$  bzw.  $t \leq -t_{\alpha, f}$   $H_0$  wird abgelehnt

$t < t_{\alpha, f}$  bzw.  $t > -t_{\alpha, f}$   $H_0$  wird angenommen.

**Prüfung der Varianz  $\sigma^2$** 

Bei diesem Test soll geprüft werden, ob die unbekannte Varianz  $\sigma^2$  einer normalverteilten Grundgesamtheit einen bestimmten Wert  $\sigma_0^2$  besitzt. Als Stichprobenfunktion wird die Größe  $\chi^2$  von Gl. (2.38) verwendet. Da die  $\chi^2$ -Verteilung (s. Tafel 2.6) eine einseitige Verteilung ist, kann eine zweiseitige Fragestellung nicht ohne eine Umformung des Testes beantwortet werden. Grundlage der zweiseitigen Betrachtung ist die Verteilung der Irrtumswahrscheinlichkeit zu je der Hälfte in den Bereich kleinerer und größerer Varianzen (Bild 2.14). Folglich gilt mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\alpha/2: \quad \sigma^2 > (n-1)s^2/\chi_{\alpha/2, f}^2$$

$$1 - \alpha/2: \quad \sigma^2 > (n-1)s^2/\chi_{1-\alpha/2, f}^2$$

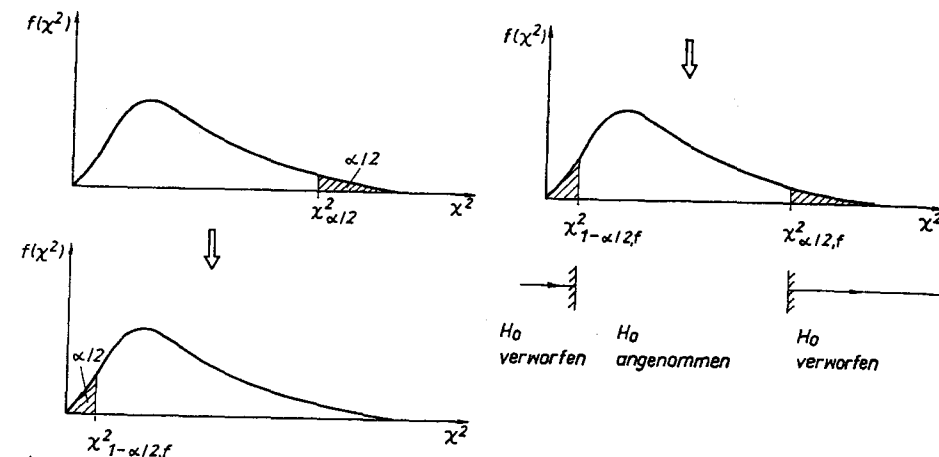


Bild 2.14. Einseitige und zweiseitige Fragestellung im Hypothesentest des Moments  $\sigma^2$

Für den Bereich, in dem die Hypothese  $H_0$  bei einer zweiseitigen Fragestellung angenommen wird, gilt dann

$$\chi_{1-\alpha/2, f}^2 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2, f}^2 \quad (2.57)$$

Der gesamte Test ( $\chi^2$ -Test) kann in folgenden Schritten vorgenommen werden:

1. Aufstellen der Hypothese  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$
3. Berechnung der Prüfgröße  $\chi^2$  aus Gl. (2.38)

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \quad (2.58)$$

4. Ermittlung der Testwerte  $\chi_{\alpha, f}^2$  bzw.  $\chi_{1-\alpha/2, f}^2$  und  $\chi_{\alpha/2, f}^2$  aus der  $\chi^2$ -Verteilung (siehe Tafel A 3)
5. Entscheidung

## – zweiseitige Fragestellung

$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2, f}^2$  und  $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2, f}^2$   $H_0$  wird abgelehnt

$\chi_{1-\alpha/2, f}^2 < \chi^2 < \chi_{\alpha/2, f}^2$   $H_0$  wird angenommen

## – einseitige Fragestellung:

$\chi^2 \geq \chi_{\alpha, f}^2$   $H_0$  wird abgelehnt

$\chi^2 < \chi_{\alpha, f}^2$   $H_0$  wird angenommen.

**Prüfung der Gleichheit zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten  $X_1$  und  $X_2$** 

Zu prüfen ist, ob die Varianz  $\sigma_1^2$  einer normalverteilten Grundgesamtheit  $X_1$  gleich der Varianz  $\sigma_2^2$  einer normalverteilten Grundgesamtheit  $X_2$  ist.

Der Test (*F*-Test) erfolgt in den Schritten:

1. Aufstellen der Hypothese  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$
3. Auf der Basis von  $n_1$  Beobachtungen von  $X_1$  und  $n_2$  Beobachtungen von  $X_2$  kann die Prüfgröße  $F$  aus Gl. (2.39) zu

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (2.59)$$

berechnet werden.

4. Ermittlung der Grenze  $F_{\alpha, f_1, f_2}$  aus der Fisher-Verteilung (s. Tafeln A4 und A5)
5. Entscheidung

$$F \geq F_{\alpha, f_1, f_2} \quad H_0 \text{ wird abgelehnt}$$

$$F < F_{\alpha, f_1, f_2} \quad H_0 \text{ wird angenommen.}$$

#### Prüfung der Korrelationskoeffizienten

Um den linearen statistischen Zusammenhang zwischen Zufallsgrößen auf der Grundlage der empirisch ermittelten Korrelationskoeffizienten zu prüfen, wird als Hypothese  $H_0$  für den Korrelationskoeffizienten der Grundgesamtheit  $H_0: \rho = 0$  aufgestellt. Unter Berücksichtigung der bereits bekannten Testgröße für den Erwartungswert  $\mu$  aus Gl. (2.37) gilt für diesen Test folgendes Vorgehen:

1. Aufstellen der Hypothese  $H_0: \rho = 0$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$
3. Berechnung der Prüfgröße  $t$  als *t*-Test

a) Einfacher Korrelationskoeffizient

Analog zu Gl. (2.37) gilt

$$t = \frac{\hat{\rho}(X_1, X_2) - \rho(X_1, X_2)}{s_{\hat{\rho}}} \quad (2.60)$$

Mit

$$s_{\hat{\rho}}^2 = \frac{1}{(n-2)} (1 - \hat{\rho}^2(X_1, X_2)) \quad \text{für } \rho(X_1, X_2) = 0$$

geht Gl. (2.60) über in

$$t = \frac{\hat{\rho}(X_1, X_2)}{\sqrt{1 - \hat{\rho}^2(X_1, X_2)}} \sqrt{n-2}. \quad (2.61)$$

b) Partieller Korrelationskoeffizient

Für den partiellen Korrelationskoeffizienten gilt in Analogie zu Gl. (2.61) mit der Anzahl der ausgeschlossenen Zufallsgrößen  $s = m - 2$

$$t = \frac{\hat{\rho}(X_i, X_j / \dots)}{\sqrt{1 - \hat{\rho}^2(X_i, X_j / \dots)}} \sqrt{n - (2 + s)}. \quad (2.62)$$

4. Ermittlung des Wertes  $t_{\alpha/2, f}$  aus der Student-Verteilung mit  $f = n - 2$  für a) und  $f = n - (2 + s)$  für b) (s. Tafel A2)

#### 5. Entscheidung

$$|t| \geq t_{\alpha/2, f} \quad H_0 \text{ wird abgelehnt}$$

$$|t| < t_{\alpha/2, f} \quad H_0 \text{ wird angenommen.}$$

Aus der Beziehung  $|t| = t_{\alpha/2, f}$  kann für eine vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und einen Freiheitsgrad  $f = m - 2$  der kritische Korrelationskoeffizient  $\rho(X_1, X_2)/\text{krit.}$  ermittelt werden, für den die Nullhypothese gerade abgelehnt wird. In Tafel A6 ist für ein  $\alpha$  von 1 und 5% für verschiedene Freiheitsgrade dieser kritische Korrelationskoeffizient dargestellt. Der empirische Korrelationskoeffizient  $\hat{\rho}(X_1, X_2)$  ist statistisch ungleich null, wenn

$$|\hat{\rho}(X_1, X_2)| > \rho(X_1, X_2)/\text{krit.} \quad (2.63)$$

#### 2.3.4. Schätzung von Konfidenzintervallen

Bei der Schätzung eines Intervalls mit den Grenzen  $G_u$  und  $G_o$  ( $G_u < G_o$ ) für den unbekannten Parameter der Grundgesamtheit ( $\mu$  oder  $\sigma^2$ ) auf der Grundlage einer Stichprobe wird davon ausgegangen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der unbekannten Parameter in diesem Bereich

$$P(G_u < \mu, \sigma^2 < G_o) = 1 - \alpha \quad (2.64)$$

ist. Die Werte  $G_u$  und  $G_o$  werden als *Konfidenzgrenzen* (Vertrauensgrenzen), der Bereich  $G_u, G_o$  als *Konfidenzintervall* (Vertrauensintervall) und  $\alpha$  als Irrtumswahrscheinlichkeit bezeichnet. Auf der Basis der in den Abschnitten 2.3.2 und 2.3.3 vereinbarten normierten Stichprobenfunktionen und festgelegten Bereiche für die Annahme der Nullhypothese werden für die beiden Parameter  $\mu$  und  $\sigma^2$  die Konfidenzintervalle ermittelt.

##### Konfidenzintervall für $\mu$ bei bekanntem $\sigma^2$

Ausgangspunkt für die Ableitung des Konfidenzintervalls für  $\mu$  ist der Bereich für die Annahme der Hypothese  $H_0: \mu = \mu_0$  (s. Abschn. 2.3.3)

$$-z_{\alpha/2} \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} < + z_{\alpha/2}. \quad (2.65)$$

Aus Gl. (2.65) erhält man durch Umstellen das Konfidenzintervall für den Parameter  $\mu$  zu

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2.66)$$

Damit wird das Konfidenzintervall kleiner, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit größer gewählt bzw. die Anzahl der Beobachtungen vergrößert wird.

##### Konfidenzintervall für $\mu$ bei unbekanntem $\sigma^2$

Für die Ableitung des Konfidenzintervalls für  $\mu$  bei unbekannter Varianz der Grundgesamtheit  $\sigma^2$  wird von dem Bereich der Annahme der Nullhypothese  $H_0: \mu = \mu_0$  (s. Abschn. 2.3.3) des *t*-Testes ausgegangen. Für ihn gilt

$$-t_{\alpha/2, f} < \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} < + t_{\alpha/2, f}. \quad (2.67)$$

Aus Gl. (2.67) erhält man das Konfidenzintervall für  $\mu$  zu

$$\bar{x} - t_{\alpha/2, f} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2, f} \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (2.68)$$

Bei gleichem Stichprobenumfang  $n$  und gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  ist das Konfidenzintervall von Gl. (2.68) größer als das von Gl. (2.66).

#### Konfidenzintervall für $\sigma^2$

Aus dem Gültigkeitsbereich für die Hypothese  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$  entsprechend Gl. (2.58)

$$\chi^2_{1-\alpha/2, f} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2, f} \quad (2.69)$$

ergibt sich das Konfidenzintervall von  $\sigma^2$  zu

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2, f}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, f}}. \quad (2.69)$$

Umfangreiche weiterführende Betrachtungen zu allen angeschnittenen Fragen sind in [2.1 bis 2.12] enthalten.

## 2.4. Übungsaufgaben zum Abschnitt 2

### Aufgabe 2.1

Gegeben ist die im Bild 2.15 dargestellte Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße  $X$ . Lösen Sie folgende Teilaufgaben:

- Beschreiben Sie analytisch die Verteilungsfunktion, und berechnen Sie die Verteilungsdichte!
- Berechnen Sie den Erwartungswert!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Wert der Zufallsgröße im Intervall  $[0; 3]$ ?

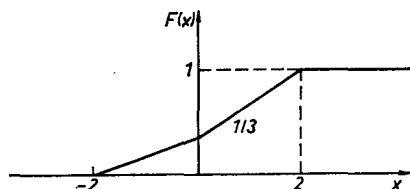


Bild 2.15  
Verlauf der Verteilungsfunktion  $F(x)$   
für Aufgabe 2.1

### Aufgabe 2.2

Bei einem Spiel werden zwei Würfel zugleich geworfen und die Augenzahl zu einer diskreten Zufallszahl  $x$  addiert.

- Berechnen und skizzieren Sie die Verteilung und Verteilungsfunktion!
- Berechnen Sie den Erwartungswert!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen die für jeweils einen Wert summierten Augenzahlen  $x$  in dem Intervall  $[6; 12]$ ?

### Aufgabe 2.3

Gegeben sind die in Tafel 2.8 angegebenen Stichproben von drei stetigen Zufallsgrößen.

- Bestimmen Sie aufgrund einer Klasseneinteilung für jede Stichprobe die empirische Verteilung; skizzieren Sie diese, und vergleichen Sie sie mit bekannten Verteilungsgesetzen!

- Berechnen Sie ausgehend von den empirisch ermittelten Verteilungen die Momente Mittelwert, Streuung und Schiefe, und vergleichen Sie diese für die erste Stichprobe mit den aus den Stichprobenwerten direkt bestimmten (exakten) Momenten!

Tafel 2.8. Stichproben von drei stetigen Zufallsgrößen

#### Auswahl 1

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,00  | -1,26 | 0,12  | 0,24  | -0,50 | 0,91  | -0,21 |
| -2,25 | -0,25 | -0,79 | 0,24  | -0,60 | -1,19 | 1,74  |
| 0,28  | -0,45 | 0,41  | -0,05 | -0,48 | -0,11 | 3,36  |
| 0,76  | 1,40  | 0,33  | -0,04 | -1,09 | -0,52 | 0,37  |
| 2,38  | 0,43  | 0,02  | -2,07 | -1,51 | -0,73 |       |
| -0,18 | -0,28 | 0,61  | -0,50 | -1,71 | -0,09 |       |

#### Auswahl 2

|      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|
| 0,53 | 0,70 | 0,20 | 0,79 | 0,97 | 0,12 | 0,34 |
| 0,99 | 0,44 | 0,36 | 0,79 | 0,82 | 0,67 | 0,15 |
| 0,69 | 0,87 | 0,36 | 0,56 | 0,93 | 0,03 | 0,01 |
| 0,77 | 0,27 | 0,31 | 0,79 | 0,61 | 0,00 | 0,94 |
| 0,05 | 0,26 | 0,56 | 0,92 | 0,80 | 0,29 |      |
| 0,65 | 0,51 | 0,98 | 0,96 | 0,86 | 0,60 |      |

#### Auswahl 3

|     |     |    |     |     |     |     |
|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| 199 | 40  | 20 | 42  | 72  | 28  | 106 |
| 156 | 260 | 17 | 16  | 35  | 96  | 23  |
| 31  | 22  | 45 | 300 | 3   | 145 | 24  |
| 370 | 155 | 42 | 86  | 58  | 44  | 190 |
| 85  | 92  | 61 | 38  | 192 | 20  |     |
| 134 | 13  | 13 | 70  | 110 | 78  |     |

### Aufgabe 2.4

Das Lackmaß einer Beschichtungsanlage in einer Fertigungszelle der Mikroelektronik habe den Erwartungswert  $\mu = 8 \mu\text{m}$  und die Streuung  $\sigma^2 = 0,4 (\mu\text{m})^2$ . Eine Überprüfung der Anlage durch 150 Proben ergab ein mittleres Lackmaß von  $\bar{x} = 8,3 \mu\text{m}$ . Ist diese Abweichung vom Erwartungswert als zufällig oder als signifikant bei einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$  zu bezeichnen?

### Aufgabe 2.5

Bei der Qualitätskontrolle an 15 Werkstücken werden mittels zweier verschiedener Längenmeßgeräte, einem mechanischen (I) und einem optischen (II), die in Tafel 2.9 angegebenen Abweichungen (in  $\mu\text{m}$ ) vom vorgegebenen Sollmaß ermittelt. Treffen Sie eine Aussage, ob sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0,01$  die beiden Geräte hinsichtlich der Meßgenauigkeit wesentlich voneinander unterscheiden!

Tafel 2.9. Abweichungen der Länge von Werkstücken in  $\mu\text{m}$

| Werkstück | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15               |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------------------|
| Gerät I   | 70 | 70 | 60 | 70 | 60 | 60 | 80 | 70 | 70 | 70 | 70 | 50 | 70 | 80 | 60 $\mu\text{m}$ |
| Gerät II  | 80 | 70 | 70 | 60 | 70 | 70 | 80 | 70 | 60 | 80 | 70 | 70 | 70 | 80 | 70 $\mu\text{m}$ |

### Aufgabe 2.6

Der Hersteller einer Steuereinrichtung für die Innentemperatur von Gewächshäusern behauptet, daß durch seine Einrichtung ein Temperatursollwert von  $24^\circ\text{C}$  mit einer Streuung von  $\sigma^2 = 0,25 (^\circ\text{C})^2$  eingehalten wird.

Ist diese Behauptung des Herstellers mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  aufgrund der in Tafel 2.10 dargestellten Messungen noch aufrechtzuerhalten?

Tafel 2.10. Messungen der Innentemperatur eines Gewächshauses

| Messungen          | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Innentemperatur °C | 24,6 | 23,4 | 24,6 | 24,1 | 23,7 | 23,8 | 24,1 | 24,0 | 23,5 | 24,2 |

## Aufgabe 2.7

Der Sauerstoffgehalt eines Gewässers wurde mit zwei verschiedenen Methoden ( $O_2'$  und  $O_2''$ ) bestimmt (s. Tafel 2.11). Prüfen Sie die Hypothese, daß sich die Streuungen der Meßwerte beider Methoden nur zufällig unterscheiden (mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 5\%$ )!

Tafel 2.11. Meßergebnisse des Sauerstoffgehalts eines Gewässers

|                 |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $O_2'$ in mg/l  | 5,5 | 5,0 | 5,3 | 5,6 | 5,8 |     |     |     |
| $O_2''$ in mg/l | 5,9 | 4,5 | 5,2 | 4,3 | 5,0 | 5,4 | 5,3 | 4,8 |

## Aufgabe 2.8

Aus 11 Belastungstests einer männlichen Person mit einem Fahrradergometer bei einer Belastung von 90 W wurde eine mittlere Herzfrequenz von  $\bar{x} = 155 \text{ min}^{-1}$  und eine Streuung  $s^2 = 12,3 (\text{min}^{-1})^2$  ermittelt. Bestimmen Sie für den Erwartungswert der Herzfrequenz den 95%-Vertrauensbereich!

## Aufgabe 2.9

Aus einer Stichprobe von 20 Posten einer Fertigungszelle der Mikroelektronik wurde eine Ausbeute an funktionstüchtigen Chips mit einem Mittelwert von  $\bar{x} = 14,3\%$  und einer Streuung von  $s^2 = 1,8 (\%)^2$  ermittelt.

Bestimmen Sie das Konfidenzintervall der Streuung für die Ausbeute mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 0,1$ !

## Aufgabe 2.10

Gegeben sind die in Tafel 2.12 dargestellten Werte einer zweidimensionalen Zufallsgröße.

- Bestimmen Sie auf der Grundlage der Klasseneinteilung die Verbundwahrscheinlichkeitswerte!
- Berechnen Sie die Randverteilungen, und stellen Sie die Randverteilungen grafisch dar! Schließen Sie auf die Art der Verteilung!
- Berechnen Sie ausgehend von der Klasseneinteilung den totalen Korrelationskoeffizienten  $\hat{\rho}_{xy}$ ; interpretieren Sie das Ergebnis anhand der zweidimensionalen Verteilung!

## Aufgabe 2.11

Berechnen Sie den totalen Korrelationskoeffizienten für den Zusammenhang  $y = x^2$ , und diskutieren Sie das Ergebnis!

Die Werte für  $x$  werden wie folgt vorgegeben:

- $x = -2, -1, 1, 2$
- $x = -1, 0, 1, 2$
- $x = 1, 2, 3, 4$

## Aufgabe 2.12

Die in Tafel 2.13 dargestellten Werte einer zweidimensionalen Zufallsgröße wurden gemessen. Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten, und überprüfen Sie, ob dieser Wert statistisch gesichert ist!

Der kritische Korrelationskoeffizient für  $n = 7$ ,  $\alpha = 5\%$  lautet  $r_{\text{krit}} = 0,666$  (s. Tafel A 6).

Tafel 2.12  
Meßwerte einer zweidimensionalen Zufallsgröße

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|-------|-------|-------|-------|
| 0,35  | 0,97  | 0,35  | 1,86  |
| 1,24  | 0,12  | 1,58  | 0,76  |
| 2,21  | 3,17  | -1,67 | 0,85  |
| 0,47  | -0,83 | 0,55  | 0,76  |
| 1,99  | 2,45  | 0,31  | 0,97  |
| 2,34  | 3,24  | 2,88  | 3,63  |
| -0,22 | 1,73  | 1,33  | 1,86  |
| 0,95  | 1,05  | 1,25  | 2,53  |
| 0,66  | -0,56 | 0,97  | 2,66  |
| 0,28  | 0,87  | 1,95  | 2,55  |
| 1,43  | 1,95  | -0,35 | -0,18 |
| -1,03 | -0,88 | 1,41  | 2,37  |
| -0,42 | -1,17 | -0,26 | -0,66 |
| -0,51 | 0,03  | 0,15  | 0,80  |
| 2,85  | 3,12  | 2,15  | 2,54  |
| 3,43  | 3,28  | 0,64  | 1,56  |
| 1,37  | 3,22  | -0,41 | 0,05  |
| 1,25  | 3,25  | 1,20  | 1,84  |
| 0,44  | -0,10 | 1,33  | 2,45  |
| 0,52  | -0,15 | 0,52  | -0,12 |

Tafel 2.13. Meßwerte einer zweidimensionalen Zufallsgröße

| $x_i$ | $y_i$ |
|-------|-------|
| 0     | 3     |
| 2     | 6     |
| 1     | 4     |
| 4     | 11    |
| 3     | 7     |
| 5     | 10    |
| 6     | 8     |

## Aufgabe 2.13

Als Merkmal für die Güte  $x$  eines fließenden Gewässers dient der Sauerstoffanteil im Wasser. Folgende Faktoren wirken auf die Wasserqualität ein:

- |                                      |                                   |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| $u_1$ biochemischer Sauerstoffbedarf | $u_4$ $\text{NO}_3$ -Verbindungen |
| $u_2$ Wassertemperatur               | $u_5$ $\text{NH}_4$ -Verbindungen |
| $u_3$ Durchfluß                      | $u_6$ Permanganatverbrauch        |

Aus 67 Beobachtungen über einen längeren Zeitraum wurden die in Tafel 2.14 partiellen Korrelationskoeffizienten berechnet.

Gesucht ist die Matrix der signifikanten Korrelationskoeffizienten für eine Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0,1$  bzw.  $\alpha = 0,01$ !

Tafel 2.14. Ermittelte Korrelationskoeffizienten

|       | $u_1$  | $u_2$  | $u_3$  | $u_4$  | $u_5$  | $u_6$  | $x$ |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| $u_1$ | 1      |        |        |        |        |        |     |
| $u_2$ | 0,358  | 1      |        |        |        |        |     |
| $u_3$ | 0,052  | 0,033  | 1      |        |        |        |     |
| $u_4$ | -0,050 | -0,221 | -0,136 | 1      |        |        |     |
| $u_5$ | 0,236  | -0,318 | -0,072 | -0,012 | 1      |        |     |
| $u_6$ | 0,046  | 0,144  | -0,079 | -0,016 | 0,015  | 1      |     |
| $x$   | 0,447  | -0,729 | 0,077  | 0,083  | -0,374 | -0,058 | 1   |

### 3. Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Signalen

Bei der Lösung vieler Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Vorhersageaufgaben ist es notwendig, den zeitlichen Ablauf eines Signals zu beschreiben. Hierzu dienen sowohl zeitliche als auch spektrale Kennfunktionen. Als Signal wird der zeitliche Verlauf einer physikalischen Größe angesehen, wenn dieser Verlauf mindestens einen Parameter aufweist, der die zu signalisierende Größe abbildet [3.2, 3.3] (s. auch TGL 14591). In Abhängigkeit davon, ob die Beschreibung als Funktion der Zeit  $t$  oder der Frequenz  $\omega$  erfolgt, wird von der Beschreibung im *Zeitbereich* oder im *Frequenzbereich* gesprochen. Die Werte der das Signal kennzeichnenden Parameter (z. B. Amplituden- oder Frequenzwerte) zu verschiedenen Zeiten werden auch als Signalwerte bezeichnet. Werden die Signalwerte für eine digitale Verarbeitung durch Anpassungs-, Umsetz- und Formierungsglieder kodiert, bezeichnet man sie als Daten [3.2]. Häufig werden jedoch im Sprachgebrauch auch die erfaßten Signalwerte als Daten bezeichnet. Eine weitere wichtige Untergliederung der Signalbeschreibungen ergibt sich, wenn die Reproduzierbarkeit des Signals betrachtet wird. Läßt sich der zeitliche Verlauf des Signals reproduzieren und exakt vorhersagen, wird von *deterministischen Signalen* (s. Abschn. 3.1), im anderen Fall von *nichtdeterministischen/stochastischen Signalen* (s. Abschn. 3.2) gesprochen. Nach diesen Gesichtspunkten sind die folgenden Abschnitte aufgebaut. Neben einer Einführung und einem Überblick sollen sie dazu dienen, aus der Vielfalt der Modelle für den jeweiligen Anwendungsfall das nach Eigenschaften geeignetste Modell auswählen zu können.

#### 3.1. Grundlagen der Beschreibung deterministischer Signale

In der Systemtheorie haben deterministische Signale eine große Bedeutung als

1. Grundbausteine beliebiger Signalverläufe und als
2. Testsignale der experimentellen Prozeßanalyse.

Die vorgestellten elementaren deterministischen Signalmodelle schließen an die Ausführungen in den Lehrbüchern von *Reinisch* [1.2, 3.1], *Günther* [3.2], *Isermann* [1.44], *Strobel* [1.46] und *Eykhoﬀ* [1.47] an. In ihnen sind auch weiterführende Betrachtungen enthalten.

##### 3.1.1. Modelle im Zeitbereich

##### 3.1.1.1. Beschreibung kontinuierlicher Signale

Grundsätzlich kann ein deterministisches Signal  $x(t)$  gekennzeichnet werden durch den zeitlichen Verlauf

$$x = x(t) \quad \text{für} \quad -\infty < t < +\infty. \quad (3.1)$$

In einigen Fällen ist es möglich, das Signal  $x(t)$  innerhalb des betrachteten Zeitintervalls geschlossen analytisch zu beschreiben.

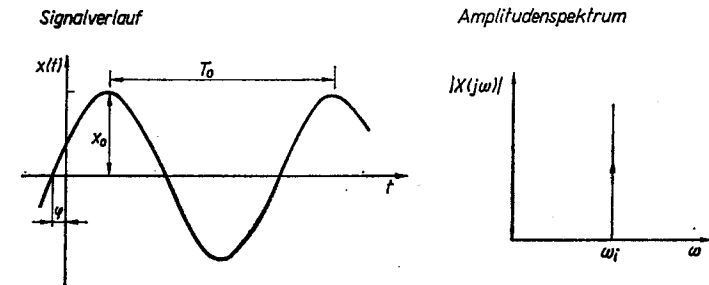
Typisch sind folgende Fälle:

##### Harmonische Signale

– in der trigonometrischen Darstellung (Bild 3.1)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad \text{für} \quad -\infty < t < +\infty; \quad (3.2)$$

$\omega_i = 2\pi/T_i$   
 $T_i$  Periode des Signals  
 $\varphi_i$  Phase;



**Bild 3.1**  
 Harmonisches Signal und sein Amplitudenspektrum  
 $|X(j\omega)|$  Betrag der komplexen Größe  $X(j\omega)$ , bezeichnet als Amplitudendichtespektrum; s. Abschnitt 3.1.2

– in der komplexen Darstellung bei Verwendung der Eulerschen Beziehungen

$$\hat{x}(t) = x_0 e^{j(\omega_i t + \varphi_i)} = \hat{x}_0 e^{j\omega_i t} \quad (3.3)$$

mit  $\hat{x}_0 = x_0 e^{j\varphi_i}$ .

##### Exponentielle Signale

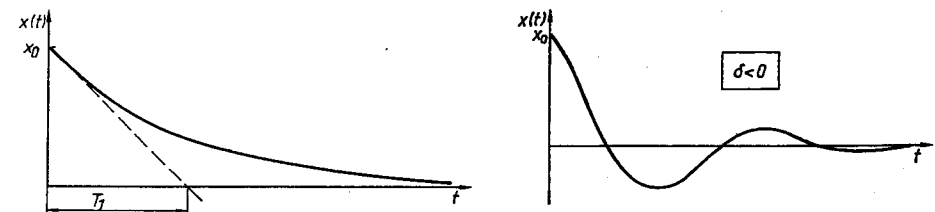
– aperiodisch exponentieller Verlauf (Bild 3.2)

$$x(t) = x_0 e^{-t/T} \quad \text{für} \quad 0 \leq t < +\infty; \quad (3.4)$$

– periodisch exponentieller Verlauf (Bild 3.3)

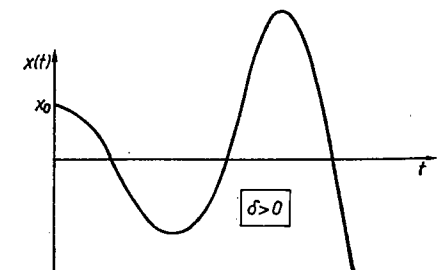
$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0 e^{j\omega_i t} e^{\delta t} \quad \text{für} \quad 0 \leq t < +\infty \quad (3.5)$$

mit  $\delta \neq 0$ .



**Bild 3.2.** Verlauf eines aperiodischen exponentiellen Signals

**Bild 3.3**  
 Mögliche Verläufe eines exponentiellen Signals mit periodischer Komponente



**Periodische Signale**

Jedes periodische Signal  $x(t)$  mit der Periode  $T_0$  kann durch eine Fourier-Reihe der Form

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \cos(i\omega_0 t) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i \sin(i\omega_0 t), \quad (3.6)$$

$\omega_0 = 2\pi/T_0$  Frequenz der Grundwelle,  
beschrieben werden (Bild 3.4).

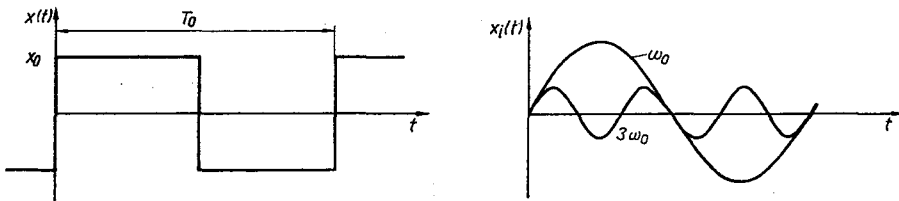


Bild 3.4. Grundkonzept der Zerlegung periodischer Signale in Teilschwingungen  $x_i(t)$

Die Amplitudenwerte  $a_i$  und  $b_i$  werden nach folgenden Vorschriften berechnet:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) \cos(i\omega_0 t) dt \\ b_i &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) \sin(i\omega_0 t) dt \\ a_0 &= \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für einige typische periodische Signale sind in Tafel 3.1 die Fourier-Koeffizienten dargestellt. Werden die jeweils gleichfrequenten cos- und sin-Glieder von Gl. (3.6) zu je einer harmonischen komplexen Schwingung zusammengefaßt, erhält man als Signalmodell

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i e^{j(i\omega_0)t}. \quad (3.8)$$

Tafel 3.1. Ausgewählte Signalverläufe und ihre Fourier-Reihen-Entwicklungen

| Signalverlauf | Fourier-Reihen-Entwicklung                                                                                                                     |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|               | $x(t) = \frac{4x_0}{\pi} \left[ \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$                 |
|               | $x(t) = \frac{8x_0}{\pi^2} \left[ \frac{\sin \omega_0 t}{1} - \frac{\sin 3\omega_0 t}{3^2} + \frac{\sin 5\omega_0 t}{5^2} + \dots \right]$     |
|               | $x(t) = \frac{x_0}{2} + \frac{2x_0}{\pi} \left[ \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$ |

In diesem Modell sind die  $c_i$  die komplexen Fourier-Koeffizienten, die aus der Beziehung

$$c_i = \frac{1}{2} (a_i - jb_i) = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) e^{-j(i\omega_0)t} dt \quad (3.9)$$

ermittelt werden. Für  $i = 0$  gilt analog zu Gl. (3.7)  $c_0 = a_0/2 = \bar{x}$  und  $b_0 = 0$ .

**Aperiodische Signale**

Neben dem in Gl. (3.4) beschriebenen exponentiellen aperiodischen Signal sind die in Tafel 3.2 dargestellten Signale von großer Bedeutung für die experimentelle Prozeßanalyse. Wesentlich ist, daß die analytische Beschreibung häufig aufgrund der Unstetigkeiten nur stückweise erfolgen kann. So gilt für

– die Sprungfunktion

$$x(t) = x_0 \sigma(t) \quad (3.10)$$

mit der Einheitssprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Tafel 3.2. Typische elementare Signale und ihre Amplitudenspektren

| Signalverlauf             | Amplitudenspektrum                                                                                 |
|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Sprungfunktion</b><br> | $ X(j\omega)  = \frac{x_0}{\omega}$<br>                                                            |
| <b>Impulsfunktion</b><br> | $ X(j\omega)  = x_0 T^* \left  \frac{\sin \frac{\omega T^*}{2}}{\frac{\omega T^*}{2}} \right $<br> |
| <b>Dirac-Impuls</b><br>   | $ X(j\omega)  = x_0 T^*$<br>mit $x_0 \rightarrow \infty$<br>$T^* \rightarrow 0$<br>                |
| <b>Rampenfunktion</b><br> | $ X(j\omega)  = \frac{x_0}{\omega^2 T^*}$<br>                                                      |

– den Rechteckimpuls

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > T \\ x_0 & \text{für } 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.11)$$

– den Dirac-Impuls

$$x(t) = \delta(t) \quad (3.12)$$

mit

$$\delta(t) = 0 \quad \text{für } t \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

– die Rampenfunktion

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ at & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

### 3.1.1.2. Beschreibung abgetasteter kontinuierlicher Signale

Ein abgetastetes Signal  $x^*(t)$  erhält man aus einem kontinuierlichen Signal  $x(t)$  durch eine Abtastung zu den Zeitpunkten  $t_k$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$  (Bild 3.5). In sehr vielen Fällen wird davon ausgegangen, daß die Abtastung der Signale zu äquidistanten Zeitpunkten mit einer Abtastperiode  $T$  erfolgt. Diese Annahme gilt für alle Betrachtungen in diesem Buch. Das abgetastete Signal kann durch eine Folge von gewichteten Dirac-Impulsen beschrieben werden. Sie hat die Form

$$x^*(t) = x(0) \delta(t) + x(T) \delta(t - T) + \dots$$

bzw.

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

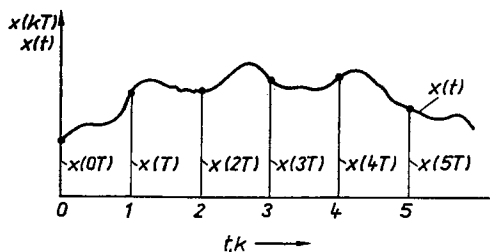


Bild 3.5  
Wertefolge  
eines abgetasteten  
kontinuierlichen  
Signals  $x(t)$

In dieser Modellvorstellung wird der Abtaster als Modulator betrachtet, bei dem  $x(t)$  das modulierende Signal und die Dirac-Impuls-Folge der Träger der Information ist. Die Fläche der gewichteten Dirac-Impulse ist gleich dem Wert des Signals  $x(t)$  zu den Tastpunkten  $t = kT$ .

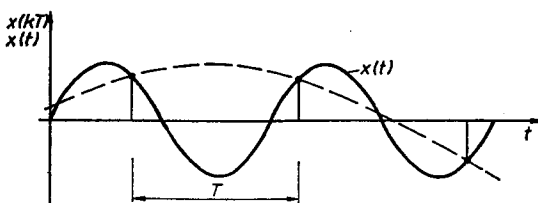


Bild 3.6  
Einfluß der Tastperiode  
auf die Abbildung  
des Signals  $x(t)$

Die Genauigkeit, mit der  $x^*(t)$  das kontinuierliche Signal  $x(t)$  repräsentiert, erhöht sich mit kleiner werdender Abtastzeit  $T$ . Eine Beziehung zur Festlegung der Abtastzeit  $T$  ist durch das Abtasttheorem von Shannon

$$T \leq 1/2f_{\max} \quad (3.15)$$

gegeben. In Gl. (3.15) ist  $f_{\max}$  die höchste im Signal  $x(t)$  enthaltene Frequenz einer Teil-schwingung. Ist die Abtastperiode  $T$  größer als der in Gl. (3.15) angegebene Wert, ist das Signal  $x(t)$  aus dem abgetasteten Signal nicht mehr exakt reproduzierbar (s. Bild 3.6).

## 3.1.2. Modelle im Frequenzbereich

### 3.1.2.1. Beschreibung kontinuierlicher Signale

**Beschreibung harmonischer Signale.** Ausgangspunkt für die Beschreibung harmonischer Schwingungen im Frequenzbereich sind die Gln. (3.2) und (3.3), die das Signal im Zeitbereich beschreiben. Der Übergang zur Darstellung im Frequenzbereich erfolgt dadurch, daß die Parameter der Amplitude  $x_0$  und der Phase  $\varphi$  in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\omega$  dargestellt werden. Damit hat die harmonische Schwingung ein Spektrum mit je einer einzigen Spektrallinie im Amplituden- und im Phasenspektrum (s. Bild 3.1).

Aus der komplexen Darstellung des Signals von Gl. (3.3) erhält man den Real- und Imaginärteil zu

$$\hat{x}(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{x}(t) \} + j \operatorname{Im} \{ \hat{x}(t) \}. \quad (3.16)$$

Damit ergibt sich die Amplitude zu

$$|\hat{x}_0| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \{ \hat{x}_0 \} + \operatorname{Im}^2 \{ \hat{x}_0 \}} \quad (3.17)$$

und die Phase zu

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} \{ \hat{x}_0 \}}{\operatorname{Re} \{ \hat{x}_0 \}}. \quad (3.18)$$

Das Amplituden- und Phasenspektrum entsteht, wenn mehrere Frequenzen  $\omega_i$  vorliegen.

**Beschreibung durch das Fourier-Integral.** Wird von einem periodischen Signalverlauf, der durch die Fourier-Reihe von Gl. (3.8) ausreichend beschrieben wird, zu einem nicht-periodischen Signal (d. h.  $T_0 \rightarrow \infty$ ) übergegangen, gewinnt man eine Darstellung, die als *Fourier-Integral* bezeichnet wird. Damit geht die Gleichung der Fourier-Koeffizienten (3.9), sofern das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.19)$$

ist, in das Fourier-Integral über. Es gilt dann für das komplexe Signal

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.20)$$

Das in Gl. (3.20) dargestellte Integral wird auch als *Fourier-Transformation* des Signals  $x(t)$  bezeichnet und symbolisch durch die Form

$$X(j\omega) = \mathcal{F} \{ x(t) \} \quad (3.21)$$

beschrieben.

Für den zeitlichen Verlauf des Signals gilt analog zur Beschreibung der Fourier-Reihe Gl. (3.8)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d(j\omega). \quad (3.22)$$

Da die Fourier-Transformierte von  $x(t)$  eine komplexe Funktion mit

$$X(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

ist, erhält man das Amplitudenspektrum als

$$|X(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \quad (3.23)$$

und das Phasenspektrum durch die Beziehung

$$\varphi(\omega) = \arctan V(\omega)/U(\omega). \quad (3.24)$$

In Tafel 3.2 und Bild 3.1 sind für ausgewählte Signaltypen die Amplitudenspektren dargestellt. Sie geben eine sehr gute Information über die Amplituden der einzelnen periodischen Komponenten des Gesamtsignals. Deutlich wird bei der Verwendung dieser Signale als Testsignale, daß eine einzelne periodische Schwingung Systeme nur an der Stelle  $\omega_i$  erregt und mit Ausnahme der Nadelfunktion alle Amplitudenspektren mit zunehmender Frequenz abnehmen. Damit werden hochfrequente Bereiche von Systemen nicht ausreichend erregt, und die Genauigkeit der diesen Bereich beschreibenden Parameter nimmt ab (s. Abschn. 4).

**Beschreibung durch das Laplace-Integral.** Die für die Anwendung der Fourier-Transformation von Gl. (3.19) notwendige Bedingung ist bei beliebigen instabilen Signalverläufen – s. Bild 3.2 und Gl. (3.5) – nicht mehr erfüllt. Durch die Modifizierung der periodischen Signale von Gl. (3.3) mit dem Faktor  $e^{-\delta t}$  entsprechend Gl. (3.5) ergibt sich das Fourier-Integral zu

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\delta + j\omega)t} dt. \quad (3.25)$$

Führt man die komplexe Frequenz

$$p = \delta + j\omega \quad (3.26)$$

ein, so erhält man das *Laplace-Integral* zu

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (3.27)$$

Für das Umkehrintegral gilt analog zu Gl. (3.22)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X(p) e^{pt} dp. \quad (3.28)$$

Das in Gl. (3.27) dargestellte Integral wird auch als *Laplace-Transformation* des Signals  $x(t)$  bezeichnet und symbolisch durch den Ausdruck

$$X(p) = \mathfrak{L}\{x(t)\} \quad (3.29)$$

beschrieben.

### 3.1.2.2. Beschreibung abgetasteter kontinuierlicher Signale

Eine Beschreibung diskontinuierlicher Signale erhält man durch die Anwendung der Laplace-Transformation auf die in Gl. (3.14) angegebene Wertefolge. Da die Laplace-Transformierte des Dirac-Impulses  $\delta(t)$  zum Zeitpunkt  $(t - kT)$

$$\mathfrak{L}\{\delta(t - kT)\} = e^{-pkT} \quad (3.30)$$

ist, erhält man für die Wertefolge im Frequenzbereich

$$\mathfrak{L}^*\{x^*(t)\} = X^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-pkT}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

Die in Gl. (3.31) dargestellte Beziehung wird als einseitige diskrete Laplace-Transformation bezeichnet.

Wird eine weitere Variablentransformation mit

$$z = e^{pT} \quad (3.32)$$

vorgenommen, erhält man die einseitige *z-Transformierte* der Wertefolge zu

$$Z\{x^*(t)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Ausführliche und weiterführende Betrachtungen zu dieser Beschreibungsform sind in [1.2, 3.3] enthalten.

Für nach Gl. (3.14) beschränkte Signale geht die Fourier-Transformierte von Gl. (3.20) für das kontinuierliche Signal im abgetasteten Fall in die *diskrete Fourier-Transformierte*

$$X^*(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) e^{-j\omega kT}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.34)$$

über. Wenn eine endliche Beobachtungszeit von  $2T_0$  mit  $2n$  Beobachtungen angenommen wird, erhält man für die diskrete Fourier-Transformierte von Gl. (3.34)

$$X^*(j\omega) = \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) e^{-j(\omega k m/n)} \quad (3.35)$$

mit  $t = kT$ ,  $\omega = m\omega_0 = m2\pi/2nT = m\pi/nT$ ,  $T_0 = nT$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ ;  $\omega_0 = 2\pi/2T_0$  Grundwelle des Signals im Beobachtungszeitraum.

Für die Rücktransformation gilt

$$x(kT) = \frac{1}{2n} \sum_{m=-n}^{+n} X^*(j\omega) e^{j(\omega k m/n)}. \quad (3.36)$$

## 3.2. Grundlagen der Beschreibung stochastischer Signale

### 3.2.1. Grundbegriffe

Die bisherigen Beschreibungen des dynamischen Verhaltens von Signalen beziehen sich nur auf Signale, deren zeitlicher Verlauf eindeutig analytisch formulierbar ist. In sehr vielen Aufgaben spielen Zufallsgrößen  $x$  eine wichtige Rolle, deren Werte Funktionen

der Zeit sind. Man bezeichnet Zufallsgrößen  $x(t)$  mit dieser Eigenschaft als zufällige oder stochastische Funktionen. Sie sind als Realisierungen eines *stochastischen Prozesses* anzusehen. Der zeitliche Verlauf eines solchen Signals ist nicht reproduzierbar, und sein weiterer Verlauf kann nicht eindeutig aus der zurückliegenden Zeit ermittelt werden. Im Bild 3.7 sind mögliche Signalverläufe einer Zufallsfunktion dargestellt.

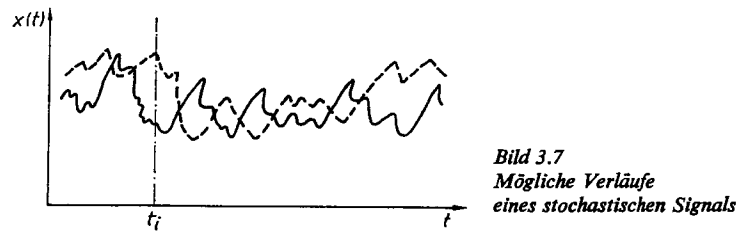


Bild 3.7  
Mögliche Verläufe  
eines stochastischen Signals

Für die praktische Anwendung von Beschreibungsformen von stochastischen Prozessen sind die Begriffe der *Stationarität* und *Ergodizität* von zentraler Bedeutung.

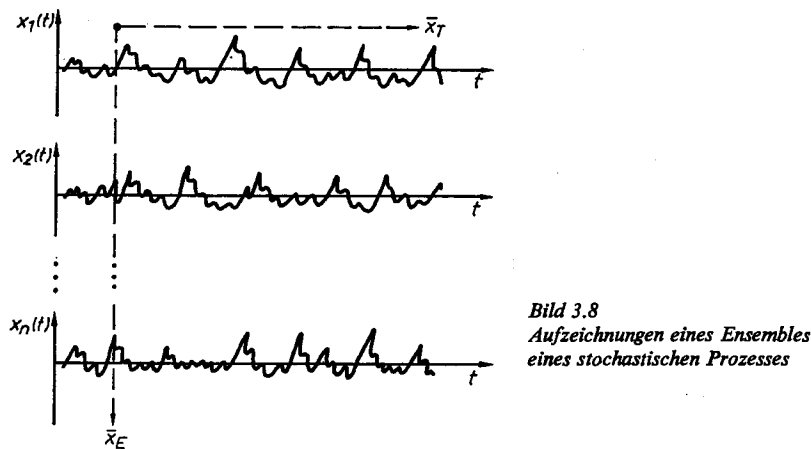


Bild 3.8  
Aufzeichnungen eines Ensembles  
eines stochastischen Prozesses

Als stationär wird ein stochastischer Prozeß bezeichnet, wenn seine statistischen Eigenschaften unabhängig von jeder zeitlichen Verschiebung  $T$  sind. Damit gilt für die Verteilungsdichtefunktionen

$$f(x, t) = f(x, t + \tau) = f(x). \quad (3.37)$$

Als ergodisch (wegunabhängig) wird ein stochastischer Prozeß dann bezeichnet, wenn der Mittelwert  $\bar{x}_E$  über das Ensemble (d.h.  $n$  Realisierungen des Zufallsprozesses) mit dem zeitlichen Mittelwert  $\bar{x}_R$  einer beliebig ausgewählten Realisierung des Ensembles übereinstimmt (Bild 3.8), wenn also gilt

$$\bar{x}_E = \bar{x}_R. \quad (3.38)$$

Jeder ergodische Prozeß ist stationär; die Umkehrung gilt nicht. Während die Eigenschaft der Stationarität praktisch gut nachgewiesen werden kann, ist die Bedingung der Ergodizität aufgrund des häufig fehlenden Ensembles schwierig.

### 3.2.2. Beschreibung stochastischer Signale im Zeitbereich

Neben den Kenngrößen Erwartungswert und Streuung für das stochastische Signal  $x(t)$  – s. Gl. (2.11) und (2.14) – hat die Beschreibung des dynamischen Verhaltens eine große Bedeutung. Sie erfolgt im Zeitbereich durch die Korrelationsfunktionen.

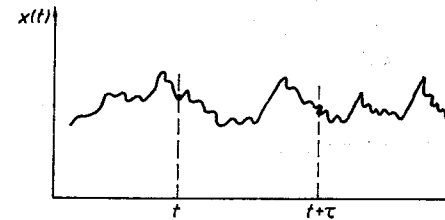


Bild 3.9  
Stochastische Signalwerte  $x(t)$   
und  $x(t + \tau)$  zur Ermittlung  
der Autokorrelationsfunktion

#### 3.2.2.1. Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$

Wird von dem im Bild 3.9 gegebenen stetigen stochastischen Signal  $x(t)$  ausgegangen, so wird durch die *Autokorrelationsfunktion*  $R_{xx}(\tau)$  der mittlere lineare statistische Zusammenhang der Zufallsgröße  $x(t)$  zu den Zeitpunkten  $t$  und  $t + \tau$  beschrieben. Allgemein beruht ihre Berechnung auf der Kovarianz – s. Gl. (2.24) –, und es gilt

$$R_{xx}(\tau) = E \{x(t) x(t + \tau)\}. \quad (3.39)$$

Für eine ergodische Zufallsgröße kann das Ensemblemittel durch den zeitlichen Mittelwert ersetzt werden. Damit gelten die folgenden Berechnungsvorschriften:

– stetige stochastische Signale

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) x(t + \tau) dt, \quad (3.40)$$

– diskrete stochastische Signale ( $n$  Beobachtungen)

a) für periodische stochastische Signale

$$R_{xx}(mT) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(kT) x[(k + m)T] \quad (3.41)$$

mit  $\tau = mT$ ,  $t = kT$ ,  $nT$  Periode,  $m = 0, 1, 2, \dots, l$ ,  $l < n$ ,

b) für nichtperiodische stochastische Signale

$$R_{xx}(mT) = \frac{1}{n - m} \sum_{k=1}^{n-m} x(kT) x[(k + m)T]. \quad (3.42)$$

Die Autokorrelationsfunktion auf den Mittelwert normierter Signale wird als Autokovarianzfunktion bezeichnet.

Die Autokorrelationsfunktion  $R_{xx}(\tau)$  besitzt folgende wichtige Eigenschaften:

1. Die Autokorrelationsfunktion ist eine gerade Funktion:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau). \quad (3.43)$$

2. Der Anfangswert der Autokorrelationsfunktion ist gleich der mittleren Signalleistung:

$$R_{xx}(0) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x^2(t) dt \geq |R_{xx}(\tau)|. \quad (3.44)$$

3. Eine periodische Komponente in  $x(t)$  mit der Periode  $T_i$  ergibt eine periodische Komponente mit der Periode  $T_i$  in  $R_{xx}(\tau)$ ; die Phaseninformation geht verloren.

4. Die Autokorrelationsfunktion einer konstanten Größe bzw. des Gleichanteils eines Signals ist gleich dem Quadrat des Mittelwerts des Signals:

$$R_{xx}(\tau) = \bar{x}^2. \quad (3.45)$$

5. Wenn ein stochastisches Signal einen konstanten Anteil hat,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) \neq 0,$$

gilt für die Streuung des Signals

$$\sigma_x^2 = R_{xx}(0) - R_{xx}(\infty). \quad (3.46)$$

6. Sind im stochastischen Signal keine periodische Komponente und kein Gleichanteil enthalten, geht der innere stochastische Zusammenhang für  $\tau \rightarrow \infty$  verloren:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = 0. \quad (3.47)$$

Zum besseren Verständnis sind in Tafel 3.3 die zeitlichen Verläufe von typischen Signalen und ihre Autokorrelationsfunktionen dargestellt. Diese Autokorrelationsfunktionen

Tafel 3.3. Signalverläufe und ihre Autokorrelationsfunktionen/Leistungsdichtespektren

| Signalverlauf                                                            | Autokorrelationsfunktion                            | Leistungsdichtespektrum                                  |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| <p><math>x(t)</math> <math>x</math> weißes Rauschen <math>x</math></p>   | <p><math>R_{xx}(\tau)</math></p>                    | <p><math>S_{xx}(\omega)</math></p>                       |
| <p><math>x(t)</math> <math>x</math> farbiges Rauschen <math>x</math></p> | <p><math>R_{xx}(\tau)</math></p>                    | <p><math>S_{xx}(\omega)</math></p>                       |
| <p><math>x(t)</math> <math>T_i</math></p>                                | <p><math>R_{xx}(\tau)</math> <math>T_i</math></p>   | <p><math>S_{xx}(\omega)</math> <math>\omega_i</math></p> |
| <p><math>x(t)</math> <math>x_0</math></p>                                | <p><math>R_{xx}(\tau)</math> <math>x_0^2</math></p> | <p><math>S_{xx}(\omega)</math></p>                       |

werden besonders zur Deutung innerer Zusammenhänge von Signalen, zur Ermittlung von Autoleistungsdichtespektren (s. Abschn. 3.2.3) und zur Ermittlung von Systemmodellen (s. Abschn. 3.2.4) verwendet.

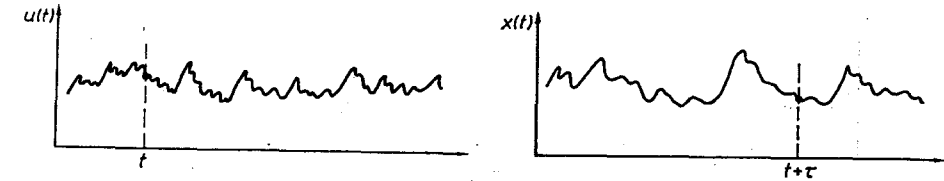


Bild 3.10. Stochastische Signalwerte  $u(t)$  und  $x(t + \tau)$  zur Ermittlung der Kreuzkorrelationsfunktion

### 3.2.2.2. Kreuzkorrelationsfunktion $R_{ux}(\tau)$

Die Kreuzkorrelationsfunktion  $R_{ux}(\tau)$  ist ein Maß für den mittleren linearen statistischen Zusammenhang zwischen den stochastischen Signalen  $u(t)$  und  $x(t)$  mit der Zeitverschiebung  $\tau$  (Bild 3.10). Als allgemeine Berechnungsvorschrift gilt analog zu Gl. (3.39):

$$R_{ux}(\tau) = E\{u(t) x(t + \tau)\}. \quad (3.48)$$

Damit erhält man folgende Beziehungen:

– für stetige stochastische Signale

$$R_{ux}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} u(t) x(t + \tau) dt \quad (3.49)$$

– für diskrete stochastische Signale

$$R_{ux}(mT) = \frac{1}{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} u(kT) x[(k+m)T]. \quad (3.50)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion  $R_{ux}(\tau)$  hat folgende wichtige Eigenschaften:

1. Sie ist keine gerade Funktion, denn es gilt

$$R_{ux}(\tau) = R_{xu}(-\tau). \quad (3.51)$$

2. Sind die Signale  $u(t)$  und  $x(t)$  stochastisch unabhängig und besitzen sie keine konstanten oder periodischen Anteile, so ist

$$R_{ux}(\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau. \quad (3.52)$$

3. Die Kreuzkorrelationsfunktion für  $\tau = 0$  ist

$$R_{ux}(0) = \overline{u(t) x(t)}. \quad (3.53)$$

4. Für  $\tau \rightarrow \infty$  ergibt sich die Kreuzkorrelationsfunktion zu

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{ux}(\tau) = \overline{u(t)} \overline{x(t)}. \quad (3.54)$$

5. Bei der Überlagerung zweier Signale  $x(t) = u(t) + z(t)$  gilt

$$R_{xx}(\tau) = R_{uu}(\tau) + R_{zz}(\tau) + R_{uz}(\tau) + R_{zu}(\tau). \quad (3.55)$$

Einige dieser Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion sind im Bild 3.11 dargestellt. Die Kreuzkorrelationsfunktionen werden u. a. benutzt für die Ermittlung von zeitlichen Zusammenhängen zwischen zwei Signalen, zur Ermittlung von Kreuzleistungsdichte-

spektren (s. Abschn. 3.2.3) und zur Bestimmung von Systemmodellen (s. Abschn. 3.2.4). Ebenso vorteilhaft ist ihre Anwendung als Meßverfahren zum Nachweis periodischer Signalkomponenten oder zur elektrischen Leistungsmessung [3.3 bis 3.5].

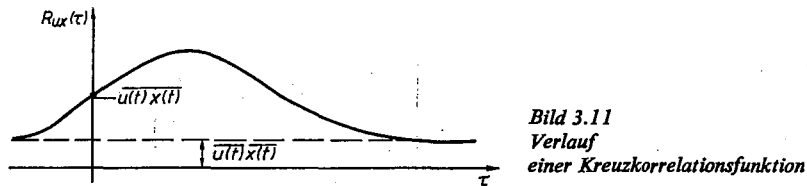


Bild 3.11  
Verlauf  
einer Kreuzkorrelationsfunktion

### 3.2.2.3. Experimentelle Ermittlung von Korrelationsfunktionen

Die Ermittlung der Korrelationsfunktionen  $R_{xx}(\tau)$  und  $R_{ux}(\tau)$  von stetigen stochastischen Signalen kann nach dem in den Bildern 3.12 und 3.13 dargestellten Schema erfolgen. In den Anordnungen sind die Gln. (3.40) und (3.49) realisiert worden, wobei für verschiedene  $\tau$ -Werte die Korrelationsfunktionen über die Beobachtungszeit  $T_0$  ermittelt werden. Die auf diesem Schema basierenden Geräte werden als *Korrelatoren* bezeichnet. Eine eingehende Darstellung verschiedener mechanischer, fotoelektrischer, magnetischer und elektronischer Korrelatoren sowie eine eingehende Fehlerbetrachtung der ermittelten Korrelationsfunktionen sind in [3.6] enthalten. Bei dieser an Bedeutung verlierenden Gruppe von Methoden wird die Genauigkeit der Berechnung neben dem Einfluß der Gerätekomponenten (Multiplikations-, Integrations-, Zeitverschiebungsfehler) wesentlich vom Verhältnis von Beobachtungszeit  $T_0$  zur gewählten Zeitverschiebung bestimmt. Je größer das Verhältnis ist, um so genauer wird die Korrelationsfunktion bestimmt. Eine allgemeine Beziehung besteht nicht. Die Berechnung für einen  $\tau$ -Wert wird nach Vorschlag von [3.6] beendet, wenn folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|\hat{R}(\tau, T_m) - \hat{R}(\tau, T_n)| < \varepsilon \quad \text{mit} \quad T_m < T_n; \quad (3.56)$$

$\varepsilon$  Abbruchgrenze, z. B.  $\varepsilon = 0,05 \hat{R}(0)$ .

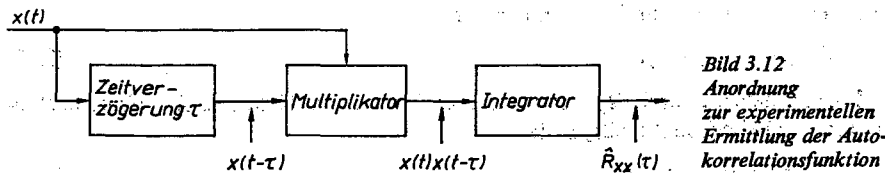


Bild 3.12  
Anordnung  
zur experimentellen  
Ermittlung der Auto-  
korrelationsfunktion

Die Ermittlung der Korrelationsfunktion auf der Grundlage der diskreten Werte eines stochastischen Signals über das Beobachtungsintervall  $T_0$  ( $T_0 = nT$ ) erfolgt nach den Beziehungen in den Gln. (3.41) bis (3.43) mittels eines Digitalrechners. Diese „digitalen Korrelatoren“ haben die gerätetechnischen Fehlermöglichkeiten der „analogen Korrelatoren“ nicht. Neben dem Einfluß der Beobachtungszeit  $T_0$  und der Verschiebung  $\tau$  beeinflusst die Wahl der Tasterperiode  $T$  die Genauigkeit der Korrelationsfunktion. Als

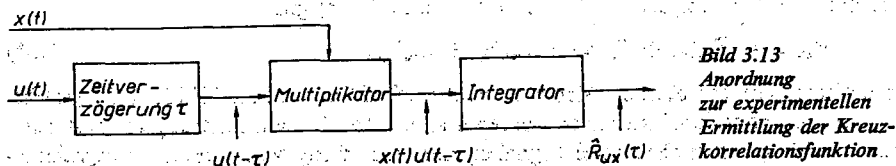


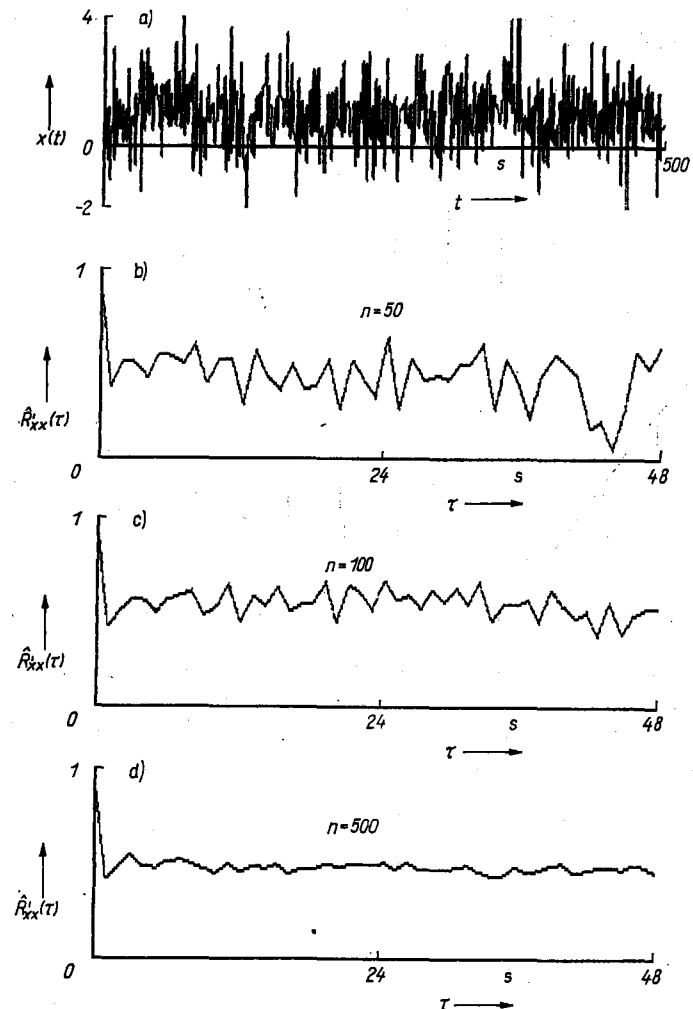
Bild 3.13  
Anordnung  
zur experimentellen  
Ermittlung der Kreuz-  
korrelationsfunktion

#### Beispiel 3.1 Einfluß der Beobachtungsanzahl auf die Güte der berechneten Korrelationsfunktion $\hat{R}'_{xx}(\tau)$

**Gegeben:**  $x(t)$  weißes Rauschen; NV (1, 1),  
Abtastzeit  $T = 1$  s,  
 $n = 50, 100, 500$  Beobachtungen.

**Gesucht:** Verlauf der Korrelationsfunktion für eine feste Korrelationstiefe und verschiedene Beobachtungsanzahl.

**Ergebnis:** Siehe Bild zu Beispiel 3.1.



Die Ergebnisse zeigen, daß

1. die Streuung der Werte der Korrelationsfunktion mit Zunahme der Korrelationstiefe zunimmt ( $n = 50$ ),

| Beispiel<br>3.1 | Einfluß der Beobachtungsanzahl<br>auf die Güte der berechneten Korrelationsfunktion $\hat{R}'_{xx}(\tau)$ |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

2. die Streuung der Werte der Korrelationsfunktion mit der Zunahme an Beobachtungen abnimmt ( $n = 50, 100, 500$ ),
3. bereits für  $n = 500$  sehr gut zu erkennen ist, daß das Signal aus einem Gleichanteil und einer zufälligen Komponente, die weißes Rauschen ist, besteht.

**Anmerkung:**

Alle Berechnungen der Beispiele wurden in zeitdiskreter Form realisiert. Die in den Tastpunkten  $kT$  exakt ermittelten Funktionswerte wurden zur übersichtlicheren Darstellung durch Geraden verbunden. Um die Anzahl der Symbole und Formelzeichen nicht noch weiter zu erhöhen, werden für diese Verläufe auch die Symbole der kontinuierlichen Beschreibung verwendet.

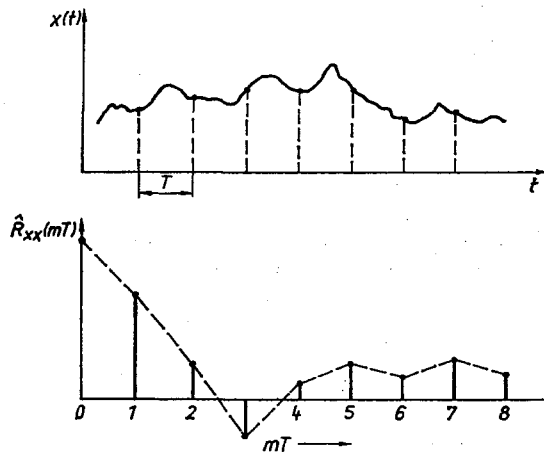


Bild 3.14  
Abgetastete Signalwerte  
und die berechneten Stützstellen  
der Autokorrelationsfunktion

Ergebnis erhält man im Abstand der Verschiebung  $mT$  die Stützstellen der Korrelationsfunktion (Bild 3.14).

Die Abschätzung der Signifikanz, d.h.  $R_{xx}(\tau) \neq 0$ , der empirisch ermittelten  $\hat{R}_{xx}(\tau)$  auf der Grundlage der Annahme von unabhängigen Beobachtungen des stochastischen Signals kann erfolgen nach [3.19] bei  $n - m$  Produkten in den Gln. (3.41) und (3.42) mit einem Risiko von  $\alpha = 5\%$  nach der Vorschrift

$$\hat{R}'_{xx}(\tau) \begin{cases} = 0 & \text{für } -\frac{2}{\sqrt{n-m}} \leq \hat{R}'_{xx}(\tau) \leq +\frac{2}{\sqrt{n-m}} \\ \neq 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.57)$$

mit

$$\hat{R}'_{xx}(\tau) = \frac{\hat{R}_{xx}(\tau)}{\hat{R}_{xx}(0)}$$

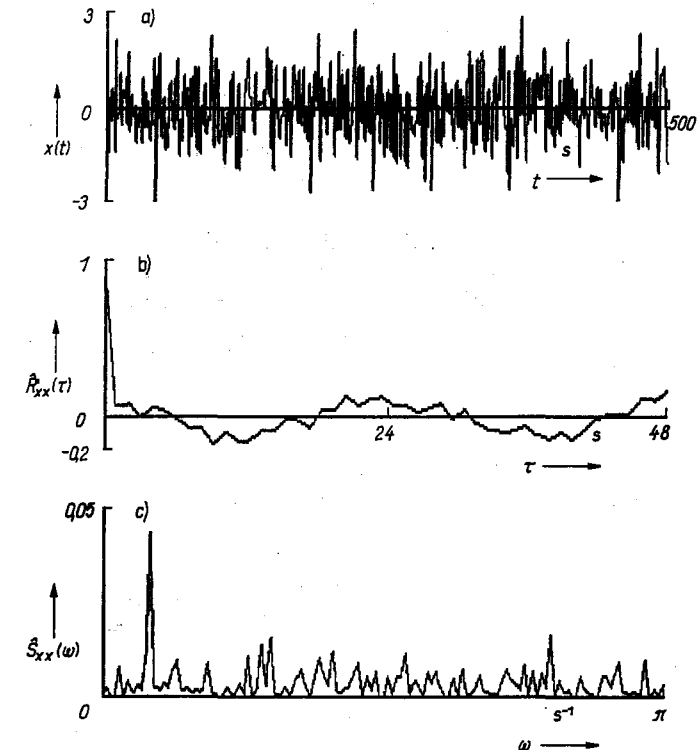
Im Bild 3.15 ist die Vorgehensweise für ein typisches Beispiel dargestellt. Die Werte der berechneten normierten Autokorrelationsfunktion  $\hat{R}'_{xx}(\tau)$ , die außerhalb des Toleranzbereichs liegen, sind statistisch gesichert, d.h. ungleich null. Es ist ferner zu erkennen,

| Beispiel<br>3.2 | Ermittlung der Korrelationsfunktion $\hat{R}_{xx}(\tau)$<br>und des Leistungsdichtespektrums $\hat{S}_{xx}(\omega)$ |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Gegeben:**  $x(t) = x'(t) + 0,5 \sin \frac{2\pi}{24} t$ ,  
 $x'(t)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),  
 Abtastzeit  $T = 1$  s,  
 Beobachtungen: 500.

**Gesucht:** Verlauf der Korrelationsfunktion  $\hat{R}'_{xx}(\tau)$  und des Leistungsdichtespektrums  $\hat{S}_{xx}(\omega)$ .

**Ergebnis:** Siehe Bild zu Beispiel 3.2.



Die dargestellten Funktionen zeigen, daß das Signal  $x(t)$

1. keinen Gleichanteil hat,
2. eine periodische Komponente besitzt, was sowohl im Verlauf von  $\hat{R}'_{xx}(\tau)$  und noch deutlicher im Leistungsdichtespektrum  $\hat{S}'_{xx}(\omega)$  zu erkennen ist,
3. eine zufällige Komponente enthält, die als nahezu weißes Rauschen gedeutet werden kann.

daß mit Abnahme der Anzahl der Produkte in den Gln. (3.41) und (3.42) bei fester Beobachtungsanzahl  $n$  und zunehmender Korrelationstiefe  $mT$  die Signifikanzwerte für  $\hat{R}'_{xx}(\tau)$  zunehmen. Weiterführende Betrachtungen zur Größe des statistischen Fehlers normierter Autokorrelationsfunktionen sind unter Annahme verschiedener Voraussetzungen an das stochastische Signal in [3.7] enthalten.

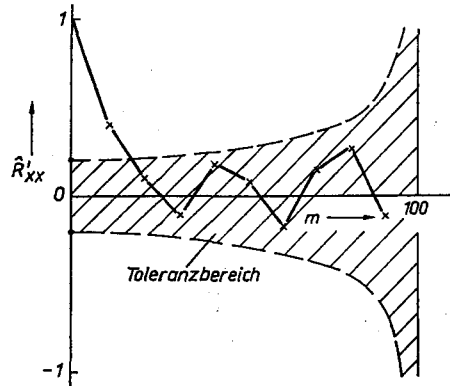


Bild 3.15  
Verlauf des nichtsignifikanten Bereichs  
einer Autokorrelationsfunktion  
( $\alpha = 5\%$ ,  $n = 100$ )

Im Beispiel 3.1 ist für ein stochastisches Signal der Einfluß der verwendeten Beobachtungszahl auf die Güte der geschätzten Korrelationsfunktion  $\hat{R}'_{xx}(mT)$  dargestellt.

Ist in einem Signal eine periodische Komponente enthalten, wie im Beispiel 3.2, besitzt auch die aus einer Stichprobe berechnete Korrelationsfunktion  $\hat{R}'_{xx}(mT)$  eine periodische Komponente. (Das im Beispiel 3.2 dargestellte Leistungsdichtespektrum  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  wird im Abschnitt 3.2.3.1 behandelt.)

### 3.2.3. Beschreibung stochastischer Signale im Frequenzbereich/Leistungsdichtespektren

Wie bei den determinierten Signalen ist auch bei stochastischen Signalen die Verteilung der Leistung über die Frequenz  $\omega$  zur Lösung vielfältiger Diagnose-, Überwachungs-, Steuer- und Vorhersageaufgaben von großem Interesse. Im Gegensatz zu dem im Abschnitt 3.1.2 vorgestellten Amplitudenspektrum  $|X(j\omega)|$  wird eine Kenngröße – das **Leistungsspektrum**  $S(\omega)$  – gesucht, das die mittlere Leistung des Signals in einem Frequenzbereich beschreibt. In Analogie zu den Korrelationsfunktionen wird die mittlere Leistung als Funktion der Frequenz  $\omega$  eines Signals in Form des Autoleistungsdichtespektrums und die mittlere Leistung zweier Signale als Funktion der Frequenz  $\omega$  in Form des Kreuzleistungsdichtespektrums beschrieben.

#### 3.2.3.1. Autoleistungsdichtespektrum $S_{xx}(\omega)$

Bei der Ableitung der Beziehungen für das **Autoleistungsdichtespektrum** wird von einem Teilvorgang  $x_{T0}(t)$  des stochastischen Signals  $x(t)$  ausgegangen, da das komplexe Amplitudenspektrum für ein zeitlich nicht begrenztes Signal nicht existiert. Entsprechend Bild 3.16 gilt für den Teilvorgang  $x_{T0}(t)$ :

$$x_{T0}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } -T_0 \leq t \leq +T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.58)$$

Die mittlere Leistung für den Teilvorgang  $x_{T0}(t)$  ergibt sich damit zu

$$\overline{x_{T0}^2(t)} = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x_{T0}^2(t) dt. \quad (3.59)$$

Wird ein stationäres stochastisches Signal  $x(t)$  angenommen, ergibt sich die Gesamtleistung im Zeitbereich durch Grenzwertbildung entsprechend Gl. (3.60) zu

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x_{T0}^2(t) dt. \quad (3.60)$$

Da die mittlere Gesamtleistung des Signals im Zeit- und Frequenzbereich gleich sein muß, kann mittels der Fourier-Transformation – Gln. (3.20) und (3.22) – eine Umformung von Gl. (3.60) in eine Form erfolgen, die den Leistungsanteil einzelner Frequenzen darstellt. Aus Gl. (3.60) ergibt sich damit

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x_{T0}(t) \left[ \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X_{T0}(j\omega) e^{j\omega t} d(j\omega) \right] dt. \quad (3.61)$$

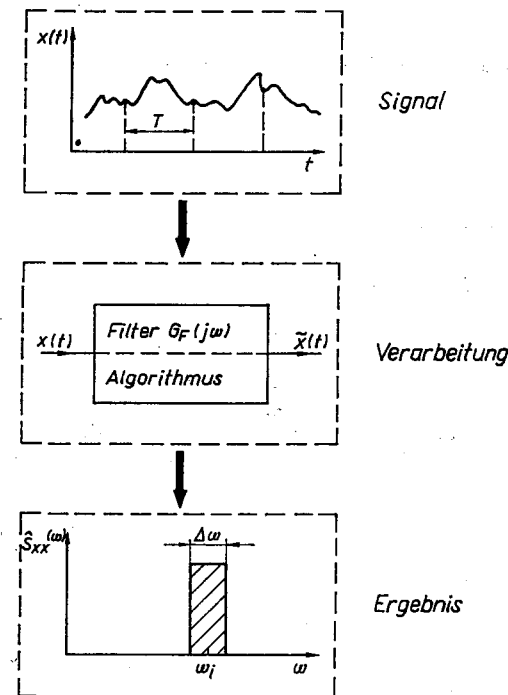


Bild 3.16  
Prinzip der Ermittlung  
von Leistungsdichtespektren

Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält man

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X_{T0}(j\omega) \int_{-T_0}^{+T_0} x_{T0}(t) e^{j\omega t} dt d(j\omega). \quad (3.62)$$

Unter Verwendung der Beziehungen für die Fourier-Transformation und für komplexe Größen ergibt sich aus Gl. (3.62)

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |X_{T_0}(j\omega)|^2 d(j\omega). \quad (3.63)$$

Durch das Vertauschen der Grenzwertbildung und der Integration erhält man einen Ausdruck, der nur von der Frequenz  $\omega$  abhängt. Es gilt dann:

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{|X_{T_0}(j\omega)|^2}{2T_0} d(j\omega). \quad (3.64)$$

Der Ausdruck

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{|X_{T_0}(j\omega)|^2}{2T_0} = S_{xx}(\omega) \quad (3.65)$$

stellt ein Maß für die mittlere Leistung einer Teilschwingung des stochastischen Signals der Frequenz  $\omega$  dar. Sie wird als *Autoleistungsdichtespektrum* bezeichnet. Mit dieser Vereinbarung findet man für die Gesamtleistung des Signals im Zeitbereich entsprechend Gl. (3.64)

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} S_{xx}(\omega) d(j\omega). \quad (3.66)$$

Da das Autoleistungsdichtespektrum immer eine reelle Größe ist, gilt für Frequenzen im Bereich  $0 \leq \omega \leq \infty$

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega. \quad (3.67)$$

Gl. (3.67) wird als *Parsevalsche Gleichung* bezeichnet. Sie hat große Bedeutung für den Entwurf von stochastisch gestörten Steuerungen.

Wesentliche Eigenschaften des Autoleistungsdichtespektrums sind folgende:

1. Es gilt  $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$ , d. h., es liegt eine gerade Funktion vor.
2. Das Autoleistungsdichtespektrum ist immer eine reelle Größe, und es gilt

$$S_{xx}(\omega) \geq 0.$$

In Tafel 3.3 sind die Spektren für einige typische stochastische Signale dargestellt. Während das „weiße Rauschen“ alle Frequenzen mit gleicher Leistung enthält, besitzt ein harmonisches Signal ein Spektrum in Form einer impulsförmigen Spektrallinie bei der Frequenz  $\omega_i$ .

### 3.2.3.2. Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{ux}(\omega)$

Ergibt sich eine Leistung aus dem Produkt zweier stochastischer Signale (z. B. Strom und Spannung, Drehzahl und Drehmoment, Kraft und Geschwindigkeit), so können analog zu Abschnitt 3.2.3.1 die Teilvorgänge  $u_{T_0}(t)$  und  $x_{T_0}(t)$  mit den Eigenschaften

$$u_{T_0}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } -T_0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.68)$$

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } -T_0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Ausgangspunkte verwendet werden. Für den zeitlichen Mittelwert des Produkts der stationären Signale ergibt sich dann

$$\overline{u(t)x(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} u_{T_0}(t) x_{T_0}(t) dt. \quad (3.69)$$

Mit der Anwendung der Fourier-Transformation und einigen Umformungen wie im Abschnitt 3.2.3.1 geht Gl. (3.69) in den Ausdruck

$$\overline{u(t)x(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{U_{T_0}(j\omega) X_{T_0}(-j\omega)}{2T_0} d(j\omega) \quad (3.70)$$

über. In Gl. (3.70) wird der Ausdruck

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{U_{T_0}(j\omega) X_{T_0}(-j\omega)}{2T_0} = S_{ux}(\omega) \quad (3.71)$$

als *Kreuzleistungsdichtespektrum* bezeichnet. Mit dieser Definition geht Gl. (3.70) über in die Form

$$\overline{u(t)x(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} S_{ux}(\omega) d(j\omega). \quad (3.72)$$

Das Kreuzleistungsdichtespektrum  $S_{ux}(\omega)$  hat folgende wichtige Eigenschaften:

1. Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist in der Regel eine komplexe Größe.
2. Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist keine gerade Funktion; denn es gilt

$$S_{ux}(\omega) = S_{xu}(-\omega).$$

3. Bei der Überlagerung zweier Signale  $x(t) = u(t) + z(t)$  gilt

$$S_{xx}(\omega) = S_{uu}(\omega) + S_{zz}(\omega) + S_{ux}(\omega) + S_{zu}(\omega).$$

Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist für die Analyse von Signalübertragungen und Systembeschreibungen im Frequenzbereich von besonderer Bedeutung (s. Abschn. 3.2.4).

### 3.2.3.3. Experimentelle Bestimmung von Leistungsdichtespektren

Die Ermittlung von Leistungsdichte ist eine der schwierigsten Aufgaben der Signalanalyse. In der Literatur wurde eine Vielzahl von Verfahren vorgestellt, wobei häufig Aussagen über ihren zweckmäßigen Einsatz fehlen [3.4, 3.7 bis 3.11]. Im Rahmen dieses Buches sollen ausgewählte Grundprinzipien vorgestellt werden, die die Basis leistungstarker rechnergestützter Verfahren sind.

Alle Verfahren beruhen auf der Messung (kontinuierlich/diskontinuierlich) des stochastischen Signals und der anschließenden Selektion der Leistungsanteile bestimmter Frequenzen  $\omega_i$  (bzw. Frequenzbereiche  $\Delta\omega_i$ ) aus dem Signal durch Filterverfahren oder Algorithmen. Für ein kontinuierliches stochastisches Signal ist das Konzept im Bild 3.16 dargestellt.

Die Verfahren werden im folgenden unterschieden in *direkte Verfahren*, bei denen das Leistungsdichtespektrum direkt aus dem Signal geschätzt wird, und in *indirekte Verfahren*, bei denen das Leistungsdichtespektrum aus dem Signal über die Ermittlung von Korrelationsfunktionen und deren Fourier-Transformation berechnet wird. Den Schwerpunkt bildet hier außerdem die diskontinuierliche Betrachtungsweise, weil der Digitalrechner gegenüber analogen Geräten wesentlich leistungsfähiger ist.

## Direkte Verfahren

Zu den klassischen direkten Verfahren gehören das *Suchfilterverfahren* und das *Suchfrequenzverfahren*. Beide Verfahren wurden auf der Basis von analogen Geräten entwickelt.

Das Suchfilterverfahren, dessen Prinzip im Bild 3.17 dargestellt ist, geht davon aus, daß durch ein analoges Bandpaßfilter aus dem stochastischen Signal  $x(t)$  für eine Frequenz  $\omega_i$  der Leistungsanteil in einem schmalen Bereich  $\Delta\omega_i$  um die Mittelfrequenz  $\omega_i$  herausgefiltert wird. Aus dem gefilterten Signalanteil  $\tilde{x}(t, \omega_i)$  wird durch eine Quadrierereinheit und einen Integrator eine Schätzung für das Autoleistungsdichtespektrum nach der Beziehung

$$\hat{S}_{xx}(\omega_i) = \frac{\overline{\tilde{x}^2(t, \omega_i)}}{\Delta\omega_i} \quad (3.73)$$

ermittelt. Für eine unendlich große Beobachtungszeit  $T_0$  erhält man das exakte Autoleistungsdichtespektrum zu

$$S_{xx}(\omega_i) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}^2(t, \omega_i) dt. \quad (3.74)$$

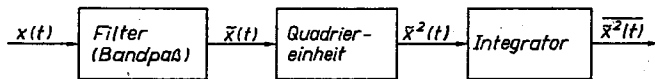


Bild 3.17  
Prinzip  
des Suchfilterverfahrens

Das Hauptproblem dieser Methode ist die Realisierung der Filtercharakteristik. Für den idealen Bandpaß gelten entsprechend Bild 3.18 folgende Übertragungseigenschaften:

$$|G_F(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega < \omega_u, \quad \omega > \omega_o \\ 1 & \text{für } \omega_u \leq \omega \leq \omega_o \end{cases} \quad (3.75)$$

$$\Delta\omega = \omega_o - \omega_u \rightarrow 0. \quad (3.76)$$

Die analoge Realisierung des Bandpasses bereitet u. a. große Schwierigkeiten aufgrund einer zu geringen Steilheit des Filters, besonders im tiefen Frequenzbereich, und der notwendigen Gleichheit zweier Filter bei der Ermittlung des Kreuzleistungsdichtespektrums. Aus diesen Gründen wurden die analogen durch digitale Filter ersetzt (s. Abschn. 3.4).

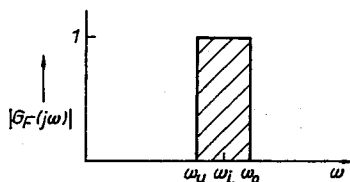


Bild 3.18  
Übertragungsverhalten  
eines idealen Bandpaßfilters

Unabhängig von der Realisierung des Filters ist der Einfluß der Beobachtungszeit  $T_0$  und der Bandbreite  $\Delta\omega$  auf die Genauigkeit der Schätzung. Allgemein gilt, daß das Spektrum um so genauer ermittelt wird, je größer  $T_0$  und je kleiner  $\Delta\omega$  ist. Bei kleinerem  $\Delta\omega$ , d. h. bei größerer Anzahl von Frequenzbändern, muß bei gleicher Schätzungsgüte die Beobachtungszeit  $T_0$  vergrößert werden. Eine Abschätzung für das Vertrauensintervall

des Spektrums  $\Delta S_{xx, \alpha}$  in dB wurde von Blackman und Tukey [3.11] angegeben in Form der Beziehung

$$\Delta S_{xx, \alpha} = K(n/m^* - 0,883)^{-1/2}; \quad (3.77)$$

|          |                         |      |      |      |
|----------|-------------------------|------|------|------|
| $n$      | Zahl der Abtastwerte    |      |      |      |
| $m^*$    | Zahl der Frequenzbänder |      |      |      |
| $\alpha$ | 20                      | 10   | 4    | 2    |
| $K$      | 11,2                    | 14,1 | 17,7 | 20,5 |

Damit wird deutlich, daß das Toleranzband  $\Delta S_{xx, \alpha}$  mit Zunahme der Sicherheit größer wird und mit Zunahme des Wertes von  $n/m^*$  abnimmt. Der mit Gl. (3.77) berechnete Toleranzbereich enthält mit dem angegebenen Risiko  $\alpha$  den tatsächlichen Wert des Spektrums (Bild 3.19).

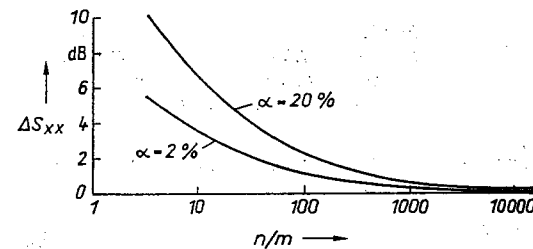


Bild 3.19  
Vertrauensintervalle  
für das Autoleistungsdichtespektrum  
 $S_{xx}(\omega)$  in dB

Das *Suchfrequenzverfahren* hat sich in der Analogtechnik gegenüber dem Suchfilterverfahren aufgrund seiner höheren Leistungsfähigkeit durchgesetzt. Bei diesem Verfahren wird der Leistungsanteil der Frequenz  $\omega_i$  mit Hilfe eines Suchsignals der Form

$$x_s(t, \omega_i) = a_0 \cos(\omega_i t + \varphi) \quad (3.78)$$

unter Verwendung des Prinzips der Kreuzkorrelation für  $\tau = 0$  (s. Abschn. 3.2.2.2) aus dem stochastischen Signal  $x(t)$  ermittelt. Entsprechend Gl. (3.49) gilt für das geschätzte Spektrum:

$$\hat{S}_{xx}(\omega_i) \approx \overline{x(t) x_s(t, \omega_i)} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) x_s(t, \omega_i) dt. \quad (3.79)$$

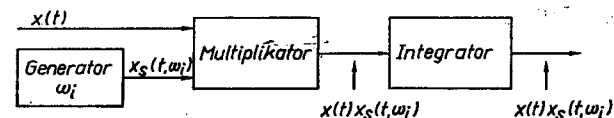


Bild 3.20. Prinzip des Suchfrequenzverfahrens

Durch die Kreuzkorrelation wird für genügend große  $T_0$  aus dem Signal  $x(t)$  nur der Anteil herausgefiltert, der mit dem Suchsignal  $x_s(t, \omega_i)$  identisch ist. Damit wird ein „ideales Bandpaßfilter“ realisiert, und die Auflösung des Frequenzbereichs in Teilabschnitte sowie der mögliche Frequenzbereich hängen nur von der Leistungsfähigkeit des Suchsignalgenerators und des Integrators ab. Die allgemeine Prinzipskizze ist im Bild 3.20 dargestellt. Zur Multiplikation und Integration dienen häufig Wattmeter [1.46].

Stehen in einem Zeitintervall  $-T_0 \leq t \leq +T_0$  insgesamt  $2n$  Beobachtungen von  $x(t)$  mit der Abtastperiode  $T$  (Bild 3.21) zur Verfügung, kann eine Schätzung des Autoleistungsdichtespektrums auf der Grundlage der Berechnung der Fourier-Koeffizienten erfolgen.

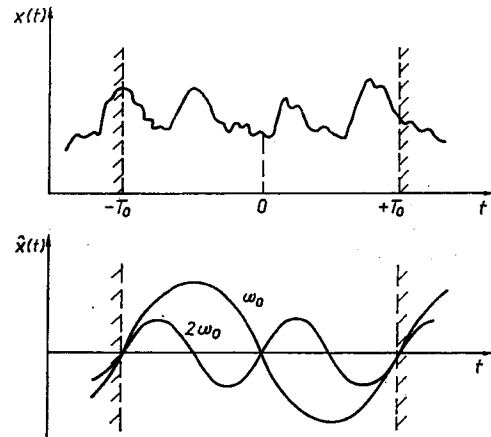


Bild 3.21  
Betrachteter Signalverlauf für die Schätzung  
des Autoleistungsdichtespektrums  
aus den Fourier-Koeffizienten

Entsprechend Gl. (3.34) gilt für die diskrete Fourier-Transformierte im beobachteten Zeitbereich

$$X^*(jm\omega_0) = \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) e^{-j(m\omega_0 kT)} \quad (3.80)$$

mit

$$t = kT, \quad \omega_m = m\omega_0 = m\pi/nT, \quad T_0 = nT,$$

$$k = 0, +1, +2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, n;$$

$\omega_0 = 2\pi/2T_0$  Grundwelle des Signals.

Damit wird davon ausgegangen, daß das Signal im Zeitraum  $-T_0, +T_0$  in

- die Grundwelle mit der Frequenz  $\omega_0$
- Oberwellen mit den Frequenzen  $m\omega_0$ ;  $m = \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n$

zerlegt wird und die Leistungsanteile nur in diesen Stützstellen vorhanden sind. Die obere Grenze wird durch das Abtasttheorem festgelegt, da  $\omega_{\max} = 2\pi/2T = \pi/T$  ist. Das Gesamtspektrum liegt dann zwischen  $\omega_u = 2\pi/2T_0 = \pi/T_0$  und  $\omega_o = \pi/T$ .

Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich analog Gl. (3.9) zu

$$c_m = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) e^{-j(m\omega_0 kT)}. \quad (3.81)$$

Mit

$$c_m = \frac{1}{2} (a_m - jb_m) \quad (3.82)$$

und

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) \cos(m\omega_0 kT) \\ b_m &= \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) \sin(m\omega_0 kT) \\ a_0 &= \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) \end{aligned} \quad (3.83)$$

folgt für die diskrete Fourier-Transformierte

$$X^*(jm\omega_0) = 2nc_m = n(a_m - jb_m). \quad (3.84)$$

Um nun das Leistungsdichtespektrum zu ermitteln, wird von der mittleren Leistung

$$\overline{x^2(kT)} = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) x(kT) \quad (3.85)$$

ausgegangen. Durch Einsetzen der Ausdrücke von Gl. (3.36) und nach einigen Umformungen erhält man

$$\overline{x^2(kT)} = \sum_{m=-n}^{+n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X^*(jm\omega_0)|^2}{4n^2}. \quad (3.86)$$

Der Leistungsanteil einer Teilschwingung  $\omega_m$  kann damit durch die Beziehung

$$S_{x^*x^*}(m\omega_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X^*(jm\omega_0)|^2}{4n^2} \quad (3.87)$$

ausgedrückt werden. Die Parsevalsche Beziehung für abgetastete stochastische Signale hat damit analog zu Gl. (3.67) die Gestalt

$$\overline{x^2(kT)} = \sum_{m=-n}^{+n} S_{x^*x^*}(m\omega_0). \quad (3.88)$$

Die geschätzte Leistung einer Frequenz ergibt sich aus den Gln. (3.87) und (3.88) zu

$$S_{x^*x^*}(m\omega_0) = \frac{1}{4} (a_m^2 + b_m^2). \quad (3.89)$$

Das Leistungsdichtespektrum kann dargestellt werden in Abhängigkeit von

– der Frequenz  $f$ :

$$\frac{1}{2nT} \leq f_m \leq \frac{1}{2T},$$

– der Kreisfrequenz  $\omega$ :

$$\frac{\pi}{nT} \leq \omega_m \leq \frac{\pi}{T},$$

– der normierten Kreisfrequenz  $\omega^*$ :

$$0 \leq \omega_m^* \leq \pi$$

mit

$$\omega_m^* = \frac{\pi m}{n}; \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Das vorgestellte direkte Verfahren hat den Vorteil der einfachen Handhabung und den Nachteil, daß nur der Leistungsanteil spezieller Frequenzen in den Stützstellen  $\omega_m$  ermittelt wird. Die Genauigkeit der Schätzung nimmt mit Zunahme der Beobachtungszeit und mit Abnahme der Tastperiode  $T$  zu.

Im Beispiel 3.2 (s. Abschn. 3.2.2.3) ist für ein Signal, das aus einer stochastischen und einer periodischen Komponente besteht, das Autoleistungsspektrum nach dieser Methode ermittelt und interpretiert worden.

### Indirekte Verfahren

Eine der leistungsstärksten indirekten Methoden ist die Schätzung von Leistungsdichtespektren durch die Fourier-Transformation der entsprechenden Korrelationsfunktionen, d.h. durch Anwendung der Wiener-Chintschinschen Beziehungen. Die grundsätzlichen Schritte dieser Methode sind im Bild 3.22 dargestellt.

Folgende einzelne Schritte sind notwendig:

1. Ermittlung der Stützstellen der Korrelationsfunktionen  $R_{xx}(mT)$  und  $R_{ux}(mT)$  aus den abgetasteten Signalwerten  $x(iT)$  und  $u(iT)$  entsprechend den Gln. (3.42) und (3.50).
2. Reduzierung des Einflusses der Streuung der Stützstellen der Korrelationsfunktionen für zunehmende Korrelationstiefe  $mT$  durch eine Wichtung der Korrelationsfunktionen mit einer Wichtungsfunktion  $w^*(mT)$ .

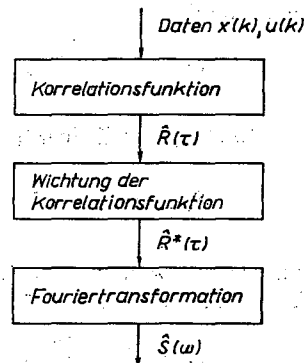


Bild 3.22

Stufen zur Ermittlung von Leistungsdichtespektren

Das Ziel besteht darin, für die Berechnung der Leistungsdichtespektren die Stützstellen der Korrelationsfunktionen bevorzugt zu verwenden, die statistisch am sichersten sind (s. Abschn. 3.2.2.3). In der Literatur [3.10, 3.11] werden eine Vielzahl von Wichtungsfunktionen angegeben. Bewährt haben sich die in Tafel 3.4 angegebenen. Für alle Wichtungsfunktionen gilt, daß sie Filtereigenschaften besitzen; sie werden deshalb auch als „Fensterfunktionen“ bezeichnet. Die Länge des Intervalls  $mT$ , in der die Wichtungsfunktion  $w^*(mT) > 0$  ist, bestimmt die Glättung des Spektrums.

Tafel 3.4. Ausgewählte Wichtungsfunktionen für Korrelationsfunktionen

|          |                                                                                                                                                                                                                                |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bartlett | $w^*(mT) = (1 - mT/m'T) \quad \text{für } m \leq m'$                                                                                                                                                                           |
| Tukey    | $w^*(mT) = \frac{1}{2} (1 + \cos \pi mT/m'T) \quad \text{für } m \leq m'$                                                                                                                                                      |
| Parzen   | $w^*(mT) = \begin{cases} 1 - \frac{6(mT)^2}{(m'T)^2} \left[ 1 - \frac{mT}{m'T} \right] & \text{für } 0 \leq m < \frac{m'}{2} \\ 2 - \left( 1 - \frac{mT}{m'T} \right)^3 & \text{für } \frac{m'}{2} \leq m \leq m' \end{cases}$ |

Stehen  $(n - 1)$  Stützstellen einer Korrelationsfunktion bei  $n$  Beobachtungen der Signale zur Verfügung, ist die Länge des Wichtungsintervalls zweckmäßig zwischen

$$0,2n \leq m' \leq 0,4n \quad (3.90)$$

zu wählen. Für den Bereich  $m > m'$  gilt immer  $w^*(mT) = 0$ . Die Vorgehensweise ist für die Wichtung einer Autokorrelationsfunktion  $\hat{R}_{xx}(mT)$  nach Bartlett im Bild 3.23

dargestellt. Damit gilt für die gewichteten Korrelationsfunktionen analog den Gln. (3.42) und (3.50)

$$\hat{R}_{xx}^*(mT) = \frac{1}{n - m} \sum_{k=1}^{n-m} w^*(mT) x(kT) x[(k + m)T] \quad (3.91)$$

$$\hat{R}_{ux}^*(mT) = \frac{1}{n - m} \sum_{k=1}^{n-m} w^*(mT) u(kT) x[(k + m)T] \quad (3.92)$$

mit  $m = 0, 1, 2, \dots, m'$ .

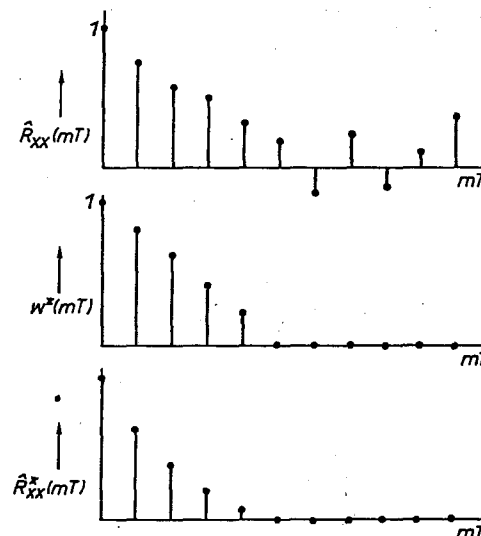


Bild 3.23

Einfluß der Wichtungsfunktion  $w^*(mT)$  auf die Korrelationsfunktion ( $m' = 5$  Bartlett-Wichtung)

3. Ermittlung der Leistungsdichtespektren aus den gewichteten (gestutzten) Korrelationsfunktionen auf Grundlage der Beziehungen der Gl. (3.77) im Abschnitt 3.2.3.3. Für den diskontinuierlichen Fall gilt

$$\hat{S}_{xx}^*(\omega_i) = T \left[ \hat{R}_{xx}^*(0) + 2 \sum_{m=1}^{m'} \hat{R}_{xx}^*(mT) \cos \frac{m\pi}{m'} \right]$$

$$\hat{S}_{ux}^*(\omega_i) = T \sum_{m=-m'}^{+m'} \left( \hat{R}_{ux}^*(mT) \cos \frac{m\pi}{m'} - j \hat{R}_{ux}^*(mT) \sin \frac{m\pi}{m'} \right)$$

mit

$$\omega_i = \frac{i\pi}{m'T}; \quad i = 0, 1, \dots, m'. \quad (3.93)$$

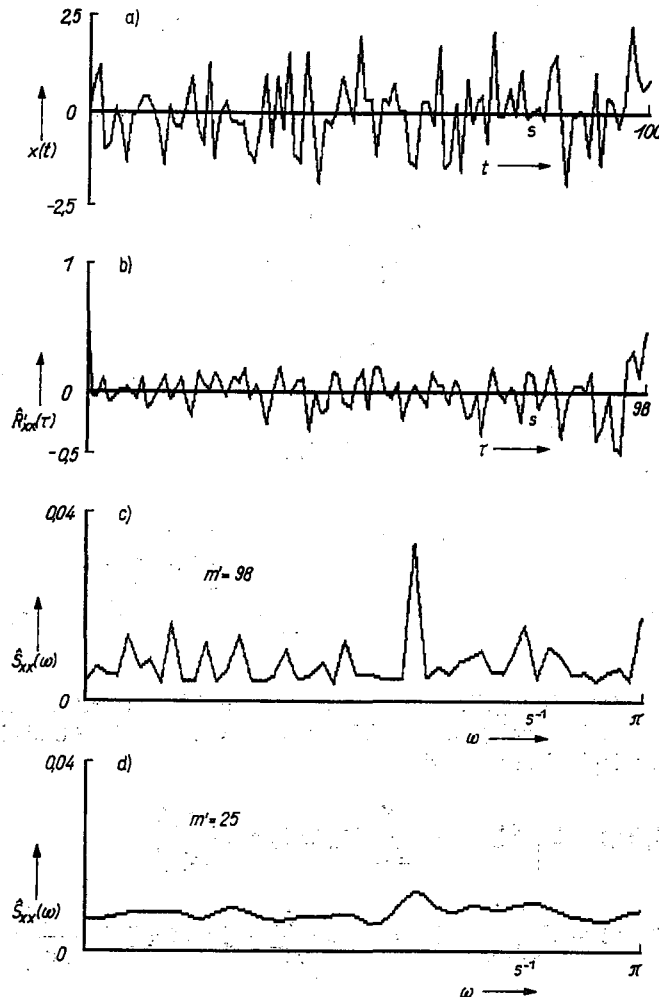
Aus den Gln. (3.91) und (3.92) wird u.a. deutlich, daß mit der Festlegung des Parameters  $m'$  der Wichtungsfunktionen  $w^*(mT)$  auch die Zahl der Frequenzbänder im Bereich  $\omega = 0$  bis  $\omega = \pi/T$  festgelegt wird. Wenn  $n$  Beobachtungen mit der Tast-

**Beispiel 3.3** Einfluß der Wichtung der Korrelationsfunktion  $\hat{R}'_{xx}(\tau)$  auf die Gestalt des Autoleistungsspektrums  $\hat{S}_{xx}(\omega)$

**Gegeben:**  $x(t)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),  
Beobachtungen: 100,  
Abtastzeit  $T = 1$  s.

**Gesucht:** Verlauf der Autoleistungsdichtespektren  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  in Abhängigkeit von der Länge des Wichtungsintervalls; Wichtungsart nach Parzen.

**Ergebnis:** Siehe Bild zu Beispiel 3.3.



Die dargestellten Ergebnisse zeigen, daß

1. die Werte der berechneten Korrelationsfunktion  $\hat{R}'_{xx}(mT)$  mit größer werdender Korrelationstiefe mehr streuen, weil die Anzahl der für die Mittelung notwendigen Produkte in der Berechnungsvorschrift abnimmt,
2. die Datenwichtung zur Glättung des Spektrums führt und in diesem Testfall für eine Länge des Wichtungsintervalls von  $m'T = 25$  s zu erkennen ist, daß das zu analysierende Signal die Eigenschaft des weißen Rauschens aufweist.

periode  $T$  vorliegen, kann die notwendige maximale Korrelationstiefe  $m'$  aus dem Verhältnis

$$m' = \omega_{\max} / \Delta\omega \quad \text{mit} \quad \omega_{\max} = \pi/T; \quad (3.94)$$

$\Delta\omega$  gewählte Frequenzbandbreite

ermittelt werden. Um eine ausreichende statistische Sicherheit zu erreichen, muß das Verhältnis  $n/m'$  entsprechend Gl. (3.90) möglichst groß sein. Der Einfluß der Wichtung der Korrelationsfunktion auf den Verlauf des Autoleistungsdichtespektrums ist im Beispiel 3.3 dargestellt.

Für die Schätzung des Autoleistungsspektrums stehen neben den genannten Verfahren noch die Möglichkeiten der Anwendung des Verfahrens der schnellen Fourier-Transformation [3.11, 3.12], die den numerischen Aufwand der Fourier-Analyse von Gl. (3.83) wesentlich reduziert, sowie die Ermittlung aus den stochastischen Signalmodellen zur Verfügung (s. Abschn. 3.3).

### 3.2.3.4. Beziehungen zwischen Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren

Die Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren beschreiben stochastische Signale durch Mittelwerte, die innere Gesetzmäßigkeiten im Zeit- und Frequenzbereich ausdrücken. Es ist zu erwarten, daß zwischen beiden Beschreibungsformen ein Zusammenhang besteht, der dem von deterministischen Signalen entspricht. Als Beispiel soll der Zusammenhang zwischen der Autokorrelationsfunktion  $R_{xx}(\tau)$  und dem Autoleistungsdichtespektrum  $S_{xx}(\omega)$  hier ausführlicher abgeleitet werden. Ausgangspunkt ist die in Gl. (3.65) abgeleitete Beziehung für  $S_{xx}(\omega)$ :

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{X_T(j\omega) X_T(-j\omega)}{2T_0}. \quad (3.95)$$

Setzt man in Gl. (3.95) die Fourier-Transformierten mit den unabhängigen Integrationsvariablen  $t_1$  und  $t_2$  ein, so erhält man

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-T_0}^{+T_0} x(t_2) e^{j\omega t_2} dt_2. \quad (3.96)$$

Interpretiert man die Integrale als Grenzwerte von Summen und führt zunächst die Integration über  $t_2$  (mit  $\tau = t_2 - t_1 = \text{const}$ ) und dann mit  $dt_1 = d\tau$  über  $t_1$  aus, so folgt

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t_2) x(t_2 + \tau) dt_2 e^{-j\omega \tau} d\tau. \quad (3.97)$$

Durch Einsetzen der bekannten Beziehung für die Autokorrelationsfunktion erhält man als endgültige Beziehung den Ausdruck

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau. \quad (3.98)$$

Mit Gl. (3.98) wird deutlich, daß der Zusammenhang zwischen den Leistungsdichtespektren und den Korrelationsfunktionen durch die Fourier-Transformation gegeben ist

(Satz von Wiener-Chintschin). Damit gelten insgesamt folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ S_{ux}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ux}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} S_{xx}(\omega) e^{+j\omega\tau} d(j\omega) \\ R_{ux}(\tau) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} S_{ux}(\omega) e^{+j\omega\tau} d(j\omega). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Die Beziehungen zwischen der Autokorrelationsfunktion und dem Autoleistungsdichtespektrum in Gl. (3.99) vereinfachen sich für reelle Frequenzen  $\omega$ , da beide gerade Funktionen sind, zu

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \\ R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Für die mittlere Signalleistung gilt somit entsprechend Gl. (3.67)

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \overline{x^2(t)}. \quad (3.101)$$

### 3.2.4. Beziehungen zwischen Signal- und Systemmodellen

Die Signalbeschreibungen und -modelle sollen in diesem Abschnitt zur Beschreibung des Systemverhaltens im Zeit- und Frequenzbereich verwendet werden. Als Ausgangspunkt werden die grundsätzlichen Beziehungen für kontinuierliche deterministische Eingangs- und Ausgangssignale  $u(t)$  und  $x(t)$  angegeben. Es gilt entsprechend zu Bild 3.24 für den Zusammenhang

– im Zeitbereich

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (3.102)$$

– im Frequenzbereich

$$X(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega), \quad (3.103)$$

wobei  $g(\tau)$  die Gewichtsfunktion und  $G(j\omega)$  den komplexen Frequenzgang bedeuten.

In den folgenden Abschnitten soll, aufbauend auf den Korrelationsfunktionen und den Leistungsdichtespektren, ein Zusammenhang zu den genannten Systemmodellen ermittelt werden. Damit ergibt sich die im Bild 3.25 dargestellte Aufgabe.

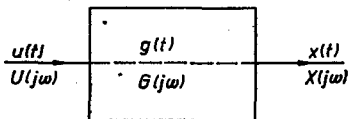


Bild 3.24. Signal- und Systembeschreibungen im deterministischen Fall

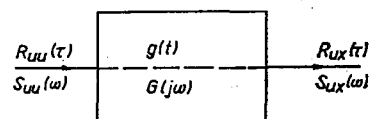


Bild 3.25. Signal- und Systembeschreibungen im stochastischen Fall

#### 3.2.4.1. Beziehungen zwischen den Korrelationsfunktionen $R(\tau)$ und der Gewichtsfunktion $g(t)$

Bei der Ableitung des Zusammenhangs wird von der Berechnungsvorschrift für die Kreuzkorrelationsfunktion entsprechend Gl. (3.49) ausgegangen:

$$R_{ux}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} u(t) x(t + \tau) dt.$$

Mit Gl. (3.52) kann  $x(t + \tau)$  ersetzt werden durch

$$x(t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) u(t - \lambda + \tau) d\lambda. \quad (3.104)$$

Damit gilt

$$R_{ux}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} u(t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) u(t - \lambda + \tau) d\lambda dt. \quad (3.105)$$

Durch Vertauschen der Reihenfolge der Integrationen erhält man aus Gl. (3.105)

$$R_{ux}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} u(t) u(t + \tau - \lambda) dt d\lambda$$

und somit die endgültige Beziehung zwischen den Korrelationsfunktionen und der Gewichtsfunktion in der Form

$$R_{ux}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) R_{uu}(\tau - \lambda) d\lambda. \quad (3.106)$$

Diese Beziehung ist eine wesentliche Grundlage für die Ermittlung der Gewichtsfunktion (s. Abschn. 6.2) und stellt eine Analogie zum Faltungsintegral für determinierte Signale von Gl. (3.102) dar.

#### 3.2.4.2. Beziehung zwischen den Leistungsdichtespektren $S(\omega)$ und dem komplexen Frequenzgang $G(j\omega)$

Geht man von dem Zusammenhang zwischen der Kreuzleistungsdichte  $S_{ux}(\omega)$  und der Kreuzkorrelationsfunktion  $R_{ux}(\tau)$  entsprechend Gl. (3.99)

$$S_{ux}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ux}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

aus und ersetzt die Kreuzkorrelation durch die Beziehung Gl. (3.106), so gilt

$$S_{ux}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) R_{uu}(\tau - \lambda) d\lambda e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.107)$$

Wird diese Gleichung mit dem Ausdruck

$$e^{-j\omega\lambda} e^{+j\omega\lambda} = 1$$

erweitert, erhält man folgende Beziehung:

$$S_{ux}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau - \lambda) e^{-j\omega(\tau - \lambda)} d\tau. \quad (3.108)$$

Die Fourier-Transformierte der Gewichtsfunktion ist der komplexe Frequenzgang  $G(j\omega)$  und die der Autokorrelationsfunktion entsprechend Gl. (3.99) das Autoleistungsspektrum  $S_{uu}(\omega)$ . Damit gilt

$$S_{xx}(\omega) = G(j\omega) S_{uu}(\omega). \quad (3.109)$$

Gl. (3.109) ist eine wichtige Bestimmungsgleichung für den komplexen Frequenzgang aus den Leistungsspektren und der Ausgangspunkt für viele weitere Beziehungen für den Entwurf von Filtern und von Steuerungen für stochastisch gestörte Systeme (Tafel 3.5). Eine weitere wichtige Beziehung zur Ermittlung des Amplitudenfrequenzgangs kann aus der Definition des Autoleistungsspektrums abgeleitet werden. Entsprechend Gl. (3.65) gilt

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{X_{T_0}(j\omega) X_{T_0}^*(-j\omega)}{2T_0}.$$

Unter Verwendung der bekannten Zusammenhänge von Gl. (3.103) kann diese Beziehung umgeformt werden in

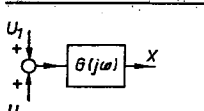
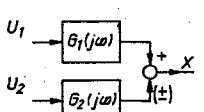
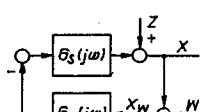
$$S_{xx}(\omega) = G(j\omega) G(-j\omega) \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{U_{T_0}(j\omega) U_{T_0}^*(-j\omega)}{2T_0}. \quad (3.110)$$

Damit erhält man als zweite Grundbeziehung

$$S_{xx}(\omega) = |G(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega). \quad (3.111)$$

Das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals ist also durch das „Betragsquadrat“ des komplexen Frequenzgangs und das Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals bestimmt. Ausgewählte Anwendungen sind wieder in Tafel 3.5 enthalten.

Tafel 3.5. Beziehungen zwischen Leistungsdichtespektren einfacher Strukturen

| Struktur                                                                            | Beziehungen                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $S_{xx}(\omega) =  G(j\omega) ^2 S_{u_1 u_1}(\omega) +  G(j\omega) ^2 S_{u_2 u_2}(\omega)$ <p>mit <math>R_{u_1 u_2}(\tau) = 0</math> für alle <math>\tau</math></p>                                                                                                                             |
|  | $S_{xx}(\omega) =  G_1(j\omega) ^2 S_{u_1 u_1}(\omega) +  G_2(j\omega) ^2 S_{u_2 u_2}(\omega)$ $(\pm) [G_1(j\omega) G_2(-j\omega) S_{u_1 u_2}(\omega) + G_2(j\omega) G_1(-j\omega) S_{u_2 u_1}(\omega)]$                                                                                        |
|  | $S_{x_{w-x_w}}(\omega) = \left  \frac{G_S G_R}{1 + G_S G_R} \right ^2 S_{w w}(\omega) + \left  \frac{1}{1 + G_S G_R} \right ^2 S_{zz}(\omega)$ <p>mit <math>R_{wz}(\tau) = 0</math> für alle <math>\tau</math></p> $\bar{x}_w^2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{x_{w-x_w}}(\omega) d\omega$ |

### 3.3. Erweiterte Signalmodelle

#### 3.3.1. Grundstrukturen

Die Beschreibung der zeitlichen Verläufe von Signalen durch komplizierte Signalmodelle ist in vielen Gebieten seit Jahrzehnten eine unter der Bezeichnung Zeitreihenanalyse erfolgreich praktizierte Methode [1.50, 3.9, 3.10, 3.13, 3.14, 3.15].

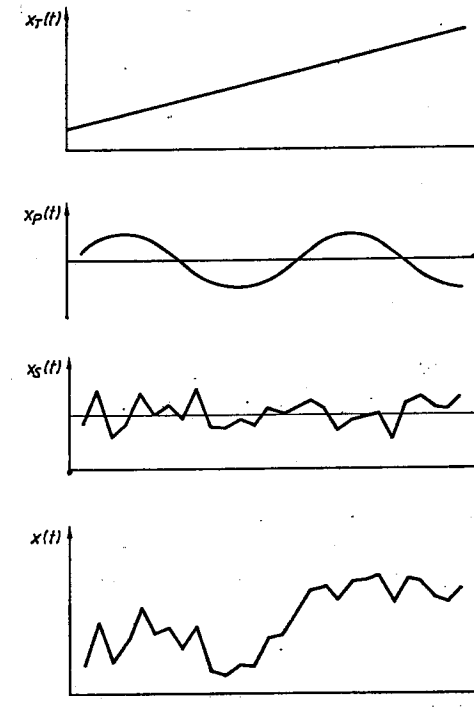


Bild 3.26  
Zeitlicher Verlauf eines Signals  
und seiner einzelnen Komponenten

Die vielfältig entwickelten Verfahren, besonders auf dem Gebiet der Ökonometrie, finden immer mehr Eingang in technische Bereiche.

In diesem Abschnitt sollen grundlegende Methoden der Analyse von Signalen, die in äquidistanten Abständen erfaßt wurden, vorgestellt werden. Diese zeitlichen Reihenfolgen der Signale werden auch als Zeitreihen bezeichnet. Als Signalmodelle werden mathematische Beschreibungen der deterministischen (determinierte Signalmodelle) bzw. der stochastischen (stochastische Signalmodelle) Signalverläufe angesehen. Die Signalmodelle können z.B. zur Interpretation, zur Filterung und zur Vorhersage der Signalverläufe verwendet werden. Es wird angenommen, daß ein Signal  $x(t)$  (Bild 3.26) folgende Komponenten besitzen kann:

$$x(t) = x_T(t) + x_P(t) + x_S(t); \quad (3.112)$$

$x_T(t)$  Signalanteil, der durch einen Polynomansatz beschreibbar ist

$x_P(t)$  Signalanteil, der durch einen periodischen Ansatz beschreibbar ist

$x_S(t)$  Signalanteil, der nur durch ein stochastisches Signalmodell beschreibbar ist.

Grundsätzlich wird bei allen Modellvorstellungen davon ausgegangen, daß das beobachtete Signal  $x(t)$  über sog. „erzeugende Funktionen“  $f(t)$  bei deterministischer Beschreibung und aus einem Rauschsignal  $\varepsilon(t)$  über eine Filterung bei der stochastischen Beschreibung entsteht.

Als deterministische Signalmodelle werden hier solche angesehen, die das Signal durch Polynome und/oder periodische Funktionen beschreiben. Damit kann ausgehend vom allgemeinen Ansatz

$$x(t) = f(t) + z(t) \quad (3.113)$$

für die erzeugenden Funktionen  $f(t)$  formuliert werden:

– Polynomansatz

$$f(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i,$$

– periodischer Ansatz

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^l c_i (\sin \omega_i t + \varphi_i).$$

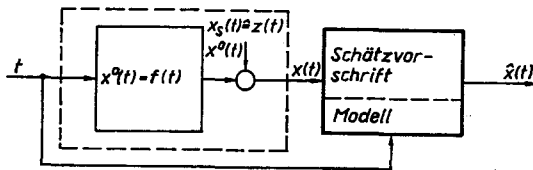


Bild 3.27  
Strukturannahme für die Beschreibung und Schätzung deterministischer Signalanteile

Im Bild 3.27 ist die angenommene Struktur für die Entstehung eines determinierten Signals  $x(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  dargestellt. Aus dem durch das stochastische Signal  $z(t)$  gestörten Signal  $x^0(t)$  ist mit Hilfe einer Schätzvorschrift ein Signalmodell durch Minimierung einer Gütefunktion zu ermitteln:

$$Q = f(x(t), \hat{x}(t)).$$

Beim Entwurf stochastischer Signalmodelle kann im einfachsten Fall von der Annahme ausgegangen werden, daß aus einem Signal  $\varepsilon(t)$  mit der Eigenschaft des „weißen Rauschens“, d.h.

$$E\{\varepsilon(t)\varepsilon(t+\tau)\} = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{für } \tau = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.114)$$

und

$$E\{\varepsilon(t)\} = 0,$$

über ein lineares Filter das korrelierte stochastische Signal  $x(t)$  erzeugt wird (Bild 3.28). Als Beschreibungsform wird die lineare stochastische Differentialgleichung in der Form

$$\sum_{j=0}^m c_j x^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^l d_i \varepsilon^i(t) \quad (3.115)$$

mit

$$x^{(j)}(t) = d^j x(t)/dt^j, \quad \varepsilon^i(t) = d^i \varepsilon(t)/dt^i$$

allgemein verwendet. Aus dem beobachteten Signal  $x(t)$  ist mit Hilfe von Schätzverfahren ein stochastisches Signalmodell so zu entwickeln, daß wiederum eine Gütefunktion  $Q$

ein Minimum wird. Damit wird die Ermittlung der Parameter des linearen Filters, das die beobachteten Signalwerte von  $x(t)$  aus dem Rauschsignal  $\varepsilon(t)$  erzeugt, zur Aufgabstellung der Theorie linearer stochastischer Prozesse [3.9, 3.10].

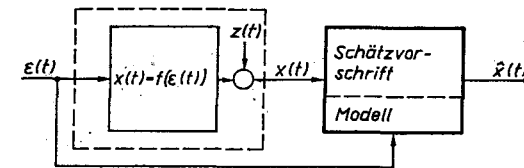


Bild 3.28  
Strukturannahme für die Beschreibung und Schätzung stochastischer Signalanteile

### 3.3.2. Erweiterte deterministische Signalmodelle

#### 3.3.2.1. Deterministische Signalmodelle mit Polynomansatz

Eine der gebräuchlichsten und universell einsetzbaren analytischen Beschreibungsformen von äquidistant abgetasteten Signalwerten, d.h. der Zeitreihe  $x(kT)$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ , stellt der folgende Polynomansatz dar:

$$x(kT) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i (kT)^i + z(kT); \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.116)$$

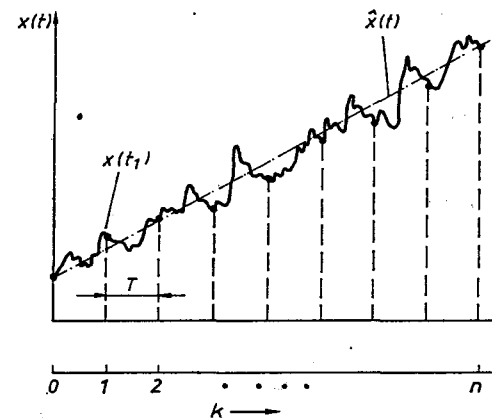


Bild 3.29  
Verlauf des gemessenen Signals  $x(t)$  und der Schätzung  $\hat{x}(t)$

Dabei bedeuten  $n$  die Anzahl der beobachteten Meßpunkte und  $m$  die Ordnung des Polynomansatzes. Für eine einfache Struktur ist das Signal  $x(t)$  und die abgetastete Folge  $x(kT)$  im Bild 3.29 dargestellt. Für das Signalmodell kann entsprechend Gl. (3.116) die Beziehung

$$\hat{x}(kT) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_i (kT)^i; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.117)$$

angenommen werden. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird bei allen deterministischen Signalmodellen für  $x_T(kT) \triangleq x(kT)$  bzw.  $x_P(kT) \triangleq x(kT)$  gesetzt. In dem Modell sind die Ordnung  $m$  und die Modellparameter  $\hat{a}_i$  zu schätzen. Die Modellordnung wird häufig nach folgender Strategie ermittelt:

1. Start mit der Ordnung  $m = 1$
2. Schätzung der Parameter  $\hat{a}_i$

3. Test auf Stationarität des Fehlers  $e(kT) = x(kT) - \hat{x}(kT)$  und der Korrelationsfunktion  $R_{ee}(\tau)$  auf weißes Rauschen
4. wenn die Tests negativ sind, wird die Modellordnung um 1 erhöht und Schritt 2 realisiert; sonst Abbruch.

Als eine der robustesten Methoden für die Parameterschätzung hat sich die Methode der kleinsten Fehlerquadrate, die *Regression*, auch bei diesem Modelltyp bewährt. Bei der direkten Methode der Regression (s. Abschn. 5.2.2) wird von der Fehlergleichung

$$e(kT) = [x(kT) - \hat{x}(kT)] \quad (3.118)$$

ausgegangen.

Für  $n$  Beobachtungen des Signals  $x(t)$  zu den Zeitpunkten  $k = 1, 2, \dots, n$  erhält man für die Parameter des Modells von Gl. (3.117) folgende Schätzgleichung:

$$\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{x} \quad (3.119)$$

mit

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m]$$

$$\mathbf{x}^T = [x(1), \dots, x(n)]$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & T & \dots & T^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & nT & \dots & (nT)^m \end{bmatrix}$$

Als Gütewerte für die Schätzung können berechnet werden

– Reststreuung

$$s_R^2 = \frac{1}{n - (m + 2)} \sum_{k=1}^n [x(kT) - \hat{x}(kT)]^2, \quad (3.120)$$

– Varianz

$$\text{var} \{\hat{a}_i\} = p_{ii} s_R^2,$$

– Kovarianz

$$\text{cov} \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = p_{ij} s_R^2$$

mit der Präzisionsmatrix  $\mathbf{P} = [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1}$ ,

– Konfidenzintervall für die Parameter

$$|a_i - \hat{a}_i| = t_{\alpha, f} s_R \sqrt{p_{ii}},$$

– Hypothesentest  $H_0: a_i = 0$

$$|\hat{a}_i| \geq t_{\alpha, f} s_R \sqrt{p_{ii}}.$$

Der rechentechnische Aufwand für die Berechnung der Präzisionsmatrix  $\mathbf{P}$  kann durch die Verwendung der Eulerschen Summenformeln für endliche Folgen wesentlich reduziert werden [3.16]. Ferner muß beachtet werden, daß bei einer hohen Modellordnung und immer größer werdendem Beobachtungsumfang  $n$  bei Rechnern mit geringen Rechengenauigkeiten Probleme entstehen. Deshalb ist es häufig günstig, mit einem festen „Beobachtungsfenster“ eine gleitende Schätzung der Modellparameter nach der im

Bild 3.30 angegebenen Strategie vorzunehmen. Diese Vorgehensweise hat die Vorteile einer wesentlichen Reduktion der Rechenzeit – die Präzisionsmatrix wird nur einmal für das gewählte Fenster berechnet – und der numerischen Stabilität. Nachteilig ist die Unsicherheit über den wirklichen Modellansatz, da nur das Beobachtungsfenster zur Verfügung steht. Dadurch sind Vorhersagen über Zeiträume, die die Länge des Beobachtungsfensters überschreiten, in der Regel mit großen Unsicherheiten behaftet. Die Schätzung der Parameter von Polynomansätzen 1. und 2. Ordnung und die trendkorrigierten Signalverläufe werden für ein gewähltes Testbeispiel im Beispiel 3.4 gezeigt.

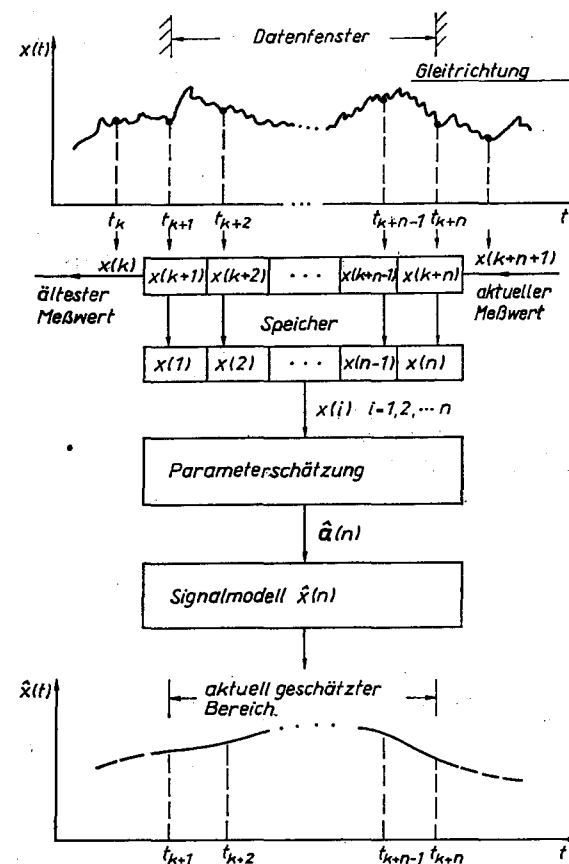


Bild 3.30  
Prinzip  
der gleitenden Schätzung

Eine weitere Möglichkeit der Echtzeitparameterschätzung ist neben der gleitenden Schätzung die Anwendung von indirekten Schätzverfahren. Durch sie wird es möglich, die Modellparameter aktuell nachzuführen und mathematisch schwer erfaßbare zeitliche Verläufe durch einfache zeitvariante Modellansätze anzunähern. Als eine der leistungsfähigsten Methoden hat sich die rekursive Regression herausgestellt. Entsprechend den im Abschnitt 5.4.3 durchgeführten allgemeinen Ableitungen dieses Schätzverfahrens gelten für den Modellansatz Gl. (3.117) die Schätzgleichungen der rekursiven Regression:

$$\hat{\mathbf{a}}(k+1) = \hat{\mathbf{a}}(k) + \mathbf{k}(k+1) [x(k+1) - \mathbf{m}^T(k+1) \hat{\mathbf{a}}(k)] \quad (3.121)$$

|              |                                                   |
|--------------|---------------------------------------------------|
| Beispiel 3.4 | Ermittlung von Signalmodellen mit Polynomansätzen |
|--------------|---------------------------------------------------|

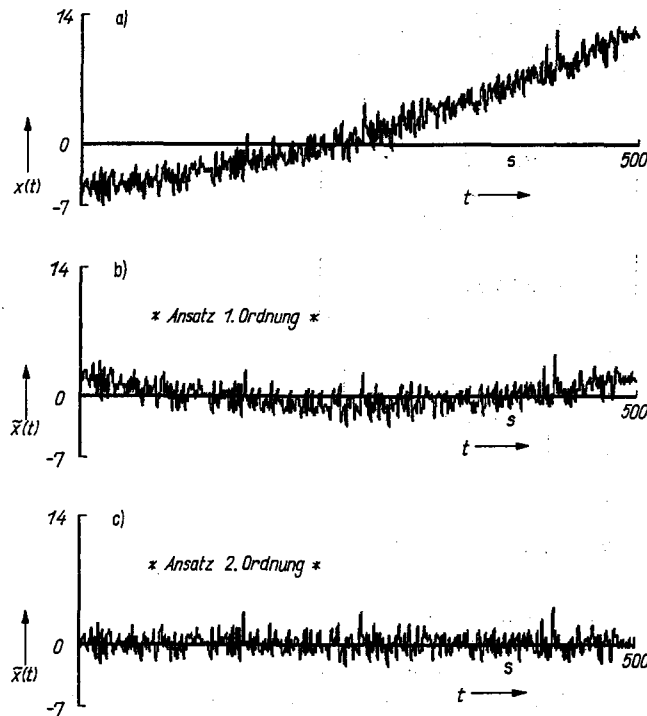
**Gegeben:** Signalgleichung  
 $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + z(t)$ ,  
 $a_0 = -5$ ,  $a_1 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ,  $a_2 = 5 \cdot 10^{-5} (\text{s}^{-1})^2$ ,  
 $z(t)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),  
 Abtastzeit  $T = 1 \text{ s}$ ,  
 Beobachtungen: 500.

**Gesucht:** Geschätzte Parameter für die Polynomansätze 1. und 2. Ordnung sowie das jeweils trendkorrigierte Signal  $\tilde{x}(kT) = x(kT) - \hat{x}(kT)$ .

**Ergebnis:** Als Schätzwerte aus der Stichprobe ergeben sich

- für den Ansatz 1. Ordnung  
 $\hat{a}_0 = -7,06$ ,  $\hat{a}_1 = 0,035 \text{ s}^{-1}$ ,
- für den Ansatz 2. Ordnung  
 $\hat{a}_0 = -5,05$ ,  $\hat{a}_1 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ,  
 $\hat{a}_2 = 4,79 \cdot 10^{-5} (\text{s}^{-1})^2$ .

Die mit diesen Parametern korrigierten Signalwerte sind im Bild zu Beispiel 3.4 dargestellt.



Die Signalverläufe zeigen, daß bei der Wahl eines Ansatzes 1. Ordnung der Trend nicht eliminiert werden kann. Erst die Erhöhung der Ordnung auf  $m = 2$  führt dazu, daß das korrigierte Signal  $\tilde{x}(kT)$  trendfrei und damit stationär wird.

mit

$$k(k+1) = P(k) m(k+1) [m^T(k+1) P(k) m(k+1) + 1]^{-1}$$

$$m^T(k+1) = [1, (k+1)T, \dots, ((k+1)T)^m]$$

$$P(k) = P(k-1) - k(k) m^T(k) P(k-1). \quad (3.122)$$

Entsprechend den Ausführungen im Abschnitt 5.4.3 ist der in Gl. (3.122) dargestellte Schätzalgorithmus in der Lage, bei geeigneter Wahl der Startmatrix  $P(0)$  die Modellparameter anzupassen; er kann sie aber nicht nachführen. Erst durch die Einführung einer Wichtung der Matrix  $P$  entsprechend den Beziehungen

$$\text{a) } P^*(k) = P(k) + P'; \quad P' = c_1 I, \quad 10^{-2} \leq c_1 \leq 10^2,$$

$$\text{b) } P^*(k) = \frac{1}{c_2^2} P(k); \quad 0 < c_2 < 1 \quad (3.123)$$

wird die Nachführung zeitvarianter Modellparameter durch „Vergessen“ zurückliegender Werte möglich. Die Wahl der Start- und Wichtungsparameter für den Schätzalgorithmus der gewichteten rekursiven Regression erfolgt auch für diesen Modelltyp nach den Richtlinien im Abschnitt 5.4.3.

Mit dem geschätzten Signalmodell in Form eines Polynomansatzes können folgende Aufgaben gelöst werden:

- Glättung des Signals  $x(t)$ ,
- Beseitigung tieffrequenter Anteile (Trend) des Signals  $x(t)$ .

### 3.3.2.2. Deterministische Signalmodelle mit periodischem Ansatz

Viele Signalverläufe in technischen und nichttechnischen Prozessen enthalten dominierende periodische Komponenten. Obwohl die Beschreibung solcher Signale auch prinzipiell durch die im Abschnitt 3.3.2.1 vorgestellten Signalmodelle mit Polynomansatz erfolgen kann, ist die Verwendung periodischer Ansätze aus Aufwandsgründen (Modellansatz, Rechenaufwand) und häufig wegen der Interpretierbarkeit des Modells angebracht. Die große Bedeutung dieses Modelltyps und die Schwierigkeiten seiner Schätzung hatten zur Folge, daß eine Vielzahl von Verfahren in den letzten Jahrzehnten entwickelt wurde [3.9, 3.10, 3.17, 3.18].

Im Rahmen dieses Buches werden solche Strategien ausgewählt, die einerseits das Grundproblem darstellen und andererseits den heutigen Stand der Rechentechnik berücksichtigen.

Es wird in diesem Fall entsprechend Gl. (3.113) davon ausgegangen, daß das Signal  $x(t)$  durch eine determinierte periodische Funktion  $f(t)$  und die Störung  $z(t)$  erzeugt wird. Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

können die unter der Summe von Gl. (3.113) stehenden Funktionen umgeformt werden in

$$c_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t$$

$$a_i = c_i \sin \varphi_i, \quad b_i = c_i \cos \varphi_i \quad (3.124)$$

$$c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \tan \varphi_i = a_i/b_i.$$

Werden die Beziehungen von Gl. (3.124) in die Gl. (3.113) eingesetzt, erhält man als Signalbeschreibung in den Tastpunkten  $kT$

$$x(kT) = a_0 + \sum_{i=1}^l [a_i \cos \omega_i(kT) + b_i \sin \omega_i(kT)] + z(kT); \quad (3.125)$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

und als Modellgleichung gilt analog

$$\hat{x}(kT) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^l \hat{a}_i \cos \hat{\omega}_i(kT) + \hat{b}_i \sin \hat{\omega}_i(kT). \quad (3.126)$$

Als Schätzaufgabe für das Signalmodell ist die Ermittlung der Frequenzen  $\hat{\omega}_i$  und der Parameter  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{b}_i$  auf der Grundlage von  $n$  Beobachtungen zu lösen. Da in Gl. (3.126) die Frequenzen  $\hat{\omega}_i$  nichtlinear mit der sog. unabhängigen Variablen der Zeit zusammenhängen, ist ihre Ermittlung im Gegensatz zu den Amplitudenparametern  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{b}_i$  mittels der Regression i. allg. nicht möglich. Einen Ausweg bildet folgende Strategie:

1. Bestimmung geeigneter Frequenzen  $\hat{\omega}_i$ ,
2. Schätzung der zu den Frequenzen  $\hat{\omega}_i$  gehörenden Parameter  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{b}_i$ ,
3. Überprüfung und Anpassung des Modells.

Dabei verschmelzen häufig die Stufen 2 und 3.

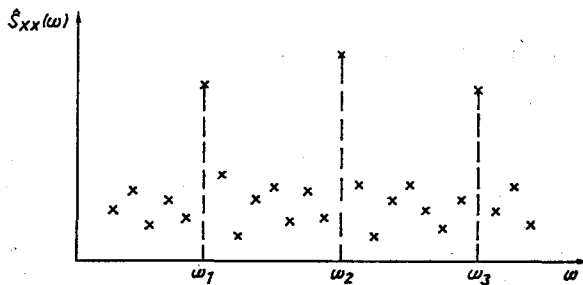


Bild 3.31  
Dominierende Frequenzen  
 $\hat{\omega}_1$ ,  $\hat{\omega}_2$  und  $\hat{\omega}_3$   
in einem geschätzten  
Spektrum

**Schritt 1.** Ermittlung der dominierenden Frequenzen in  $x(t)$  mit Methoden der Spektralanalyse.

Ausgangspunkt für die Ermittlung dominierender Frequenzen im Signal  $x(t)$  sind die Schätzung des Autoleistungsdichtespektrums  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  und seine Auswertung. Die Schätzmethoden sind im Abschnitt 3.2.3.4 angegeben. Es werden die Frequenzen  $\hat{\omega}_i$  als dominierend angesehen, die sich in ihrem Leistungsanteil wesentlich von den anderen unterscheiden (Bild 3.31). Bei der Anwendung der im Abschnitt 3.2.3.4 vorgestellten Methoden ist zu beachten, daß die vorhandene Datenmenge und die gewählte Abtastzeit die möglichen Frequenzen  $\hat{\omega}_i$  beschränken. Außerdem bewirkt die Einführung der Wichtungsfenster bei der Berechnung des Spektrums über die Korrelationsfunktionen zwar eine Glättung des Spektrums, aber damit auch eine Reduzierung der Signifikanz von dominierenden Frequenzen. Somit gilt, daß

- eine Ermittlung sehr eng begrenzter Frequenzbereiche für den Ansatz von Gl. (3.126) nur gesichert ist, wenn eine Variation des Meßwertumfangs die Frequenzen bestätigt,
- die Ermittlung ganz spezieller Frequenzen nur in Ausnahmefällen möglich ist, da  $\omega_i = i\omega_0$ ;  $i = 0, 1, \dots, n/2$  ( $\omega_0$  Grundwelle) gilt.

**Gegeben:**

Signalgleichung

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{125} t + b_1 \sin \frac{2\pi}{125} t + z(t),$$

$$a_0 = 0,15, \quad a_1 = 0,25, \quad b_1 = 0,25,$$

$z(t)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),

Abtastzeit  $T = 1$  s,

Beobachtungen: 500.

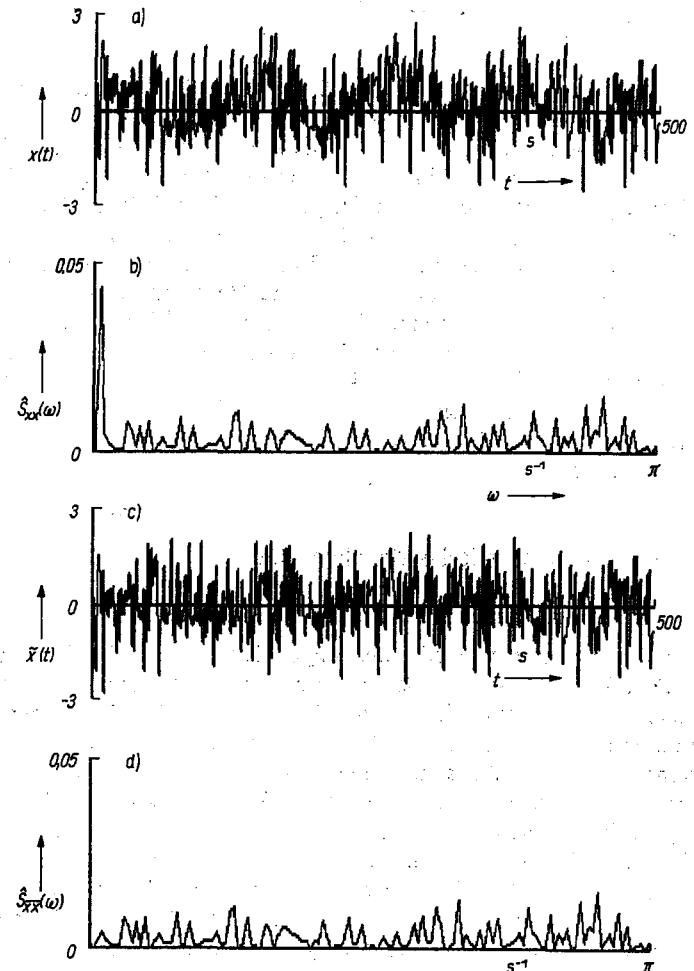
**Gesucht:**

Schätzwerte für die Frequenz  $\hat{\omega}_1$  und die Parameter  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{b}_1$ .

**Ergebnis:**

Aus der Spektralanalyse wird im ersten Schritt die Frequenz  $\hat{\omega}_1$  zu  $\hat{\omega}_1 = 0,04884 \text{ s}^{-1}$  ( $\omega_1 = 0,05024 \text{ s}^{-1}$ ) ermittelt. Die mit dieser Frequenz durchgeführte Schätzung der Parameter  $a_1$  und  $b_1$  entsprechend Gl. (3.128) ergibt das Resultat  $\hat{a}_0 = 0,199$ ,  $\hat{a}_1 = 0,18$ ,  $\hat{b}_1 = 0,40$ .

Eine vorgenommene Signalkorrektur in der Form  $\tilde{x}(kT) = x(kT) - \hat{x}(kT)$  zeigt sowohl im zeitlichen Verlauf von  $x(kT)$  als auch im Leistungsspektrum des korrigierten Signals  $\hat{S}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\omega)$ , daß die dominierende periodische Komponente durch das Signalmodell sehr gut abgebildet wird (Bild zu Beispiel 3.5).



**Schritt 2.** Schätzung der Parameter  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$  mit der Methode der Regression bei Verwendung dominierender Frequenzen  $\hat{\omega}_i$ .

Unter Annahme der Signalbeschreibungen für  $x(kT)$  und  $\hat{x}(kT)$  in den Gln. (3.125) und (3.126) kann für das Verfahren der Regression für  $n$  Beobachtungen der Fehlervektor

$$e(kT) = [x(kT) - \hat{x}(kT)] \quad (3.127)$$

gebildet werden. Als Schätzvorschrift ergibt sich analog den Abschnitten 5.2.2 und 3.2.2.1 für  $n$  Beobachtungen ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$$\hat{s} = [M^T M]^{-1} M^T x \quad (3.128)$$

mit

$$s^T = [\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_l, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_l]$$

$$x^T = [x(T), \dots, x(nT)]$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cos \hat{\omega}_1 T & \dots & \cos \hat{\omega}_l T & \sin \hat{\omega}_1 T & \dots & \sin \hat{\omega}_l T \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \hat{\omega}_1 (nT) & \dots & \cos \hat{\omega}_l (nT) & \sin \hat{\omega}_1 (nT) & \dots & \sin \hat{\omega}_l (nT) \end{bmatrix}.$$

Die Gütewerte der Schätzung werden analog den Beziehungen von Gl. (3.120) berechnet. Als Startparameter für die Anzahl  $l$  der Frequenzen sollte  $1 \leq l \leq 3$  gewählt werden.

Der notwendige Rechenaufwand von Gl. (3.128) steigt bei einer Vielzahl von dominierenden Frequenzen und großen Meßwertumfängen enorm an. Eine Reduzierung des Aufwands ist durch die von *Anderson* [3.10] vorgeschlagenen Vereinfachungen für die Elemente der  $P$ -Matrix möglich. Ferner sollte beachtet werden, daß eine zu enge Staffe- lung der dominierenden Frequenzen zu einer schlecht konditionierten  $P$ -Matrix aufgrund der eng benachbarten periodischen Funktionen führt. Auf eine weitere Reduzierung des Rechenaufwands bei gleichzeitiger Vereinfachung des Modellansatzes von Gl. (3.126) durch ein Orthogonalsystem der periodischen Funktionen sei an dieser Stelle nur verwiesen [3.10]. Für einen einfachen Test ist im Beispiel 3.5 die in diesem Abschnitt dargelegte Strategie dargestellt.

### 3.3.3. Erweiterte stochastische Signalmodelle

#### 3.3.3.1. Grundansätze

Neben der Beschreibung von Meßwertfolgen durch deterministische Signalmodelle (s. Abschn. 3.3.2) gewinnt in den letzten Jahren die Beschreibung des Verlaufs und der inneren Zusammenhänge von Signalen auf der Basis der Theorie linearer stochastischer Prozesse durch stochastische Signalmodelle an Bedeutung [2.9, 3.10, 3.11, 3.18, 3.19]. Diese Beschreibungsform ist besonders in der Ökonomie, der Medizin und der Meteorologie verbreitet. Im Bereich der Technik ist ihre Anwendung noch nicht so ausgeprägt.

Ausgangspunkt ist die im Abschnitt 3.3.1 bereits dargelegte Annahme, daß das stochastische Signal  $x(t)$  über ein Filter mit den Übertragungseigenschaften  $G_F(j\omega)$  aus dem stationären „weißen Rauschen“  $\varepsilon(t)$  erzeugt wird; s. Bild 3.28 und Gl. (3.114). Für den Fall äquidistanter zeitlicher Werte von  $\varepsilon(t)$  und  $x(t)$  erhält man als allgemeine Beschreibung mit  $\varepsilon(kT) \triangleq \varepsilon(k)$  und  $x(kT) \triangleq x(k)$  anstelle der stochastischen Differential-

gleichung von Gl. (3.114) die stochastische Differenzengleichung

$$a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_r x(k-r) = b_0 \varepsilon(k) + \dots + b_l \varepsilon(k-l). \quad (3.129)$$

Mit Verwendung eines Verschiebeoperators  $q^{-1}$  kann Gl. (3.129) durch die Vereinbarung  $x(k-n) \triangleq x(k) q^{-n}$  umgeformt werden in

$$A(q^{-1}) x(k) = B(q^{-1}) \varepsilon(k) \quad (3.130)$$

mit den Summenverschiebeoperatoren

$$A(q^{-1}) = [a_0 + a_1 q^{-1} + \dots + a_r q^{-r}]$$

$$B(q^{-1}) = [b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_l q^{-l}].$$

Die Gl. (3.130) beschreibt einen *autoregressiven Prozeß der gleitenden Mittel* (autoregressive moving average model oder ARMA-Modell) der Ordnung  $(r, l)$ . Aus dieser Beschreibung kann ferner

– das *autoregressive Modell* (AR-Modell) der Ordnung  $(r)$

$$A(q^{-1}) x(k) = \varepsilon(k), \quad (3.131)$$

– das *Modell der gleitenden Mittel* (MA-Modell) der Ordnung  $(l)$

$$x(k) = B(q^{-1}) \varepsilon(k) \quad (3.132)$$

abgeleitet werden.

Neben diesen drei Grundtypen werden für die Beschreibung instationärer stochastischer Prozesse Modelle verwendet, die durch eine Differenzbildung der gemessenen benachbarten Signalwerte den instationären Signalanteil (Trend) mit erfassen. Der so abgebildete *autoregressive integrierende Prozeß der gleitenden Mittel* der Ordnung  $(r, d, m)$  (ARIMA-Modell) wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$A(q^{-1}) \nabla^d x(k) = B(q^{-1}) \varepsilon(k); \quad (3.133)$$

$\nabla^d x(k)$   $d$ -te Differenz der benachbarten Zeitreihenwerte.

Seine Anwendung ist besonders bei kurzen Zeitreihen vorteilhaft, und die Ordnung  $d$  der Differenzbildung wird häufig auf  $\leq 2$  beschränkt.

Ein weiteres stochastisches Signalmodell ergibt sich aus der Verallgemeinerung des ARMA-Modells durch Hinzufügen eines meßbaren Eingangssignals  $u(k)$  als Hilfsgröße. Mit den Vereinbarungen für die Systembeschreibung in den Abschnitten 1.4 und 6.3 gilt für diesen autoregressiven Prozeß der gleitenden Mittel mit der Hilfsgröße  $u(k)$  der Ordnung  $(r, m, n)$  (ARMAX-Modell, autoregressive moving average with exogenous variable) folgende Beziehung:

$$A'(q^{-1}) x(k) = B(q^{-1}) \varepsilon(k) + C(q^{-1}) u(k) \quad (3.133a)$$

mit

$$C(q^{-1}) = [c_0 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n}].$$

Das ARMAX-Modell, das häufig auch als gesteuertes ARMA-Modell (CARMA-Modell) bezeichnet wird, ist als ein Spezialfall in dem von *Aström* und *Bohlin* [1.38] vorgeschlagenen verallgemeinerten Systemmodell enthalten (s. Abschn. 6.3) und soll deshalb an dieser Stelle nicht weiter betrachtet werden.

Im folgenden wird deshalb nur das ARMA-Modell mit seinen Grundtypen, dem AR-Modell und dem MA-Modell, vorgestellt.

## 3.3.3.2. Autoregressive Modelle (AR-Modell)

Autoregressive Signalmodelle werden vor allem zur Vorhersage des Signalverlaufs (Extrapolation) aus den zurückliegenden Signalwerten verwendet. Aus Gl. (3.130) ergibt sich für  $a_0 = 1$

$$x(k) = A'(q^{-1}) x(k) + \varepsilon(k) \quad (3.134)$$

mit

$$A'(q^{-1}) = [-a_1 q^{-1}, -\dots, -a_r q^{-r}].$$

Der aktuelle Signalwert  $x(k)$  ergibt sich hier aus der bewerteten Signalvergangenheit  $A'(q^{-1}) x(k)$  und der Zufallsgröße  $\varepsilon(k)$ . Zur Schätzung der Parameter  $a_i$  des AR-Modells wird unter Verwendung der Methode der Regression für  $n$  Beobachtungen die Fehlergleichung (s. Abschn. 5.2.2)

$$\hat{\varepsilon}(k) = x(k) - \hat{A}'(q^{-1}) x(k) \quad (3.135)$$

mit

$$\hat{\varepsilon}^T(k) = [\hat{\varepsilon}(k), \dots, \hat{\varepsilon}(k+n)]$$

$$x^T(k) = [x(k), \dots, x(k+n)]$$

$$\hat{A}'(q^{-1}) x(k) = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1 x(k-1) & \dots & -\hat{a}_r x(k-r) \\ \vdots & & \vdots \\ -\hat{a}_1 x(k-1+n) & \dots & -\hat{a}_r x(k-r+n) \end{bmatrix}$$

benutzt. Damit ergibt sich die Schätzvorschrift für die Parameter zu

$$\hat{a} = [X^T X]^{-1} X^T x \quad (3.136)$$

mit

$$\hat{a}^T = [-\hat{a}_1, \dots, -\hat{a}_r]$$

$$x^T = [x(k), \dots, x(k+n)]$$

$$X = \begin{bmatrix} x(k-1), & \dots, & x(k-r) \\ \vdots & & \vdots \\ x(k+n-1), & \dots, & x(k+n-r) \end{bmatrix}.$$

Die Vorhersage eines Signalwerts um einen Zeittakt  $T$  erfolgt dann entsprechend der Beziehung

$$\hat{x}(k+1) = +\hat{a}_1 x(k) + \dots + \hat{a}_r x(k-r). \quad (3.137)$$

Eine Überprüfung des Modells kann mittels der Gütewerte von Gl. (3.120) oder über die Berechnung der Autokorrelationsfunktion  $R_{xx}(mT)$ , die im Idealfall den Bedingungen von Gl. (3.114) entsprechen sollte, erfolgen.

Anhand der ermittelten Koeffizienten  $\hat{a}_i$  kann die Stationarität des Signals sehr einfach dadurch geprüft werden, daß die Lösungen der Gleichung

$$1 + \hat{a}_1 q^{-1} + \dots + \hat{a}_r q^{-r} = 0$$

außerhalb des Einheitskreises liegen müssen [3.2, 3.9]. Natürlich können die Parameter des AR-Modells auch mittels der rekursiven Regression geschätzt werden; s. Gl. (3.121).

Für dieses Modell gilt die rekursive Schätzvorschrift

$$\hat{a}(k+1) = \hat{a}(k) + k(k+1) [x(k+1) - m^T(k+1) \hat{a}(k)] \quad (3.138)$$

mit

$$m^T(k+1) = [x(k), \dots, x(k-r)], \quad k(k+1) \text{ s. Gl. (3.121).}$$

Alle anderen Beziehungen und Startwerte sind wie im Abschnitt 3.3.2.1 zu wählen.

Neben dem Signalmodell von Gl. (3.134) sind die Korrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum des autoregressiven Prozesses zur Signalanalyse von großer Bedeutung.

Die Korrelationsfunktion  $R_{xx}(mT)$  für das stationäre abgetastete Signal  $x(k)$  erhält man durch Multiplikation der Gleichung

$$x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_r x(k-r) = \varepsilon(k) \quad (3.139)$$

mit den Signalwerten  $x(k-m)$  und Bildung der Erwartungswerte

$$\begin{aligned} & x(k) x(k-m) + a_1 x(k-1) x(k-m) + \dots + a_r x(k-r) x(k-m) \\ &= \varepsilon(k) x(k-m), \\ & E\{x(k) x(k-m)\} + a_1 E\{x(k-1) x(k-m)\} + \dots \\ &+ a_r E\{x(k-r) x(k-m)\} = E\{\varepsilon(k) x(k-m)\}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

In verkürzter Schreibweise  $R_{xx}(mT) \triangleq R_{xx}(m)$  und unter Beachtung, daß der Ausdruck

$$E\{\varepsilon(k) x(k-m)\} = 0; \quad m > 0,$$

geht Gl. (3.140) in die Form

$$R_{xx}(m) + a_1 R_{xx}(m-1) + \dots + a_r R_{xx}(m-r) = 0; \quad m > 0 \quad (3.141)$$

über. Analog ergibt sich für  $R_{xx}(0)$

$$R_{xx}(0) + a_1 R_{xx}(-1) + \dots + a_r R_{xx}(-r) = \sigma_\varepsilon^2 \quad (3.142)$$

wegen

$$E\{\varepsilon(k) x(k)\} = \sigma_\varepsilon^2.$$

Für die normierte Autokorrelationsfunktion erhält man mit den Gln. (3.141) und (3.142)

$$R'_{xx}(m) = \frac{R_{xx}(m)}{R_{xx}(0)} = -a_1 R'_{xx}(m-1) - \dots - a_r R'_{xx}(m-r); \quad m > 0. \quad (3.143)$$

Die Gln. (3.141) und (3.143) werden auch als *Yule-Walker-Gleichungen* bezeichnet. Mit ihrer Hilfe ist ebenfalls eine Schätzung der Parameter  $a_i$  möglich [3.9].

Das Leistungsdichtespektrum des autoregressiven Prozesses kann durch Anwendung der Wiener-Chintschinschen Beziehung – s. Abschnitt 3.2.3, Gl. (3.77) – oder über den Zusammenhang zwischen den Leistungsdichten und der Systembeschreibung – s. Abschnitt 3.2.4, Gl. (3.111) – erfolgen. Der letzte Weg soll hier näher erläutert werden, weil er unter den Bedingungen für das Signal  $\varepsilon(t)$  und der Kenntnis der Parameter  $a_i$  geschlossene Lösungen für das Leistungsspektrum ergibt.

Analog zu Gl. (3.111) gilt für den AR-Prozeß

$$S_{xx}(\omega) = |G_F(j\omega)|^2 S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega). \quad (3.144)$$

Für den vorliegenden diskontinuierlichen Fall erhält man aus der stochastischen Differenzengleichung (3.134) durch eine Z-Transformation die Pulsübertragungsfunktion des Filters zu [3.2]

$$G_F(z) = \frac{X(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_r z^{-r}} \quad \text{mit } z = e^{j\omega T}. \quad (3.145)$$

Damit ergibt sich für den Ausdruck  $|G_F(j\omega)|^2$  in Gl. (3.144) aus Gl. (3.145) über einige Umformungen die allgemeine Beziehung

$$|G_F(e^{j\omega T})|^2 = 1 \left/ \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r a_i a_j \cos(i-j)\omega T \right. \quad (3.146)$$

Das Leistungsdichtespektrum des Signals  $\varepsilon(t)$  ergibt sich aus den Annahmen im Abschnitt 3.3.3.1 zu

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = \sigma_\varepsilon^2. \quad (3.147)$$

Das Leistungsdichtespektrum des autoregressiven Prozesses der Ordnung  $r$  ist somit gegeben durch

$$S_{xx}(\omega) = \sigma_\varepsilon^2 \left/ \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r a_i a_j \cos(i-j)\omega T \right. \quad (3.148)$$

Soll das Spektrum aus den gemessenen Signalwerten geschätzt werden, sind in Gl. (3.148) die Koeffizienten  $\hat{a}_i$  einzusetzen, und die Streuung des Signals  $\varepsilon(t)$  ist als Schätzung aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(k) &= x(k) - [\hat{a}_1 x(k-1) + \dots + \hat{a}_r x(k-r)] \\ \sigma_\varepsilon^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\hat{\varepsilon}(k) - \overline{\hat{\varepsilon}(k)})^2 \end{aligned} \quad (3.149)$$

zu ermitteln.

Im Beispiel 3.6 sind für eine Stichprobe eines autoregressiven Prozesses 1. Ordnung mit positivem Parameter  $a_1$  die Korrelationsfunktion und das Leistungsspektrum dargestellt. Es zeigt ein typisches tieffrequentes Signalverhalten.

Wird in der Gleichung des autoregressiven Prozesses 1. Ordnung der Parameter  $a_1$  negativ gewählt, entsteht ein Signal mit dominierenden hochfrequenten Komponenten. Den typischen Verlauf für diesen Fall zeigt Beispiel 3.7.

### 3.3.3.3. Modelle der gleitenden Mittel (MA-Modelle)

Das Modell der gleitenden Mittel ist die zweite Grundform des allgemeinen stochastischen Signalmodells von Gl. (3.130). Für dieses Modell wird angenommen, daß sich die Signalwerte  $x(k)$  aus den durch die Koeffizienten  $b_i$  bewerteten Werten des „weißen Rauschens“  $\varepsilon(k-i)$  nach der Vorschrift

$$x(k) = B(q^{-1}) \varepsilon(k) \quad (3.150)$$

ergeben. Die Gl. (3.150) stellt ein lineares Filter der Zufallsgröße  $\varepsilon(k)$  dar; s. Analogie zu digitalen Filtern im Abschnitt 3.4.

Die Schätzung der Parameter des MA-Modells bereitet gegenüber der des AR-Modells größere Schwierigkeiten, weil im MA-Modell die Fehler nichtlineare Funktionen der

### Beispiel 3.6 Kennfunktionen eines autoregressiven Prozesses 1. Ordnung ( $+1 < a_1 < 0$ )

Gegeben:

Signalgleichung

$$x(k) + a_1 x(k-1) = \varepsilon(k),$$

$$a_1 = 0,7,$$

$\varepsilon(k)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),

Abtastzeit  $T = 1$  s,

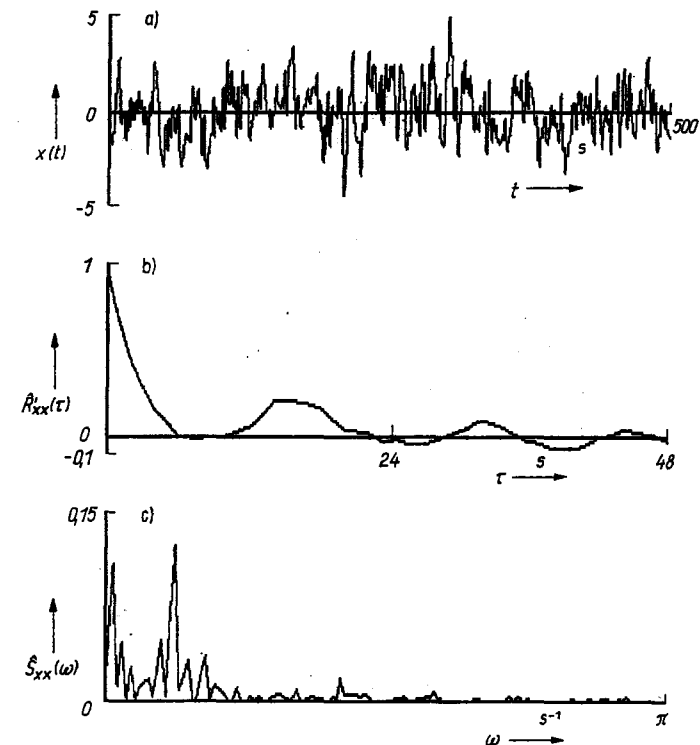
Beobachtungen: 500.

Gesucht:

Verläufe der Korrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums.

Ergebnis:

Siehe Bild zu Beispiel 3.6.



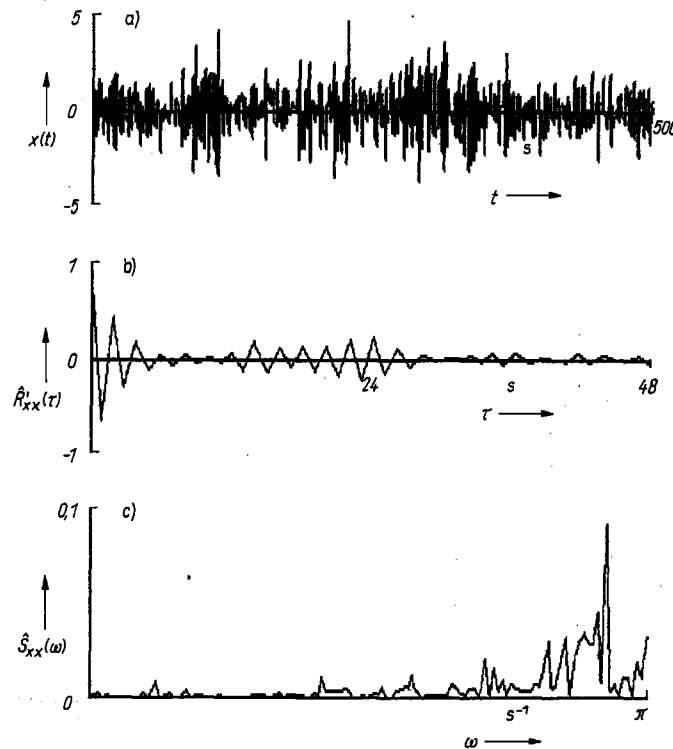
Die Verläufe der berechneten Korrelationsfunktion  $\hat{R}'_{xx}(mT)$  und des Leistungsdichtespektrums  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  zeigen das typische Verhalten für ein stochastisches Signal mit dominierenden tieffrequenten Signalkomponenten.

|                 |                                                                              |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Beispiel<br>3.7 | Kennfunktionen eines autoregressiven Prozesses 1. Ordnung ( $-1 < a_1 < 0$ ) |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------|

**Gegeben:** Signalgleichung  
 $x(k) + a_1 x(k-1) = \varepsilon(k)$ ,  
 $a_1 = -0,7$ ,  
 $\varepsilon(k)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),  
 Abtastzeit  $T = 1$  s,  
 Beobachtungen: 500.

**Gesucht:** Verläufe der Korrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums.

**Ergebnis:** Siehe Bild zu Beispiel 3.7.



Im Unterschied zu den im Beispiel 3.6 erhaltenen Ergebnissen ist deutlich zu erkennen, daß bei dem autoregressiven Prozeß 1. Ordnung mit negativem Parameter  $a_1$  die ermittelte Korrelationsfunktion  $\hat{R}_{xx}(mT)$  alternierend das Vorzeichen wechselt und das Leistungsspektrum  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  sehr gut die dominierenden hochfrequenten Signalkomponenten zeigt.

Parameter werden. Zur Lösung des Schätzproblems werden dann iterative Verfahren benutzt, auf die hier nur verwiesen werden soll [3.19]. Wesentlich effektiver ist die Ausnutzung des Dualitätsprinzips zwischen MA- und AR-Modell. Liegen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von Gl. (3.150), d. h.

$$1 + b_1 q^{-1} + \dots + b_l q^{-l} = 0, \quad (3.151)$$

außerhalb des Einheitskreises, ist das MA-Modell der Ordnung  $l$  in ein AR-Modell der Ordnung  $r$  umformbar. Es gilt dann

$$[B(q^{-1})]^{-1} x(k) = \varepsilon(k). \quad (3.152)$$

Damit erhält man als Approximation mit einer hinreichend großen Ordnung  $r$  die Beziehung

$$x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_r x(k-r) = \varepsilon(k),$$

deren Parameter nach den Schätzvorschriften von Gl. (3.136) und Gl. (3.138) ermittelt werden können. Selbst wenn das sich so ergebende Modell mehr Parameter als das MA-Modell besitzt, wird dieser Weg wegen der Eigenschaften der Schätzung und der Interpretierbarkeit häufig bevorzugt.

Die Autokorrelationsfunktion des Signals erhält man wieder durch Multiplikation von Gl. (3.150) mit den Signalwerten  $x(k-m)$  und Bilden der Erwartungswerte

$$R_{xx}(m) = E \{ (\varepsilon(k) + b_1 \varepsilon(k-1) + \dots + b_l \varepsilon(k-l)) \times (\varepsilon(k-m) + b_1 \varepsilon(k-m-1) + \dots + b_l \varepsilon(k-m-l)) \}$$

und somit für  $m = 0$

$$R_{xx}(0) = (1 + b_1^2 + \dots + b_l^2) \sigma_\varepsilon^2$$

und für  $m > 0$

$$R_{xx}(m) = \begin{cases} (b_m + b_{m+1}b_1 + \dots + b_{l-m}b_l) \sigma_\varepsilon^2 & \text{für } 0 < m \leq l \\ 0 & \text{für } m > l \end{cases} \quad (3.153)$$

Für das Leistungsdichtespektrum erhält man analog zu den Betrachtungen im Abschnitt 3.3.3.2 die Beziehung

$$S_{xx}(\omega) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l b_i b_j \cos(i-j)\omega T. \quad (3.154)$$

### 3.3.3.4. Modelle eines autoregressiven Prozesses der gleitenden Mittel (ARMA-Modell)

Das Modell des autoregressiven Prozesses der gleitenden Mittel der Ordnung  $(r, l)$  vereinigt in sich das AR- und das MA-Modell. Die Bedeutung dieses Modells liegt vor allem darin, daß stationäre Zeitreihen oft durch ein ARMA-Modell mit geringerer Ordnung beschrieben werden können, als dies bei AR- oder MA-Modellen der Fall ist. Entsprechend Gl. (3.129) gilt für diesen Modelltyp mit  $a_0 = b_0 = 1$  die Beschreibung

$$x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_r x(k-r) = \varepsilon(k) + b_1 \varepsilon(k-1) + \dots + b_l \varepsilon(k-l). \quad (3.155)$$

In symbolischer Schreibweise lautet Gl. (3.155)

$$A(q^{-1}) x(k) = B(q^{-1}) \varepsilon(k) \quad (3.156)$$

mit

$$A(q^{-1}) = [1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_r q^{-r}]$$

$$B(q^{-1}) = [1 + b_1 q^{-1} + \dots + b_l q^{-l}].$$

Die Schätzung der Parameter der Polynome  $A(q^{-1})$  und  $B(q^{-1})$  gestaltet sich schwierig, weil die Signalwerte  $\varepsilon(k-i)$  nicht meßbar sind. Hinzu kommt, daß die Fehlergleichung nicht linear in den Parametern ist [3.10, 3.14, 3.19].

Eine große Anzahl von Verfahren beruht auf einer iterativen mehrstufigen Lösung oder Linearisierung der Fehlergleichung der aus Gl. (3.156) abgeleiteten Beziehung

$$\varepsilon(k) = [B'(q^{-1})]^{-1} A(q^{-1}) x(k) \quad (3.157)$$

mit

$$B'(q^{-1}) = [b_1 q^{-1} + \dots + b_l q^{-l}].$$

Weitere Details dieser Lösungswege der Schätzaufgaben, die sehr umfangreich sind, findet man in [3.9, 3.20].

An dieser Stelle soll ein rekursiver Schätzalgorithmus vorgestellt werden, der bei geeigneter Wahl der Ordnungen ( $r, l$ ) konvergiert und gegenüber den genannten Methoden einfach und robust ist [3.21, 3.22].

Aus Gl. (3.155) ergibt sich durch Umstellung

$$\varepsilon(k) = x(k) - [b_1 \varepsilon(k-1) + \dots + b_l \varepsilon(k-l) - a_1 x(k-1) - \dots - a_r x(k-r)]. \quad (3.158)$$

In Vektorschreibweise erhält man aus Gl. (3.158)

$$\varepsilon(k) = x(k) - m^T(k) s \quad (3.159)$$

mit

$$s^T = [b_1 \dots b_l - a_1 \dots - a_r]$$

$$m^T(k) = [\varepsilon(k-1) \dots \varepsilon(k-l) : x(k-1) \dots x(k-r)].$$

Die Fehlergleichung für die Schätzung kann aus Gl. (3.159) durch Einsetzen der Modellgrößen erstellt werden:

$$\hat{\varepsilon}(k) = x(k) - \hat{m}^T(k) \hat{s} \quad (3.160)$$

mit

$$\hat{s}^T = [\hat{b}_1 \dots \hat{b}_l - \hat{a}_1 \dots - \hat{a}_r]$$

$$\hat{m}^T = [\hat{\varepsilon}(k-1) \dots \hat{\varepsilon}(k-l) : x(k-1) \dots x(k-r)].$$

In dieser Fehlergleichung sind neben den Parametern auch die Signalwerte  $\varepsilon(k-i)$  zu schätzen, da sie nicht unmittelbar gemessen werden können. Es wird deshalb ein Schätzverfahren gesucht, bei dem diese Signalwerte während der Schätzung mit anfallen und das sicher von gewählten Startwerten konvergiert. Aus der Gruppe der rekursiven Schätzverfahren, die diese Forderung erfüllen, hat sich auch in diesem Fall die rekursive Regression bewährt. Unter den für dieses Modell vereinbarten Bezeichnungen gilt entsprechend der Ableitung im Abschnitt 5.4.3 folgende Schätzvorschrift:

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + k(k+1) [x(k+1) - \hat{m}^T(k+1) \hat{s}(k)] \quad (3.161)$$

mit

$$\hat{k}(k+1) = \hat{P}(k) [m^T(k+1) \hat{P}(k) \hat{m}(k+1) + 1]^{-1}$$

$$\hat{P}(k) = [\hat{M}(k)^T \hat{M}(k)]^{-1} \text{ und rekursiv}$$

$$\hat{P}(k) = \hat{P}(k-1) - \hat{k}(k) \hat{m}^T(k) \hat{P}(k-1).$$

Die Schätzung kann u. a. dann abgebrochen werden, wenn für die Korrelationsfunktion  $R_{ii}(m)$  gilt

$$R_{ii}(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq 0 \\ \sigma_i^2 & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (3.162)$$

Das Problem der Wahl der Startwerte für die Parameter und die Signalwerte  $\varepsilon(k-i)$  kann verringert werden, wenn durch eine Vorschätzung eines AR-Modells Anhaltspunkte gewonnen werden können. Alle anderen Startwerte und das Konvergenzverhalten entsprechen dem in den Abschnitten 3.3.2.1 und 5.4.3 Gesagten.

Auf die Herleitung der Autokorrelationsfunktion eines ARMA-Prozesses soll im Rahmen dieses Buches verzichtet werden, weil sie sehr aufwendig ist und sehr selten benutzt wird (s. [3.9]). Dagegen kann auf der Basis der Ableitungen für das Leistungsdichtespektrum des AR- und MA-Modells für diesen Prozeß eine geschlossene Lösung in Form von Gl. (3.163) angegeben werden. Es gilt mit Gln. (3.148) und (3.154) für das Leistungsdichtespektrum eines ARMA-Prozesses

$$S_{xx}(\omega) = \sigma_i^2 \frac{\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l b_i b_j \cos(i-j) \omega T}{\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r a_i a_j \cos(i-j) \omega T} \quad (3.163)$$

### 3.3.3.5. Kombinierte Signalmodelle

In vielen praktischen Fällen haben sich Kombinationen deterministischer und stochastischer Signalmodelle bewährt, weil einerseits die Anzahl der Parameter des Modells wesentlich reduziert werden kann und andererseits ihre Schätzung nicht so viele Probleme mit sich bringt. Aus der Vielzahl der Kombinationsmöglichkeiten wird im Rahmen dieses Buches die wichtige Beschreibung der Signalfolge  $x(k)$  durch einen Polynom- oder periodischen Ansatz und eine autoregressive Komponente näher betrachtet. Mit den Beschreibungen der Gln. (3.116), (3.125) und (3.131) ergeben sich damit die kombinierte Polynom-AR-Beschreibung und kombinierte periodische/AR-Beschreibung.

#### Kombinierte Polynom-/AR-Beschreibung

$$x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_r x(k-r) = \bar{d}_0 + d_1(kT) + \dots + d_m(kT)^m + \varepsilon(k) \quad (3.164)$$

Für ein einfaches Modell sind im Beispiel 3.8 der Signalverlauf, die Korrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum dargestellt.

Zur Schätzung der Parameter  $a_i$  und  $d_i$  mittels Regression wird Gl. (3.164) zweckmäßigerweise wieder in eine Vektorform umgeschrieben:

$$\varepsilon(k) = x(k) - m^T(k) s \quad (3.165)$$

Beispiel  
3.8

## Kombiniertes Signalmodell: autoregressiver/Polynom-Ansatz

## Gegeben:

Signalgleichung

$$x(k) = \varepsilon(k) - a_1 x(k-1) + c_0 + c_1 kT + c_2 (kT)^2,$$

$$a_1 = -0,5, \quad c_0 = -2, \quad c_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1},$$

$$c_2 = 1 \cdot 10^{-5} (\text{s}^{-1})^2,$$

 $\varepsilon(k)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),Abtastzeit  $T = 1$  s,

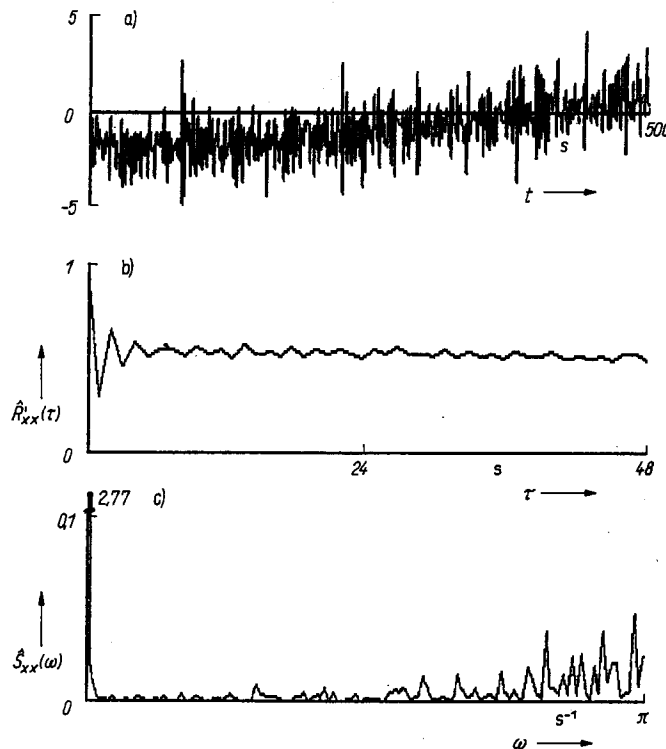
Beobachtungen: 500.

## Gesucht:

Verläufe der Korrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums.

## Ergebnis:

Siehe Bild zu Beispiel 3.8.



Die berechnete Korrelationsfunktion  $\hat{R}_{xx}(mT)$  und das Leistungsdichtespektrum  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  zeigen sehr gut den Anteil der deterministischen und stochastischen Signalkomponente.

mit

$$\mathbf{m}^T = [x(k-1) \dots x(k-r) : 1 (kT) \dots (kT)^m]$$

$$\mathbf{s}^T = [-a_1 \dots -a_r : d_0 d_1 \dots d_m].$$

Für  $n$  Beobachtungen ergibt sich aus Gl. (3.165) das Gleichungssystem

$$\hat{\varepsilon}(k) = x(k) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{s}}, \quad (3.166)$$

$$\hat{\varepsilon}^T(k) = [\hat{\varepsilon}(1), \hat{\varepsilon}(2) \dots \hat{\varepsilon}(n)]$$

$$\mathbf{x}^T(k) = [x(1), x(2) \dots x(n)]$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(-r+1) & 1(1T) & \dots & (1T)^m \\ x(1) & x(0) & \dots & x(-r+2) & 1(2T) & \dots & (2T)^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(n-1) & x(n-2) & \dots & x(n-r) & 1(nT) & \dots & (nT)^m \end{bmatrix}.$$

Wird das Signal  $\hat{\varepsilon}(k)$  als Modellfehler betrachtet und seine Beschreibung in Gl. (3.166) verwendet, kann der Parametervektor mit der Methode der Regression (s. Abschn. 5.2.2) nach der Vorschrift

$$\hat{\mathbf{s}} = [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{x} \quad (3.167)$$

ermittelt werden. Eine rekursive Schätzung mittels der rekursiven Regression ist ebenfalls möglich (s. Abschn. 5.2.2).

## Kombinierte periodische / AR-Beschreibung

$$\begin{aligned} x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_r x(k-r) \\ = c_0 + \sum_{i=1}^l (c_i \cos \omega_i kT + b_i \sin \omega_i kT) + \varepsilon(k). \end{aligned} \quad (3.168)$$

Im Beispiel 3.9 ist der Verlauf eines Signals, das aus einer autoregressiven Signalkomponente 1. Ordnung, einer periodischen Komponente und einem Gleichanteil besteht, dargestellt.

In Vektorform lautet Gl. (3.168)

$$\varepsilon(k) = x(k) - \mathbf{m}^T(k) \mathbf{s}, \quad (3.169)$$

$$\mathbf{m}^T(k) = [x(k-1) \dots x(k-r) : 1 : \cos \omega_1 kT \dots \cos \omega_l kT :$$

$$\sin \omega_1 kT \dots \sin \omega_l kT]$$

$$\mathbf{s}^T = [-a_1 \dots -a_r : c_0 : c_1 \dots c_l : b_1 \dots b_l].$$

Als Gleichungssystem erhält man für  $n$  Beobachtungen

$$\hat{\varepsilon}(k) = x(k) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{s}} \quad (3.170)$$

|                 |                                                                |
|-----------------|----------------------------------------------------------------|
| Beispiel<br>3.9 | Kombiniertes Signalmodell: autoregressiver/periodischer Ansatz |
|-----------------|----------------------------------------------------------------|

Gegeben: Signalgleichung

$$x(k) = \varepsilon(k) - a_1 x(k-1) + c_0 + c_1 \sin \frac{2\pi}{24} kT,$$

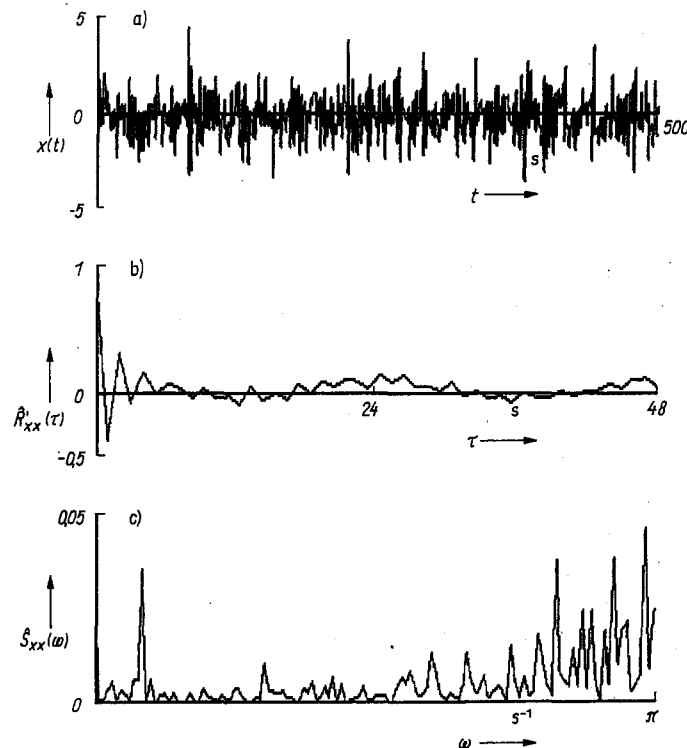
$$a_1 = -0,5, \quad c_0 = -0,2, \quad c_1 = 0,5,$$

 $\varepsilon(k)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),Abtastzeit  $T = 1$  s,

Beobachtungen: 500.

Gesucht: Verläufe der Korrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums.

Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 3.9.



Die einzelnen Signalkomponenten sind sowohl in der ermittelten Korrelationsfunktion  $\hat{R}'_{xx}(mT)$  als auch im Leistungsdichtespektrum  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  zu erkennen. Dabei ist wiederum zu sehen, daß periodische Signalanteile im Leistungsspektrum signifikanter hervortreten als in der Korrelationsfunktion.

mit

$$\hat{\varepsilon}^T(k) = [\hat{\varepsilon}(1) \hat{\varepsilon}(2) \dots \hat{\varepsilon}(n)]$$

$$x^T(k) = [x(1) x(2) \dots x(n)]$$

$$M = \begin{bmatrix} x(0) & \dots & x(-r+1) & | & 1 & \cos \omega_1 1T & \dots & \cos \omega_l 1T & | & \sin \omega_1 1T & \dots & \sin \omega_l 1T \\ x(1) & \dots & x(-r+2) & | & 1 & \cos \omega_1 2T & \dots & \cos \omega_l 2T & | & \sin \omega_1 2T & \dots & \sin \omega_l 2T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x(n-1) & \dots & x(n-r) & | & 1 & \cos \omega_1 nT & \dots & \cos \omega_l nT & | & \sin \omega_1 nT & \dots & \sin \omega_l nT \end{bmatrix}$$

Bei bekannten oder entsprechend der Strategie im Abschnitt 3.3.2.2 ermittelten dominierenden Frequenzen  $\omega_i$  kann eine Schätzung im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate, d. h. mittels Regression (s. Abschn. 5.2.2), nach der Beziehung

$$\hat{s} = [M^T M]^{-1} M^T x \quad (3.171)$$

erfolgen.

Für die hier vorgestellten kombinierten Signalmodelle sollte die Ordnung der deterministischen Teilmodelle klein gehalten werden ( $m \leq 2, l \leq 2$ ) und die Anzahl der Beobachtungen hinreichend groß sein. Die Parameter des deterministischen Teilmodells werden dann relativ unabhängig von der Korrelation und Streuung der Zufallskomponente ermittelt.

Gegenüber den deterministischen Signalmodellen von Abschnitt 3.3.2 besitzen diese kombinierten Modelle dann Vorteile, wenn die stochastische Signalkomponente korreliert ist. Im Vergleich zu den stochastischen Signalmodellen von Abschnitt 3.3.3 bilden sie ferner Signalverläufe mit ausgeprägten deterministischen Anteilen mit wesentlich weniger Parametern sehr gut nach.

### 3.4. Ausgewählte Methoden der Signalaufbereitung

#### 3.4.1. Notwendigkeit einer Signalaufbereitung

Die mittels Sensoren erfaßten Informationen in Form von zeitlichen Verläufen der Signale stellen bei fehlerfreier Erfassung, Übertragung und Speicherung die genaueste Basis für die weitere Ableitung von Signal- und/oder Systemmodellen dar. Es wird wiederum davon ausgegangen, daß die Information über die Signale in abgetasteter Form als  $x(kT)$  vorliegt; dabei wird in diesem Abschnitt vielfach die vereinfachte Schreibweise  $x$  verwendet. In den meisten Fällen muß jedoch davon ausgegangen werden, daß in den genannten Stufen (Erfassung, Übertragung und Speicherung) das ursprüngliche Signal verfälscht werden kann. Hinzu kommt, daß die vom Sensor erfaßten Prozeßgrößen/-zustände bereits gestört sein können. Die Verfälschung einer Prozeßgröße kann u. a. ihre Ursache haben im

- Prinzip des Sensors
- Einfluß von „Umweltfaktoren“ und anderen nichtmeßbaren Größen auf den Sensor, die Übertragung und die Speicherung.

Damit ergibt sich das im Bild 3.32 dargestellte allgemeine Schema. Die Eingangs- und Ausgangsgrößen  $u(t)$  und  $x(t)$  können durch die Störungen  $z_u$  und  $z_x$  bei der Messung,

der Übertragung und Abspeicherung verfälscht werden. Eine direkte weitere Verwendung der nach diesem Schritt vorliegenden Primärinformationen  $u'(t)$  und  $x'(t)$  würde eine Abbildung des Verhaltens vom Prozeß einschließlich Sensor-, Übertragungs- und Speicherungssystem, nicht aber des Prozesses allein ermöglichen. Aus diesem Grund ist eine Aufbereitung der Primärsignale bzw. der Primärdaten mittels verschiedener Methoden notwendig. Das Ziel dieser Methoden ist es, die Verfälschung der Prozeßgrößen zu erkennen und sie durch Transformationen, Korrekturen oder Filterung möglichst zu beseitigen. Zu diesen beiden Aufgabenkomplexen sollen in den folgenden Abschnitten ausgewählte Methoden abgeleitet werden, die auf die bereits bekannten Signalmodelle aufbauen und als Ausgangspunkt für weiterführende Betrachtungen angesehen werden können.

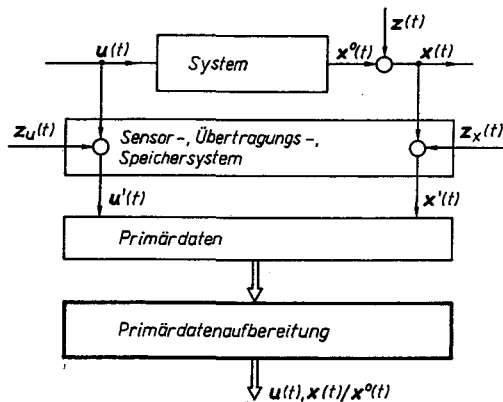


Bild 3.32  
Schema der Primärdatenerfassung  
und -verarbeitung

### 3.4.2. Methoden zum Erkennen von Verfälschungen der Prozeßsignale/-zustände

Grundlage für die Methoden zum Erkennen von Verfälschungen der Prozeßsignale/-zustände sind A-priori-Informationen über das „unverfälschte“ Verhalten. Diese Informationen beruhen auf

- theoretischen und/oder experimentellen Analysen des statischen und dynamischen Verhaltens
- Vergleichsmessungen
- Erfahrungen/Intuition der Prozeßspezialisten.

Für die Prüfung des statischen Verhaltens gemessener Signale (auch als Größen bezeichnet) sind deshalb u. a. folgende Aufgaben zu lösen:

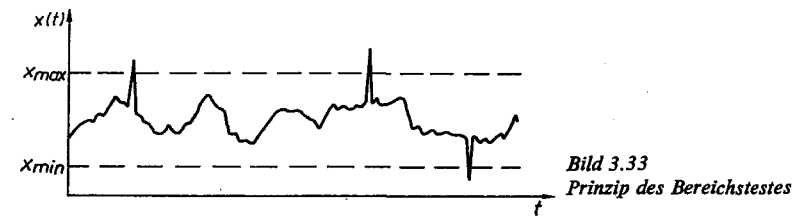
- Ermittlung der analytischen Beziehungen oder der Kennlinien, die bei Signalwandlungen (z. B. AD-Wandlung) auftreten
- Ermittlung von sinnvollen Wertebereichen für die Amplituden der Prozeßsignale
- Ermittlung von analytischen Beziehungen über den Einfluß von Umgebungsbedingungen (z. B. Temperatur) auf das betrachtete Prozeßsignal
- Aufstellen von Bilanzgleichungen (z. B. Masse).

Auf diesem Wissen können die folgenden, einfach zu realisierenden Prüfverfahren für die Prozeßsignale (als allgemeines Signal wird  $x$  verwendet) aufgebaut werden:

**Bereichstest.** Der Bereichstest erfolgt durch einen Vergleich des abgetasteten Signalwerts mit vorgegebenen Grenzwerten für das jeweilige Signal nach der einfachen Vorschrift

$$x_{\min} \leq x(k) \leq x_{\max}. \quad (3.172)$$

Die Bereichsgrenzen  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  (Bild 3.33) werden durch theoretische Kenntnisse als „technologisch sinnvolle“ Werte oder durch statistische Auswertungen und Annahmen eines normalverteilten Signals als das Vielfache der Streuung ( $\sigma$ -Bereiche, s. Abschn. 2.2.1) gewonnen.



**Differenztest.** Der Differenztest beruht auf der Prüfung der Differenz zweier aufeinanderfolgender abgetasteter Signalwerte (Bild 3.34) in der Form

$$|x(k) - x(k-1)| \leq \Delta x_{\max}. \quad (3.173)$$

Dieser Test ist in vielen Fällen wirksamer als der Bereichstest, wobei die Festlegung der maximalen Änderung je Tastschritt u. U. Schwierigkeiten bereitet.

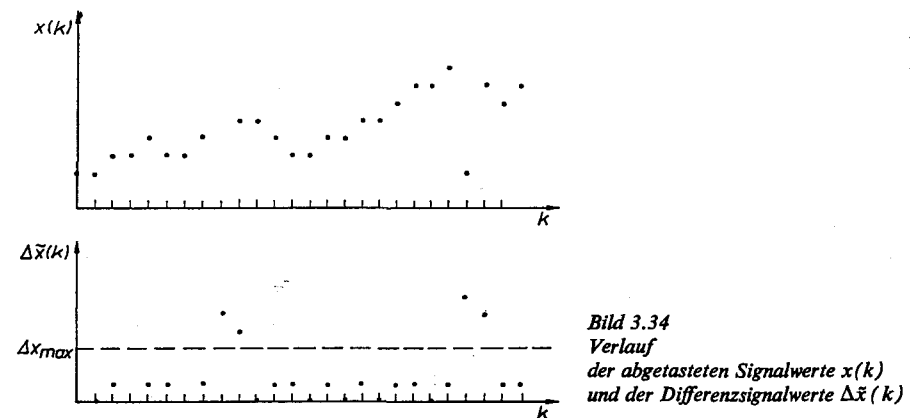


Bild 3.34  
Verlauf  
der abgetasteten Signalwerte  $x(k)$   
und der Differenzsignalwerte  $\Delta x(k)$

**Bilanztest.** Der Bilanztest beruht auf der Beurteilung mindestens zweier erfaßter Prozeßsignale. Durch Bildung der Bilanzgleichungen (z. B. Masse-, Energie-, Durchflußbilanzen) wird geprüft, ob die Signale bis auf einen vorher festgelegten Fehlerbereich  $\Delta x$  von Null abweichen. Als Prüfgleichung verwendet man die allgemeine Bilanzgleichung

$$\left| \sum_{i=1}^n x_{i, zu}(k) - \sum_{j=1}^m x_{j, ab}(k) - \sum_{l=1}^r x_{l, gesp}(k) \right| \leq \Delta x; \quad (3.174)$$

$x_{i, zu}(k)$   $i$ -te zugeführte Größe  
 $x_{l, gesp}(k)$  Änderung der  $l$ -ten gespeicherten Größe  
 $x_{j, ab}(k)$   $j$ -te abgeführte Größe.

Wird die Grenze  $\Delta x$  in Gl. (3.174) überschritten, sind Überprüfungen der Meß-, Übertragungs- und Speichersysteme und eine Korrektur der Meßwerte erforderlich. Diese Strategie ist auf vergleichbare Signale beschränkt.

Für die Prüfung des richtigen dynamischen Verhaltens der gemessenen Signale sind u. a. folgende Aufgaben als Voraussetzung zu lösen:

- Ermittlung des normalen und aktuellen dynamischen Verhaltens des Sensors
- Ermittlung der Frequenzlage des Nutz- und des Störsignals.

Die Prüfung des dynamischen Verhaltens erfolgt vorwiegend in Form von Vergleichen des normalen Verhaltens (Standardverhalten) mit dem aktuellen Verhalten. Häufig werden zu diesem Zweck Vergleichsmessungen mit aufgeprägten Signalen vorgenommen. Als eine der wichtigsten Prüfmethode des dynamischen Verhaltens soll der Test auf tief-frequente Zeitkomponenten, auch als Trend bezeichnet, vorgestellt werden. Prozeßsignale, die diese Eigenschaft besitzen, werden als instationär bezeichnet, da ihre Verteilung/ihre Momente eine Funktion der Zeit sind. Die Methoden zur Prüfung auf Stationarität beruhen vor allem darauf, daß das beobachtete Signal in einzelne Abschnitte (Serien) unterteilt wird und die Momente der Serien oder daraus abgeleitete Größen durch statistische Testverfahren (s. Abschn. 2.3.3) miteinander verglichen werden (Bild 3.35).

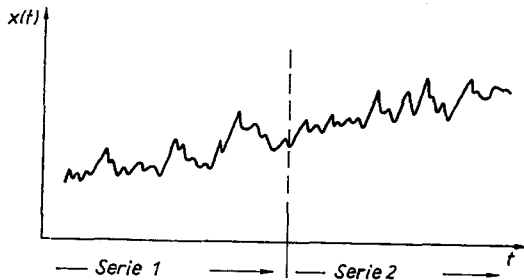


Bild 3.35  
Einteilung der Meßgröße  
in zwei Serien für den Test  
auf Gleichheit der Erwartungswerte

Als Prüfverfahren eignen sich u. a. folgende:

*Test auf Gleichheit der Erwartungswerte zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten (t-Test)*

Bei diesem Test soll geprüft werden, ob der Erwartungswert der Serie 1 ( $E\{X_1\} = \mu_{x1}$ ) gleich dem Erwartungswert der Serie 2 ( $E\{X_2\} = \mu_{x2}$ ) ist (Bild 3.35). Dabei wird vorausgesetzt, daß die beiden Serien die gleichen Streuungen besitzen, d. h.,  $\sigma^2 = \sigma_{x1}^2 = \sigma_{x2}^2$  gilt. Ausgehend von der Hypothese  $H_0: \mu_{x1} = \mu_{x2}$  wird für die konkrete Stichprobe der Meßgröße mit den Beobachtungen  $n_1$  für die Serie 1 und  $n_2$  für die Serie 2 die Hypothese verworfen, wenn

$$\left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{x1}^2 + (n_2 - 1)s_{x2}^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \right| \geq t_{\alpha/2, f};$$

$$f = n_1 + n_2 - 2 \quad (3.175)$$

ist [2.3, 2.4]. Damit wird eine Trendermittlung möglich und eine Trendkorrektur erforderlich.

*Vergleich der mittleren Streuung einer Serie mit der Streuung der Mittelwerte aller Serien (F-Test)*

Die Daten der beobachteten Meßgröße werden entsprechend Bild 3.36 in  $m$  Serien mit jeweils  $n$  Daten eingeteilt. Aus diesen Serien werden ermittelt:

- die Serienstreuungen  $s_j^2$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$

$$s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2,$$

- die mittlere Streuung einer Serie

$$s_x^2 = \sum_{j=1}^m s_j^2 / m,$$

- die Streuung der Mittelwerte

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j - \bar{x})^2.$$

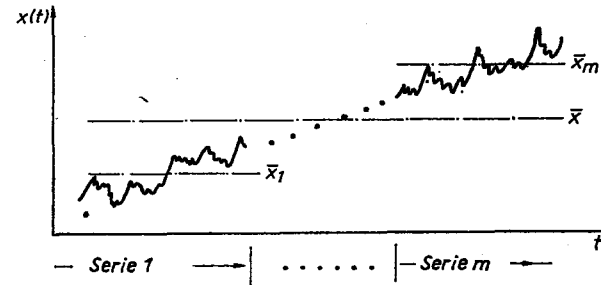


Bild 3.36  
Einteilung der Meßgröße  
in  $m$  Serien für den F-Test

Als Test wird der F-Test (s. Abschn. 2.3.3) in der Form

$$F = \frac{s_{\bar{x}}^2}{s_x^2} \quad (3.176)$$

mit den Freiheitsgraden  $f_{s_{\bar{x}}^2} = m - 1$  und  $f_{s_x^2} = m(n - 1)$  verwendet. Das Prozeßsignal  $x$  wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  als stationär angesehen, wenn

$$F < F_{\alpha, f_{s_{\bar{x}}^2}, f_{s_x^2}} \quad (3.177)$$

ist. Für den Test ist es zweckmäßig, die Anzahl der Serien  $m \geq 4$  und die Anzahl der Beobachtungen in einer Serie  $n \geq 10$  zu wählen.

Damit steht eine Reihe von Methoden und Strategien zur Verfügung, um eine Abweichung der Prozeßsignale von ihrem normalen Verhalten zu erkennen. In den folgenden Abschnitten soll auf Methoden näher eingegangen werden, die den Einfluß von erkannten Verfälschungen im statischen oder dynamischen Verhalten der gemessenen Signale reduzieren.

### 3.4.3. Methoden zur Korrektur gemessener Signale

Nachdem eine Verfälschung der Signale bei der Messung, der Übertragung oder der Speicherung erkannt worden ist, muß diese durch Korrekturmaßnahmen möglichst gut beseitigt werden. Einige weitverbreitete Strategien werden im folgenden angeführt.

## 3.4.3.1. Eliminierung von Signalwerten

Werden die im Bereichs-, Differenz- oder Bilanztest im Abschnitt 3.4.2 angegebenen Schranken durch die erfaßten Signale verletzt, sind sie als „Ausreißer“ zu eliminieren bzw. ist der letzte als zuverlässig anerkannte Datensatz für diesen Zeitpunkt weiter zu verwenden.

## 3.4.3.2. Statische Korrektur von Signalen

Die durch das Meßsystem wiedergegebenen Prozeßsignale werden häufig durch dessen statisches Übertragungsverhalten verformt, oder es gehen die Umgebungsbedingungen (Sekundärgrößen) in den erfaßten Wert ein. Der erste Umstand kann bei Kenntnis des statischen Übertragungsverhaltens des Meßsystems in Form von Kennlinien oder analytischen Ausdrücken korrigiert werden. Damit ergibt sich z. B. der korrigierte Meßwert nach der Vorschrift

$$\tilde{x}(k) = a_0 + a_1 x(k) + a_2 x^2(k) + \dots$$

Liegt eine Beeinflussung der erfaßten Prozeßgröße durch Sekundärgrößen vor (z. B. Temperatur), erfolgt eine Korrektur der Daten in der Regel auf der Grundlage von analytischen Ausdrücken der Form

$$\tilde{x}(k) = a_0 + a_1 x(k);$$

$a_1 = f(\text{Sekundärmeßgrößen}).$

## 3.4.3.3. Dynamische Korrektur von Signalen

Unter einer dynamischen Korrektur von Signalwerten soll hier die Korrektur des dynamischen Verhaltens des Meßsystems mit dem Ziel verstanden werden, daß der Endwert der Messung möglichst schnell und genau erreicht wird. Da die Sensorsysteme überwiegend Trägheitsverhalten aufweisen, ist zur Korrektur ein inverses Verhalten, d. h. ein dominierender Vorhalt, notwendig. Dies bereitet technisch einige Probleme. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Endwertvorhersage aus beobachteten Anfangsverläufen und bekanntem Sensormodell.

Die Aufgaben der statischen und der dynamischen Korrektur werden in leistungstarken Meßsystemen durch in die Geräte integrierte Rechnersysteme gelöst. Der Entwurf von Korrekturmaßnahmen kann auch auf der Basis der im Abschnitt 3.4.4 vorgestellten Filter oder durch die Anwendung von Korrekturnetzwerken [3.1] erfolgen.

## 3.4.4. Filterung von Signalen

Bei der Aufbereitung von Signalen nimmt die Aufgabe der Trennung von Nutz- und Störsignalen durch Filter eine zentrale Stellung ein. Als Filter werden analoge oder digitale Systeme angesehen, die den spektralen Inhalt eines Signals in einem vorgegebenen Frequenzbereich übertragen. Im Rahmen dieses Buches soll auf einige Grundlagen der Trennung von Nutz- und Störsignalen mit digitalen Mitteln näher eingegangen werden, weil sie der Ausgangspunkt für das Studium weiterer leistungsfähiger Verfahren der Filtertheorie sind [3.2, 3.5, 3.23, 3.24].

## 3.4.4.1. Grundstrategie des Filterentwurfs

Die Strategie des Entwurfs von Filtern für die Trennung von Nutz- und Störsignal geht von der im Bild 3.37 dargestellten Struktur aus. Das Nutzsignal  $x^0(t)$  wird durch das Störsignal  $z(t)$  verfälscht. Als gemessenes Signal steht  $x(t)$  zur Verfügung. Es besteht nun die Aufgabe, ein Filter bzw. eine Vorschrift zum Trennen von Nutz- und Störsignal so zu entwerfen, daß das gefilterte Signal  $\tilde{x}(t)$  möglichst dem unverfälschten Signal  $x^0(t)$  entspricht. Der Entwurf von optimalen Filtern wurde von Wiener im Sinne des minimalen mittleren quadratischen Fehlers gelöst [3.6, 3.27]. Er soll hier nicht weiter betrachtet werden. Ausgangspunkt für die hier vorgestellte Strategie ist der Filterentwurf auf der Grundlage einer aus der Spektralanalyse oder aus theoretischen Überlegungen vorliegenden A-priori-Information über die Lage der Nutz- und Störsignalspektren.

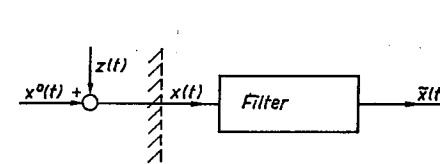


Bild 3.37. Grundstruktur der Filteraufgabe

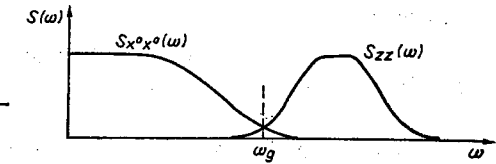


Bild 3.38. Frequenzlage des Stör- und Nutzsignals

Für die Trennung beider Signalanteile muß immer gelten, daß sich ihre Spektren in der Frequenzlage signifikant unterscheiden (s. z. B. Bild 3.38). Aufgrund der vorliegenden A-priori-Informationen können dann die in Tafel 3.6 vorgestellten vier Filtertypen mit

Tafel 3.6. Zusammenhang zwischen der Lage des Nutz- und Störsignalspektrums und der Filterart

| Lage des Leistungsspektrums                  | Filterart     |
|----------------------------------------------|---------------|
| $x^0(t)$ tieffrequent<br>$z(t)$ hochfrequent | Tiefpaß<br>   |
| $x^0(t)$ hochfrequent<br>$z(t)$ tieffrequent | Hochpaß<br>   |
| $x^0(t)$ in einem engen Frequenzbereich      | Bandpaß<br>   |
| $z(t)$ in einem engen Frequenzbereich        | Bandsperr<br> |

ihren idealen Amplitudenfrequenzgängen unterschieden werden. Im Rahmen dieses Buches wird auf die in der Praxis oft verwendeten digitalen Tief- und Hochpaßfilter eingegangen.

### 3.4.4.2. Digitale Tiefpaßfilter

Bei der Betrachtung der Signalübertragungseigenschaften linearer digitaler Tiefpaßfilter soll von zwei grundsätzlichen Realisierungsstrukturen aus auf den Entwurf von Filtern und auf die Besonderheiten des Übertragungsverhaltens digitaler gegenüber analogen Filtern eingegangen werden.

Als grundlegende Realisierungsstrukturen für lineare digitale Filter existieren nicht-rekursive und rekursive Varianten.

#### Nichtrekursive Filter

Bei diesem Filtertyp wird der gefilterte Signalwert  $\tilde{x}(k)$  aus den ungefilterten Signalwerten  $x(k-i)$  nach der Vorschrift

$$\tilde{x}(k) = \sum_{i=-n}^{+n} b_i x(k-i) \quad \text{mit } b_i \geq 0, \quad n \text{ endlich} \quad (3.178)$$

direkt gewonnen. Die Filterstruktur ist schematisch im Bild 3.39 dargestellt.



Bild 3.39. Struktur der nichtrekursiven Filter

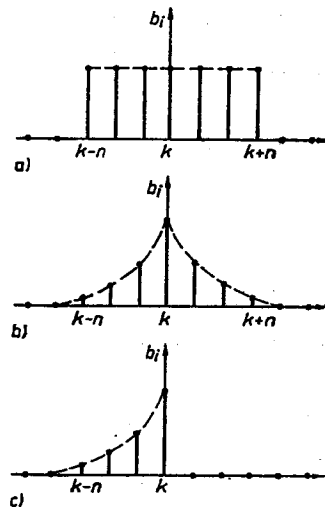


Bild 3.40

Varianten zur Wahl  
der Wichtungparameter

- a) gleitende Mittelwertbildung
- b) gewichtete gleitende Mittelwertbildung  $b_{-i} = b_{+i}$
- c) gewichtete gleitende Mittelwertbildung  $b_{+i} = 0$

Die Wichtungparameter können nach den folgenden Gesichtspunkten gestaltet werden (Bild 3.40):

- $b_i = 1/2n + 1$  für alle  $i$ , d.h. gleitende Mittelwertbildung über das Datenfenster  $2n + 1$ ,
- $b_i = b_{-i}$  für alle  $i$ , d.h. gewichtete gleitende Mittelwertbildung ohne Phasenverschiebung,
- $b_i = 0$  für  $i > 0$ , d.h. gewichtete gleitende Mittelwertbildung mit Phasenverschiebung.

Häufig wird diese Signalverarbeitung auch als „Glättung“ oder „Mittelwertbildung“ bezeichnet. Die Auswirkung der Gestaltung der Wichtungparameter auf die Güte der Filterung wird in den Beispielen 3.10, 3.11 und 3.12 untersucht.

Für die Darstellung des Übertragungsverhaltens des digitalen nichtrekursiven Filters wird die Antwort auf das mit der Tasterperiode  $T$  abgetastete harmonische Eingangssignal der Amplitude 1 betrachtet. Somit gilt für das Eingangssignal des Filters

$$X^*(j\omega) = e^{j\omega k T} \quad (3.179)$$

und für das Ausgangssignal des Filters

$$X^*(j\omega) = G_F(e^{j\omega T}) e^{j\omega k T}; \quad (3.180)$$

$G_F(e^{j\omega T})$  Filterübertragungsfunktion.

Wird die transformierte Gl. (3.178) in Gl. (3.180) eingesetzt, erhält man die allgemeine Filterübertragungsfunktion zu

$$G_F(e^{j\omega T}) = \sum_{i=-n}^{+n} b_i e^{-j i \omega T}. \quad (3.181)$$

Sind für alle  $i$  die Koeffizienten  $b_i = b_{-i}$ , vereinfacht sich Gl. (3.181) zu der Vorschrift

$$G_F(e^{j\omega T}) = b_0 + 2 \sum_{i=1}^n b_i \cos i \omega T. \quad (3.182)$$

Gl. (3.182) zeigt deutlich, daß der Amplituden- und Phasenfrequenzgang des Filters periodisch mit der Periode  $\omega T = 2\pi$  sein wird. Eines der wichtigsten Probleme ist die Ermittlung der Koeffizienten  $b_i$  in Abhängigkeit von der Breite  $n$  des Datenfensters und der gewählten Grenzfrequenz  $\omega_g$ , d.h. des Durchlaßbereichs des Filters.

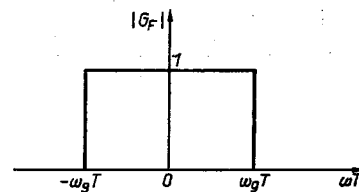


Bild 3.41  
Amplitudenfrequenzgang  
des idealen Tiefpaßfilters

Angestrebt wird ein idealer Amplitudenfrequenzgang des Filters nach Bild 3.41. Zwischen dem komplexen Frequenzgang  $G(e^{j\omega T})$  und den Koeffizienten  $b_i$  besteht in Analogie zur Fourier-Reihe (s. Abschn. 3.1.1) der Zusammenhang

$$b_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega T}) e^{j i \omega T} d\omega \quad (3.183)$$

für beliebige Gewichte  $b_i$  und

$$b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G(e^{j\omega T}) \cos i \omega T d\omega \quad (3.184)$$

für den Fall, daß für alle  $i$  die Beziehung  $b_{-i} = b_i$  gilt. Wird in Gl. (3.184) der ideale Frequenzgang entsprechend Bild 3.41 eingesetzt, erhält man

$$b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g T} 1 \cdot \cos i \omega T d\omega. \quad (3.185)$$

Als Berechnungsvorschrift für die Gewichte  $b_i$  findet man damit

$$b_i = \frac{\omega_s T}{i \omega_s T} \sin i \omega_s T \quad \text{für } i > 0. \quad (3.186)$$

Als endgültige Filtergleichung ergibt sich dann aus Gl. (3.178) durch Einsetzen von Gl. (3.186) der gefilterte Wert im  $k$ -ten Zeitpunkt zu

$$\tilde{x}(k) = \frac{\omega_s T}{\pi} \sum_{i=-n}^{+n} \frac{\sin i \omega_s T}{i \omega_s T} x(k-i). \quad (3.187)$$

Die Güte der Anpassung des realisierten Amplitudenfrequenzgangs an den idealen Verlauf im Bild 3.41 hängt ab von dem Produkt  $\omega_s T$  und der Länge des Datenfensters  $n$ . Je größer  $n$  ist, um so besser ist die Anpassung. Der Parameter  $b_0$  ergibt sich aus Gl. (3.186) durch Grenzwertbildung zu

$$b_0 = \frac{\omega_s T}{\pi}.$$

Ein lineares Filter mit der Verstärkung von 1 erhält man durch eine Normierung des Parameters  $b_0$  in der Form

$$b'_0 = 1 - \sum_{i=-n}^{+n} b_i \quad \text{mit } i \neq 0.$$

An zwei einfachen Beispielen soll das Verhalten nichtrekursiver Filter demonstriert werden. Eine Normierung der Filterparameter auf eine Gesamtfilterverstärkung von 1 erfolgt nicht bei den weiteren Betrachtungen. Wenn für alle  $i$  die Wichtungparameter  $b_i = b_{-i}$  sind, ist die Filterübertragungsfunktion eine reelle Größe, und die Phasenverschiebung des gefilterten Signals  $\tilde{x}(k)$  gegenüber dem ungefilterten Signal  $x(k)$  ist 0.

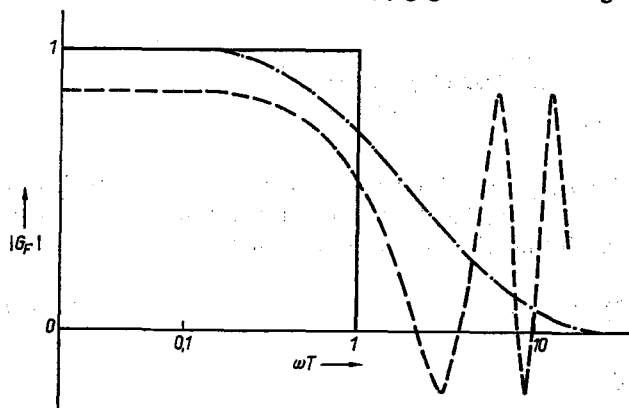


Bild 3.42  
Amplitudenfrequenzgänge  
eines nichtrekursiven  
Tiefpaßfilters für  $b_i = b_{-i}$   
— ideales Filter  
- - - analoges Filter ( $T_1 = 1$ )  
- · - digitales Filter  
( $b_0 = 0,318$ ;  
 $b_1 = b_{-1} = 0,267$ )

Für  $n = 1$  ergibt sich aus Gl. (3.182) der Amplitudenfrequenzgang zu

$$|G(e^{j\omega T})| = b_0 + 2b_1 \cos \omega T. \quad (3.188)$$

Er ist im Bild 3.42 gemeinsam mit dem idealen Amplitudenfrequenzgang und dem eines analogen Filters 1. Ordnung für die Parameter  $\omega_s T = 1$  dargestellt. Die Darstellung zeigt das für Digitalfilter typische periodische Verhalten für den Amplitudenfrequenzgang. Für Werte von  $\omega T < \pi$  werden die Leistungsanteile zufriedenstellend gedämpft. Das

Beispiel  
3.10

Einfluß der Wichtungsarten bei nichtrekursiven Tiefpaßfiltern

Gegeben:

Signalbeschreibung

$$x(t) = a_0 + a_1 \sin \frac{2\pi}{100} t + x(t),$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0,5,$$

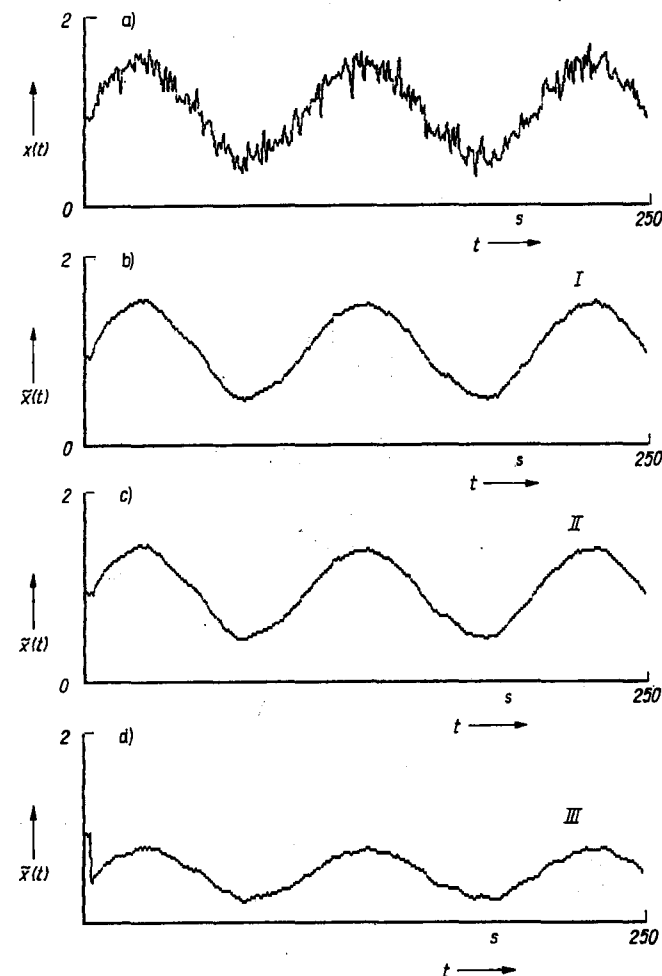
$x(t)$  weißes Rauschen, 0,1 {NV (0,1)},

Filtergleichung (3.178),  $n = 5$ ,

$$\omega_s = 0,314 \text{ s}^{-1},$$

Abtastzeit  $T = 1 \text{ s}$ ,

Beobachtungen: 250.



|               |                                                               |
|---------------|---------------------------------------------------------------|
| Beispiel 3.10 | Einfluß der Wichtungsarten bei nichtrekursiven Tiefpaßfiltern |
|---------------|---------------------------------------------------------------|

**Gesucht:** Verläufe des gefilterten Signals  $\tilde{x}(k)$  für

- I. alle  $b_i = 1/2^n + 1 = 0,0909$ ,
- II. alle  $b_{-i} = b_{+i}$  nach Gl. (3.186)  
 $b_0 = 0,1, \quad b_1 = 0,098, \quad b_2 = 0,094,$   
 $b_3 = 0,086, \quad b_4 = 0,076, \quad b_5 = 0,064,$
- III. alle  $b_i = 0$  für  $i > 0$  (alle  $b_i$  für  $i < 0$  s. II).

**Ergebnis:** Siehe Bild zu Beispiel 3.10.

Die dargestellten gefilterten Signalverläufe zeigen, daß

1. die Filterwirkung der Varianten I und II sehr gut die hochfrequente Störkomponente ohne eine Phasenverschiebung des gefilterten gegenüber dem ungefilterten Signal beseitigen,
2. die für die Echtzeitverarbeitung geeignete Variante III ebenfalls die hochfrequente Störung beseitigt, aber neben dem Verstärkungsverlust eine wesentliche Phasennäheilung des gefilterten gegenüber dem ungefilterten Signal hervorruft.

bedeutet, daß die Tasterperiode  $T$  bei vorgegebener Grenzfrequenz  $\omega_g$  entsprechend dem Abtasttheorem von Shannon nach der Vorschrift

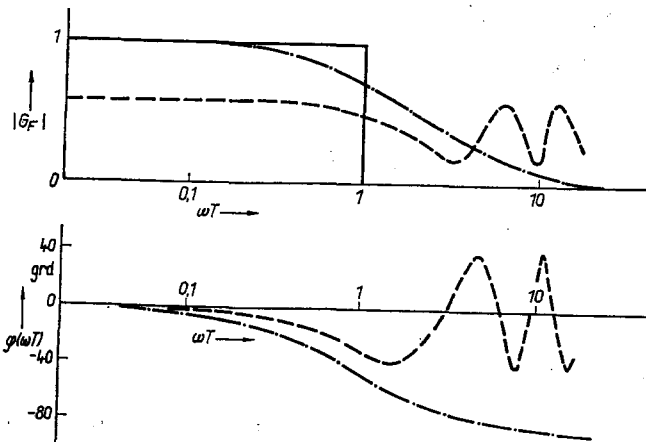
$$T \leq \pi/\omega_g$$

zu wählen ist.

Sind alle  $b_{+i} = 0; i = 1, 2, \dots, n$ , entspricht die nichtrekursive Filtergleichung (3.178) der Faltungssumme (s. Abschn. 6.2). Für den Amplituden- und Phasenfrequenzgang ergeben sich für  $n = 1$

$$|G(e^{j\omega T})| = \sqrt{(b_0 + b_1 \cos \omega T)^2 + (b_1 \sin \omega T)^2}$$

$$\varphi(\omega T) = -\arctan \frac{b_1 \sin \omega T}{b_0 + b_1 \cos \omega T} \quad (3.189)$$



**Bild 3.43**  
Amplituden- und Phasenfrequenzgang eines nichtrekursiven Tiefpaßfilters für  $b_{+i} = 0$   
 — ideales Filter ( $\omega_g T = 1$ )  
 - - - analoges Filter ( $T_1 = 1$ )  
 - · - digitales Filter ( $b_0 = 0,318; b_1 = 0,267$ )

|               |                                                                                                                |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Beispiel 3.11 | Einfluß der Normierung der Verstärkung auf die Wirkung nichtrekursiver Tiefpaßfilter ( $b_i = 0$ für $i > 0$ ) |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Gegeben:** Signalbeschreibung

$$x(t) = x_1(t) + z(t),$$

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 100 \text{ s} \\ 10\sigma(t) & \text{für } t \geq 100 \text{ s}, \end{cases}$$

$z(t)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),

Filtergleichung (3.178),  $n = 7, \omega_g = 0,628 \text{ s}^{-1}$ ,  
Abtastzeit  $T = 1 \text{ s}$ ,

Beobachtungsbereich: 76 bis 125 s.

**Gesucht:** Verläufe des gefilterten Signals  $\tilde{x}(k)$  für

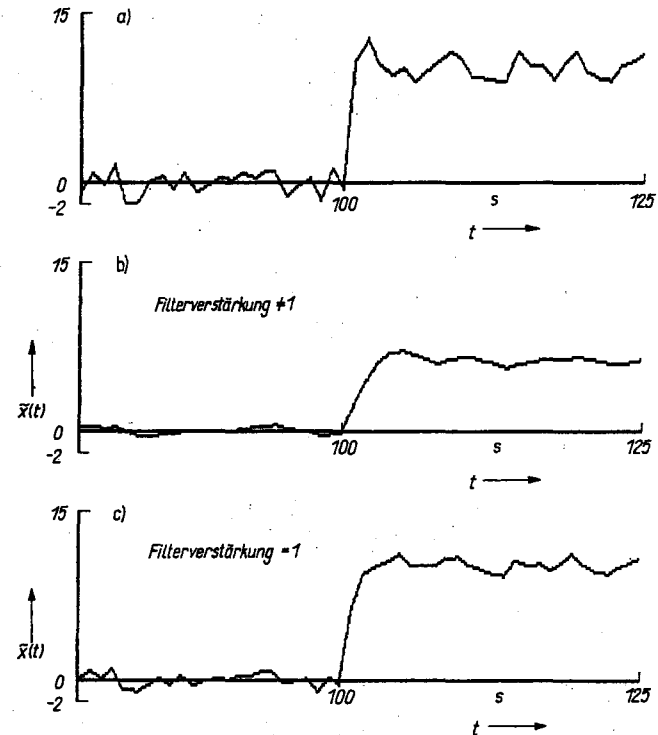
a) Wichtung (unnormierte Verstärkung)

$$b_0 = 0,2, \quad b_{-1} = 0,187, \quad b_{-2} = 0,151, \\ b_{-3} = 0,100, \quad b_{-4} = 0,047, \quad b_{-5} = 9 \cdot 10^{-9}, \\ b_{-6} = -0,031, \quad b_{-7} = 0,043,$$

b) Wichtung (normierte Verstärkung)

$$b_0 = 0,503, \text{ alle } b_{-i} \text{ wie bei a).}$$

**Ergebnis:** Siehe Bild zu Beispiel 3.11.



Die Verläufe der gefilterten Signale  $\tilde{x}(k)$  zeigen sehr gut das dynamische und statische Verhalten des nichtrekursiven Filters. Gegenüber dem nicht auf eine Verstärkung von 1 normierten Filter erreicht das normierte Filter bei gleichem dynamischem Verhalten den stationären Wert des ungefilterten Signals  $x(t)$ .

|               |                                                         |
|---------------|---------------------------------------------------------|
| Beispiel 3.12 | Wirkung des Filters „15-Punkte-Gleitmittel von Spencer“ |
|---------------|---------------------------------------------------------|

Gegeben: Signalbeschreibung

$$x(t) = a_1 \sin \frac{2\pi}{250} t + z(t),$$

 $a_1 = 4$ ,  $z(t)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),
Filtergleichung (3.178),  $n = 7$ ,Abtastzeit  $T = 1$  s,

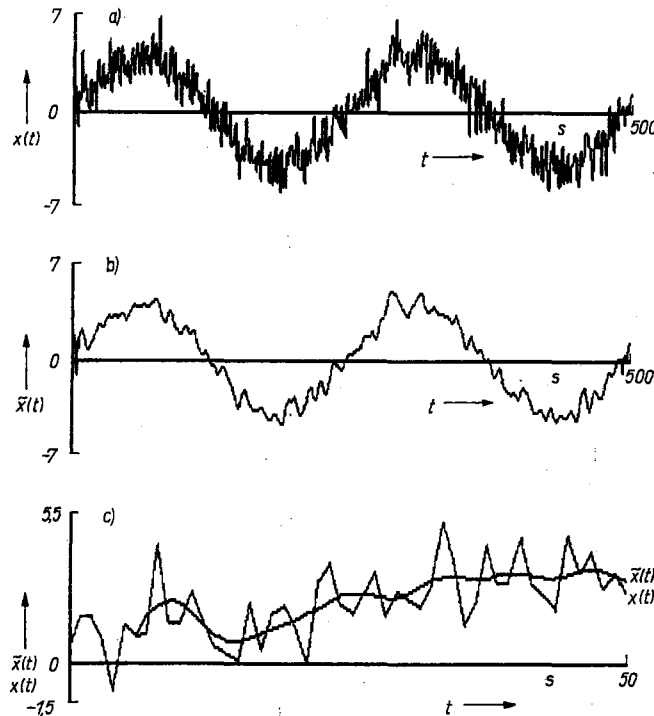
Beobachtungen: 500.

Gesucht: Verläufe des gefilterten Signals  $\tilde{x}(k)$ 

a) über alle Beobachtungen,

b) als Vergleich des ungefilterten und gefilterten Signals für 50 Beobachtungen.

Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 3.12.



Die Verläufe der gefilterten Signale entsprechen prinzipiell denen vom Beispiel 3.10. Das Filter beseitigt hochfrequente Signalkomponenten, aber wesentlich besser als die einfachen nichtrekursiven Filter. In b) ist der Anfang der Signalverläufe dargestellt. Das Bild zeigt erneut, daß eine Filterung erst möglich ist, wenn  $(2n + 1)$  Signalwerte (d.h. in diesem Fall 15) vorliegen. Zwischen dem gefilterten und dem ungefilterten Signalwert besteht auch hier keine Phasenverschiebung.

Der Amplituden- und der Phasenfrequenzgang für dieses nichtrekursive Filter sowie für das ideale und analoge Filter 1. Ordnung sind für einen typischen Fall im Bild 3.43 dargestellt. Es zeigt deutlich den periodischen Verlauf der Frequenzgänge auch dieses digitalen Filtertyps gegenüber dem analogen Filter. Gleichzeitig wird die Phasennacheilung des gefilterten Signals im Frequenzbereich  $\omega T < \pi$  gegenüber der phasenfreien Filterung bei symmetrischer Wichtung sehr gut sichtbar.

Das bedeutet, daß Filter mit  $b_{+i} = 0$  für alle  $i$  zwar zur Echtzeitdatenverarbeitung gut geeignet sind, aber immer eine Phasennacheilung aufweisen. Wird ein Filter für  $b_{-i} = b_i$  für alle  $i$  verwendet, ist keine Phasenverschiebung des gefilterten Signals vorhanden. Probleme treten dagegen in diesem Fall bei der Filterung der ersten und letzten  $n$  Signalewerte der betrachteten Probe sowie im Echtzeiteinsatz auf.

Den Einfluß verschiedener Wichtungsformen auf die Filterwirkung zeigt für einen Testfall Beispiel 3.10. Im Beispiel 3.11 wird der Einfluß der Normierung der Filterverstärkung auf 1 anhand eines Signalabschnitts untersucht.

Da die Filterwirkung häufig nicht ausreicht, wird die nichtrekursive Filterung in zwei oder mehr Stufen wiederholt. In [3.19] sind verschiedene Vorschläge für diese Strategie enthalten. Ein weitverbreitetes Filter ist das sog. „15-Punkte-Gleitmittel von Spencer“, das aus einer Reihenschaltung von vier linearen Filtern entwickelt wurde.

Die Gewichte für das Filter entsprechend Gl. (3.178) sind mit  $b_i = b_{-i}$

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,2312 & b_{-4} &= b_{+4} = 0,0094 \\ b_{-1} &= b_{+1} = 0,2094 & b_{-5} &= b_{+5} = -0,0156 \\ b_{-2} &= b_{+2} = 0,1437 & b_{-6} &= b_{+6} = -0,00187 \\ b_{-3} &= b_{+3} = 0,0656 & b_{-7} &= b_{+7} = -0,0094. \end{aligned}$$

Im Beispiel 3.12 ist die Wirkung dieses nichtrekursiven Tiefpaßfilters dargestellt.

### Rekursive Filter

Der gefilterte Signalwert  $\tilde{x}(k)$  wird bei diesem Filter rekursiv aus den vorangegangenen gewichteten gefilterten Signalwerten  $x(k - j)$  und den gewichteten ungefilterten Signalwerten  $x(k - i)$  nach der allgemeinen Vorschrift

$$\tilde{x}(k) = \sum_{i=0}^n b_i x(k - i) + \sum_{j=1}^m a_j \tilde{x}(k - j) \quad (3.190)$$

berechnet. Das Strukturschema dieses Filters ist im Bild 3.44 dargestellt. Die rekursiven Filter beinhalten als Sonderfall das nichtrekursive Filter von Gl. (3.178).

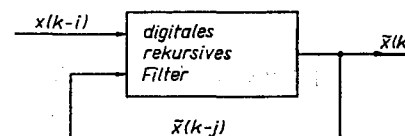


Bild 3.44  
Struktur der rekursiven Filter

Im folgenden sollen die wesentlichsten Aspekte dieses Filtertyps am Beispiel eines rekursiven Filters 1. Ordnung betrachtet werden. Als Gleichungen erhält man im Zeitbereich

$$\tilde{x}(k) = b x(k) + a \tilde{x}(k - 1) \quad (3.191)$$

und für die Pulsübertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{b}{1 - a z^{-1}}. \quad (3.192)$$

Zur Darstellung des Amplituden- und des Phasenfrequenzgangs wird wieder von harmonischen abgetasteten Signalen ausgegangen und somit  $z = e^{j\omega T}$  gesetzt. Damit ergeben sich nach einigen einfachen Zwischenschritten folgende Beziehungen:

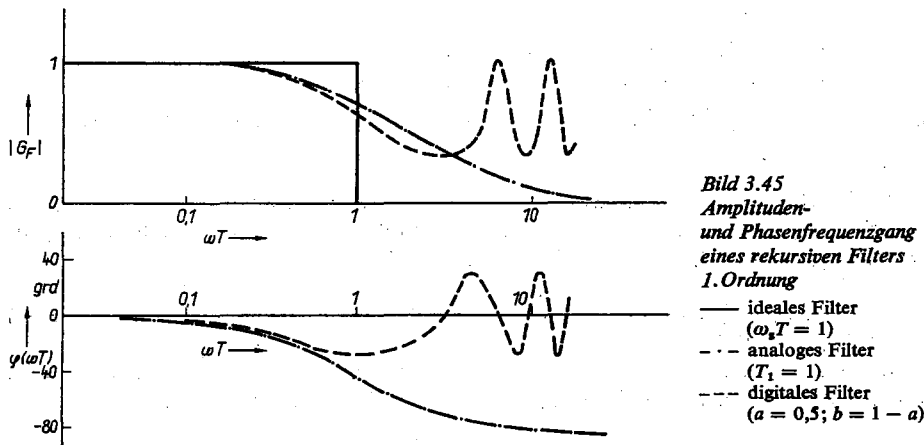
für den Amplitudenfrequenzgang

$$|G(e^{j\omega T})| = b/\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega T}, \quad (3.193)$$

für den Phasenfrequenzgang

$$\varphi(\omega T) = -\arctan \frac{a \sin \omega T}{1 - a \cos \omega T}. \quad (3.194)$$

In vielen Fällen wird durch die Wahl des Parameters  $b = 1 - a$  das Übertragungsverhalten des Filters so normiert, daß es im stationären Fall die Verstärkung von 1 besitzt (s. auch Bemerkung bei nichtrekursiven Filtern). Im Bild 3.45 sind der Amplituden- und der Phasenfrequenzgang beispielhaft dargestellt im Vergleich zu einem idealen und analogen Tiefpaßfilter. Es zeigt sich wieder das durch die Abtastung bedingte periodische Verhalten (Periode  $\omega T = 2\pi$ ) und das günstige Tiefpaßverhalten im Bereich  $\omega T < \pi$ . Für höhere Frequenzen ist das Filter nicht geeignet. Mit Zunahme des Wertes des Parameters  $a$  ( $0 < a < +1$  erlaubter Bereich für Tiefpaßverhalten) nimmt der Tiefpaßcharakter zu, d.h., die Grenzfrequenz  $\omega_g$  nimmt ab.



Wenn man die Bandbreite des Filters über die Grenzfrequenz  $\omega_g$  nach der Beziehung

$$|G(e^{j\omega T})| \geq G(\omega T = 0)/\sqrt{2}; \quad 0 \leq \omega T \leq \omega_g T \quad (3.195)$$

definiert, ergibt sich aus den Gl. (3.195) und (Gl. 3.193) mit  $b = 1 - a$

$$\frac{1 - a}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega_g T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nach Umformung folgt daraus der Zusammenhang zwischen der Grenzfrequenz  $\omega_g$  und dem Parameter  $a$  zu

$$a = 2 - \cos \omega_g T - \sqrt{(3 - \cos \omega_g T)(1 - \cos \omega_g T)}. \quad (3.196)$$

Gegeben:

Signalbeschreibung

$$x(t) = a_1 \sin \frac{2\pi}{250} t + z(t),$$

$a_1 = 0,5$ ,  $z(t)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),

Filtergleichung (3.191),

Abtastzeit  $T = 1$  s,

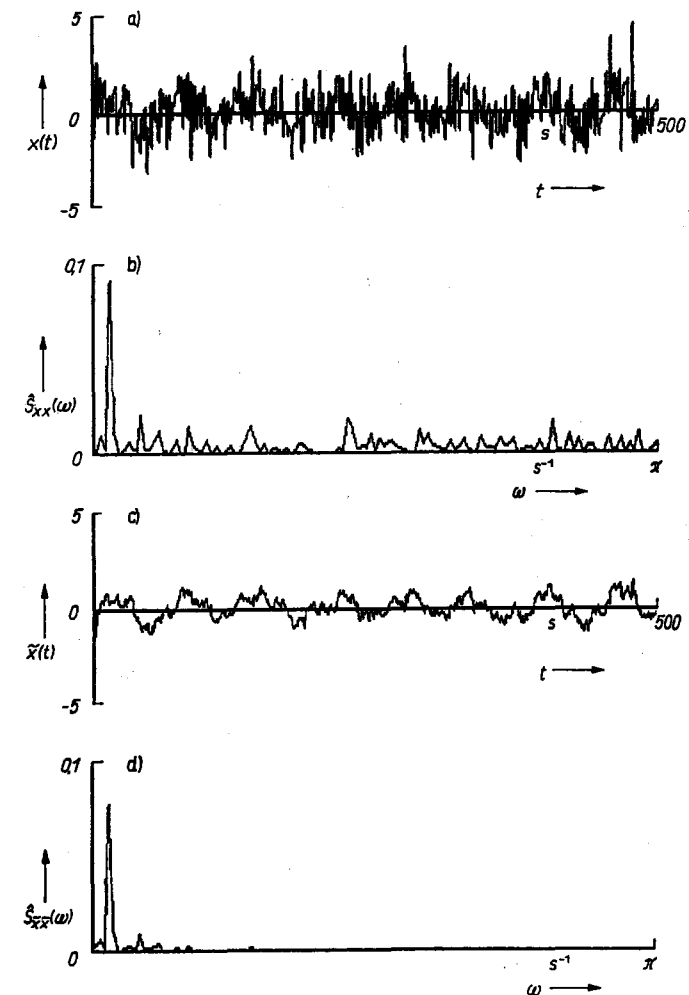
Beobachtungen: 500.

Gesucht:

Gefiltertes Signal  $\tilde{x}(k)$  ohne hochfrequente Anteile.

Ergebnis:

Siehe Bild zu Beispiel 3.13.



Die Ergebnisse zeigen, daß das auf einer Spektralanalyse entworfene Filter mit einer gewählten Grenzfrequenz  $\omega_g = 0,196 \text{ s}^{-1}$  (daraus folgt der Filterparameter  $a = 0,824$ ) die hochfrequenten Signalanteile stark dämpft. Dies ist aus dem Verlauf des gefilterten Signals  $\tilde{x}(t)$  und seines Leistungsspektrums  $S_{\tilde{x}\tilde{x}}(\omega)$  deutlich zu erkennen. Eine vollständige Beseitigung der hochfrequenten Signalanteile ohne eine starke Verfälschung des Nutzsignals ist durch ein Tiefpaßfilter 1. Ordnung nicht möglich.

Damit können aus a priori vorliegenden Kenntnissen über die Grenzfrequenz  $\omega_g$  die Tastperiode  $T$  und der Filterparameter  $a$  nach Gl. (3.196) ermittelt werden. Die Wirkung eines rekursiven Tiefpaßfilters 1. Ordnung ist für einen einfachen Testfall im Beispiel 3.13 dargestellt.

Eine besonders für die Echtzeitverarbeitung gut geeignete Filtervorschrift mit der Möglichkeit zur einfachen Gestaltung eines „exponentiellen Vergessens“ kann aus Gl. (3.191) gewonnen werden.

Wenn für den Parameter  $b = 1 - a$  eingesetzt wird, so daß die Filterverstärkung im stationären Fall gleich 1 ist, erhält man die Filtervorschrift

$$\tilde{x}(k) = (1 - a)x(k) + a\tilde{x}(k - 1) \quad \text{mit} \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (3.197)$$

Das generelle Verhalten von Amplituden- und Phasenfrequenzgang entspricht dem Filter von Gl. (3.192). Durch die Größe des Parameters  $a$  kann das Filterverhalten sehr gut gewählt werden. Ist der Parameter  $a = 0$ , erfolgt keine Filterung des Signals, und ist  $a = 1$ , wird nur der letzte Wert weiter verarbeitet; das gefilterte Signal bleibt konstant. In Abhängigkeit von der Größe  $a$  zwischen diesen Eckwerten können die zurückliegenden abgetasteten Signalwerte  $x(k - i)$  mit exponentiell abfallenden Gewichten  $c_i$  bewertet werden. Wird zum Zeitpunkt  $k = 0$  die Filterung mit  $\tilde{x}(-1) = 0$  begonnen, so ergibt sich aus Gl. (3.197) für den

$$\text{Tastpunkt 1 } (k = 0): \quad \tilde{x}(0) = 0 + (1 - a)x(0)$$

$$\text{Tastpunkt 2 } (k = 1): \quad \tilde{x}(1) = a[(1 - a)x(0)] + (1 - a)x(1)$$

$$\begin{aligned} \text{Tastpunkt 3 } (k = 2): \quad \tilde{x}(2) &= a[a(1 - a)x(0)] + (1 - a)x(1) + (1 - a)x(2) \\ \tilde{x}(2) &= a^2(1 - a)x(0) + a(1 - a)x(1) + (1 - a)x(2). \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen ist bereits zu erkennen, daß das Gewicht im jeweiligen Tastpunkt sich aus der allgemeinen Beziehung

$$c_i = (1 - a)a^i; \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.198)$$

ergibt. Für  $0 < a < 1$  erhält man damit eine typische exponentielle Wichtung (Vergessen), wie sie für einige ausgewählte Parameterwerte  $a$  im Bild 3.46 dargestellt ist. Wenn die Parameter  $c_i$  und die Signalwerte  $x(k - i)$  verwendet werden, ist das gleiche Verhalten wie beim nichtrekursiven Filter der Gl. (3.178) vorhanden.

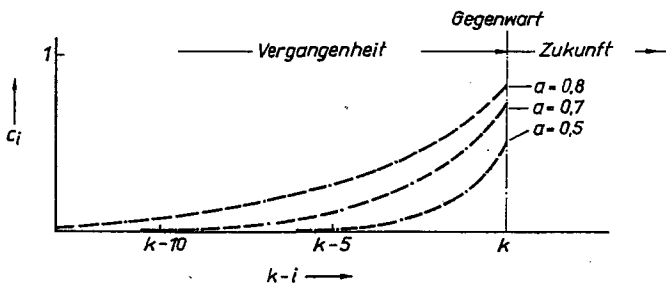


Bild 3.46  
Verlauf der Wichtungs-  
parameter  $c_i$

Die Wirkung des in Gl. (3.197) vorgestellten Tiefpaßfilters mit exponentiellem Vergessen wird als Funktion der Vergessensrate (Parameter  $a$ ) im Beispiel 3.14 untersucht.

Ist der Abfall des Amplitudenfrequenzgangs im Bereich oberhalb der Grenzfrequenz  $\omega_g$  nicht steil genug, können mehrere Filter 1. Ordnung in Reihe oder Filter mit komple-

**Gegeben:** Signalbeschreibung  

$$x(t) = a_0 + a_1 \sin \frac{2\pi}{125} t + a_2 z(t),$$

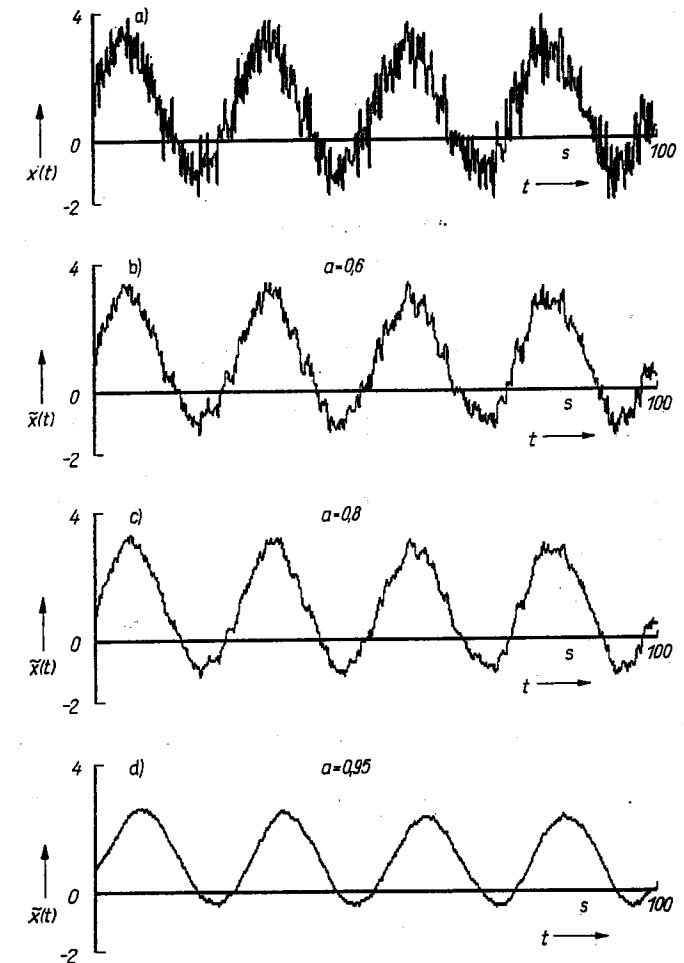
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 0,5,$$

$$z(t) \text{ weißes Rauschen, NV } (0, 1),$$
 Filtergleichung (3.197),  

$$a = 0,6; 0,8; 0,95,$$
 Abtastzeit  $T = 1 \text{ s},$   
 Beobachtungen: 100.

**Gesucht:** Verläufe der gefilterten Signale für verschiedene Parameter  $a$ .

**Ergebnis:** Siehe Bild zu Beispiel 3.14.



Die Verläufe der gefilterten Signale zeigen, daß

1. mit wachsendem Parameter  $a$  die Dämpfung der hochfrequenten Signalanteile zunimmt,
2. mit wachsendem Parameter  $a$  die Phasennacheilung des gefilterten Signals gegenüber dem ungefilterten Signal zunimmt.

nen Polen in Form von Butterworth- oder Tschebyscheff-Filtern das gewünschte Verhalten erzeugen. Der Entwurf der Filter erfolgt dann zweckmäßig mit Hilfe bekannter Verfahren für kontinuierliche Systeme und anschließender Transformation in den zeitdiskreten Bereich [3.22, 3.23].

### 3.4.4.3. Digitale Hochpaßfilter

In vielen Systemen treten u. a. aufgrund von Alterungserscheinungen oder von Wachstums-/Sterbeprozessen tieffrequente Störungen auf, die den Nutzsignalen überlagert sind. Damit bestehen für die Signalverarbeitung folgende Aufgaben:

- Erkennen der tieffrequenten Störsignale (Analyse des Spektrums zur Festlegung der Grenzfrequenz  $\omega_g$  oder zum Test auf Instationarität/Trend; s. Abschn. 3.4.2)
- Entwurf eines Hochpaßfilters oder Schätzung der Trendfunktion in Form eines Polynomansatzes (s. Abschn. 3.3.2.1)
- Filterung/Korrektur des gemessenen Signals.

Bei den weiteren Betrachtungen soll wieder die digitale Realisierung von Filtern mit Hochpaßeigenschaften im Vordergrund stehen. Zu generellen Fragen des Entwurfs im kontinuierlichen und diskreten Fall muß auf die weiterführende Literatur verwiesen werden [3.23, 3.24].

Im folgenden werden die beiden Möglichkeiten des Entwurfs eines digitalen Hochpaßfilters 1. Ordnung und der Trendermittlung und -korrektur näher betrachtet.

#### Hochpaßfilter 1. Ordnung

Das digitale Hochpaßfilter 1. Ordnung hat die Aufgabe, das Nutzspektrum oberhalb einer Grenzfrequenz  $\omega_g$  ungedämpft zu übertragen und das unterhalb von  $\omega_g$  liegende Störfrequenzspektrum möglichst vollständig zu unterdrücken. Der ideale Amplitudenfrequenzgang des Filters ist in Tafel 3.6 dargestellt.

Für das digitale Hochpaßfilter 1. Ordnung, das in diesem Fall ein rekursives Filter ist, gilt analog zu Abschnitt 3.4.4.2 für den normierten Fall ( $b_0 = 1 + a$ ) im Zeitbereich

$$\tilde{x}(k) = (1 + a)x(k) + a\tilde{x}(k-1) \quad (3.199)$$

und für die Pulsübertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{(1 + a)}{1 - az^{-1}}. \quad (3.200)$$

Das erstrebte typische Hochpaßverhalten wird für den Parameterbereich  $-1 < a < 0$  durch die Gln. (3.199) und (3.200) erzeugt. Für die Betrachtung des Frequenzverhaltens wird wiederum davon ausgegangen, daß als Eingangssignal eine harmonisch abgetastete Schwingung verwendet wird. Damit erhält man aus Gl. (3.200) den Amplitudenfrequenzgang zu

$$|G(e^{j\omega T})| = \frac{(1 + a)}{\sqrt{1 + a^2 - a \cos \omega T}} \quad (3.201)$$

und den Phasenfrequenzgang zu

$$\varphi(\omega T) = -\arctan \frac{a \sin \omega T}{1 - a \cos \omega T}$$

bei einem Parameterbereich für  $a$  von  $-1 < a < 0$ . Für ein Beispiel ist der typische Verlauf des Amplituden- und des Phasenfrequenzgangs im Bild 3.47 dargestellt. Es zeigt wieder das periodische Verhalten von Digitalfiltern, das durch eine geeignete Wahl von  $\omega T$  ( $\omega T < \pi$ ) beachtet werden muß. Je größer der Parameter  $a$  ist, um so besser wird der Signalanteil im Frequenzbereich unterhalb  $\omega_g T$  gedämpft und der oberhalb von  $\omega_g T$  mit der Verstärkung von 1 übertragen.

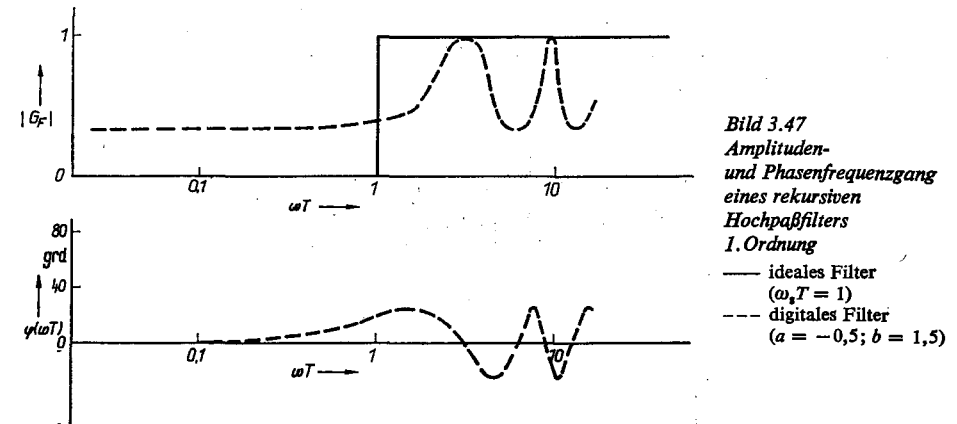


Bild 3.47  
Amplituden-  
und Phasenfrequenzgang  
eines rekursiven  
Hochpaßfilters  
1. Ordnung  
— ideales Filter  
( $\omega_g T = 1$ )  
--- digitales Filter  
( $a = -0,5; b = 1,5$ )

Für den Zusammenhang zwischen dem Filterparameter  $a$  und der Bandbreite  $\omega_g$  des Filters gilt analog zu den Betrachtungen beim Tiefpaß

$$\frac{1 + a}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega_g T}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{mit} \quad -1 < a < 0. \quad (3.202)$$

Aus der Gleichung ergibt sich dann die Beziehung für die Berechnung von  $a$  zu

$$a = -(2 + \cos \omega_g T) + \sqrt{(3 + \cos \omega_g T)(1 + \cos \omega_g T)}. \quad (3.203)$$

Für einen Testfall sind im Beispiel 3.15 der Entwurf und die Wirkung eines Hochpaßfilters 1. Ordnung dargestellt.

Reicht die Flankensteilheit des Amplitudenfrequenzgangs nicht aus, so können auch beim Hochpaßfilter mehrere Filter 1. Ordnung in Reihe geschaltet oder Butterworth- oder Tschebyscheff-Filter verwendet werden [3.23].

#### Trendermittlung und -korrektur

Eine Hochpaßfilterung kann algorithmisch leicht realisiert werden, wenn davon ausgegangen wird, daß ein tieffrequentes Störsignal/Trend in Form von deterministischen Signalmodellen beschrieben werden kann (s. Abschn. 3.3.2). Als zwei typische Formen seien hier der tieffrequente periodische Störeinfluß und ein tieffrequenter Störeinfluß, der mit Hilfe eines Polynomansatzes beschrieben werden kann, betrachtet (Bild 3.48).

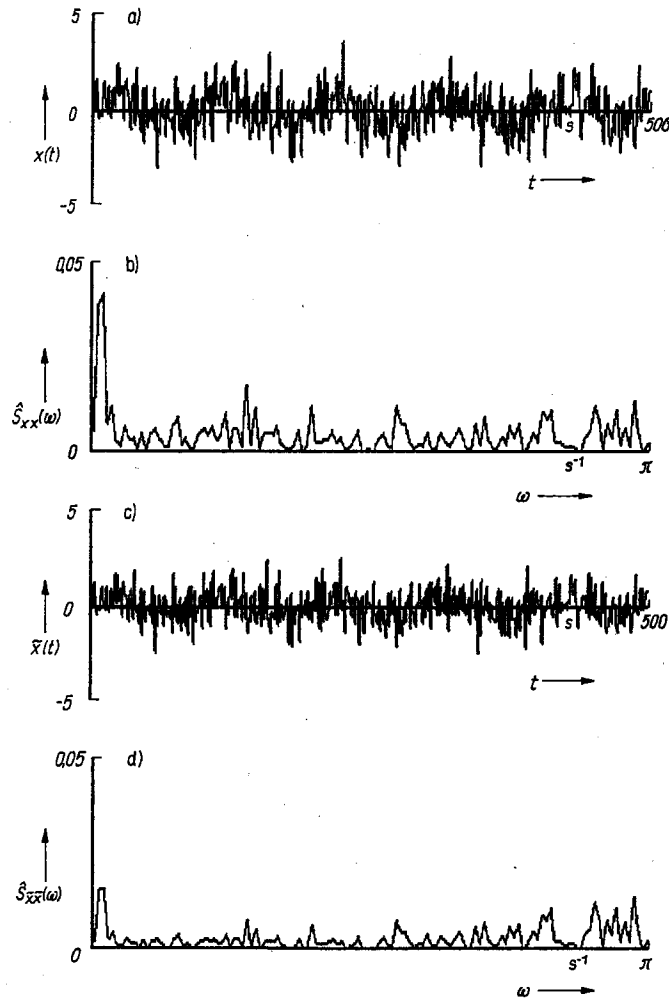
Bei der Ermittlung der tieffrequenten Signalanteile und der anschließenden Korrektur ist die Lösung folgender Aufgaben notwendig:

1. Test auf Instationarität (s. Abschn. 3.4.2) bzw. Spektralanalyse zur Ermittlung der Frequenzen der tieffrequenten Störung (s. Abschn. 3.3.2);

**Gegeben:** Signalbeschreibung  
 $x(t) = a_1 \sin \frac{2\pi}{250} t + z(t)$ ,  
 $a_1 = 0,5$ ,  $z(t)$  weißes Rauschen, NV (0, 1),  
 Filtergleichung (3.199),  
 Abtastzeit  $T = 1$  s,  
 Beobachtungen: 500.

**Gesucht:** Gefilterte Signalwerte  $\tilde{x}(k)$  ohne tieffrequente Anteile.

**Ergebnis:** Siehe Bild zu Beispiel 3.15.



Der Verlauf der gefilterten Signalwerte  $\tilde{x}(k)$  und der Vergleich der Leistungsspektren des ungefilterten und des gefilterten Signals  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  und  $\hat{S}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\omega)$  zeigen, daß die tieffrequenten Signalanteile stark gedämpft werden. Aus der Analyse des Leistungsdichtespektrums und von Zusatzinformationen kann die Grenzfrequenz zu  $\omega_p = 1,31 \text{ s}^{-1}$  gewählt werden. Das ergibt einen Parameter  $a$  für das Hochpaßfilter entsprechend Gl. (3.203) zu  $a = -0,233$ . Eine vollständige Dämpfung aller tieffrequenten Signalanteile ohne eine starke Verfälschung des Nutzsignals ist mit einem digitalen Hochpaßfilter 1. Ordnung nicht möglich.

## 2. Ermittlung der Signalmodelle für die tieffrequente Störung $z(t)$ in der diskreten Form

$$\hat{z}(kT) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_i (kT)^i; \quad m \leq 3 \quad (3.204)$$

bzw.

$$\hat{z}(kT) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^l [\hat{a}_i \cos \hat{\omega}_i(kT) + \hat{b}_i \sin \hat{\omega}_i(kT)];$$

$$l \leq 3, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

entsprechend den im Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Verfahren;

## 3. Korrektur des gemessenen Signals nach der Vorschrift

$$\tilde{x}(kT) = x(kT) - \hat{z}(kT); \quad (3.205)$$

4. Test der Signalwerte  $\tilde{x}(kT)$  auf Stationarität. Im negativen Fall muß mit Schritt 2 wieder begonnen und die Ordnung oder die Gesamtstruktur des Modells verändert werden.

Da mit dieser Strategie einzelne tieffrequente periodische Störkomponenten aus dem Signal eliminiert werden können, ist das Verhalten dem einer Bandsperre äquivalent. Diese Strategie ist hinsichtlich ihrer Methodik bevorzugt im Off-line-Betrieb einzusetzen. In den Beispielen 3.4 und 3.5 ist die beschriebene Vorgehensweise für einfache Testfälle dargestellt.

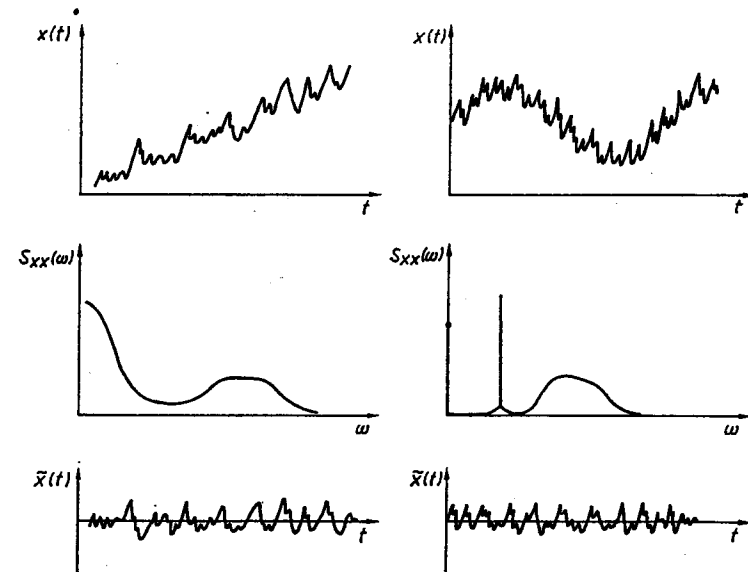


Bild 3.48. Signalverläufe und Leistungsdichtespektren tieffrequent gestörter Signale

## 3.5. Übungsaufgaben zum Abschnitt 3

## Aufgabe 3.1

Berechnen und skizzieren Sie die Autokorrelationsfunktion für das Signal

$$x(t) = a_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

mit

$$a_0 = 311 \text{ V} \quad \text{und} \quad \omega_0 = 314 \text{ s}^{-1} \triangleq f = 50 \text{ Hz!}$$

Berechnen Sie  $U = \sqrt{R_{xx}(0)}$ !

## Aufgabe 3.2

Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion  $R_{xx}(mT)$  über eine Periode ( $n = 8$ ) der in Tafel 3.7 angegebenen diskreten Zeitfunktion!

| $iT$    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
|---------|---|---|---|---|---|----|----|----|
| $x(iT)$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -1 |

Tafel 3.7  
Signalwerte für Aufgabe 3.2

## Aufgabe 3.3

Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion des in Tafel 3.8 angegebenen nichtperiodischen diskreten Signals!

| $iT$    | 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7  | 8  |
|---------|---|---|---|----|---|----|----|----|
| $x(iT)$ | 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | -1 | -2 | -1 |

Tafel 3.8  
Signalwerte für Aufgabe 3.3

## Aufgabe 3.4

Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion für das in Tafel 3.9 dargestellte periodische Signal (12 Werte  $\triangleq 1$  Periode) bis zu einer Verschiebung von  $m = 14T$

- a) ohne Zentrierung der Werte  
b) mit Zentrierung der Werte!

Beziehen Sie die Autokorrelationsfunktion auf den Wert  $R_{xx}(0)$ ! Skizzieren Sie den Verlauf  $R_{xx}(mT)$ !

Tafel 3.9. Signalwerte für Aufgabe 3.4

| $iT$    | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x(iT)$ | 2,0 | 2,4 | 2,5 | 2,4 | 2,0 | 1,5 | 1,0 | 0,6 | 0,5 | 0,6 | 1,0 | 1,5 |

## Aufgabe 3.5

An einem reinen Totzeitsystem werden die in Tafel 3.10 angegebenen Eingangs- und Ausgangssignalwerte gemessen.

Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktionen  $R_{xx}(mT)$  für  $0 \leq m \leq 9$ , und ermitteln Sie die Totzeit  $T_t$ !

Tafel 3.10  
Signalwerte für Aufgabe 3.5

| $iT$ | $u(iT)$ | $x(iT)$ |
|------|---------|---------|
| 1    | -0,1    | -0,2    |
| 2    | -1,3    | 0,3     |
| 3    | 0       | -0,6    |
| 4    | -0,5    | -0,1    |
| 5    | -0,2    | -1,3    |
| 6    | -0,3    | 0       |
| 7    | 0,6     | -0,5    |
| 8    | -1,1    | -0,2    |
| 9    | 1,7     | -0,3    |
| 10   | -0,7    | 0,6     |
| 11   | 0,2     | -1,1    |
| 12   | -0,5    | 1,7     |
| 13   | 2,4     | -0,7    |
| 14   | 1,4     | 0,2     |
| 15   | 0,2     | -0,5    |
| 16   | -1,7    | 2,4     |
| 17   | 0,4     | 1,4     |

## Aufgabe 3.6

Gegeben ist die Korrelationsfunktion

$$R_{xx}(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau,$$

wobei  $a = 311 \text{ V}$ ,  $\omega_0 = 314 \text{ s}^{-1} \triangleq f = 50 \text{ Hz}$ .

- a) Berechnen und skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum  $S_{xx}(\omega)$ !  
b) Berechnen Sie die Leistung, wenn die Spannung  $x(t)$  an einem Widerstand  $R = 48,4 \Omega$  abfällt!

## Aufgabe 3.7

Ein stochastischer Vorgang habe die Autokorrelationsfunktion  $R_{xx}(\tau) = 9 + 25 e^{-5|\tau|}$ .

Berechnen Sie

- a) den Mittelwert  $\bar{x}$   
b) die Standardabweichung  $\sigma_x$   
c) das Autoleistungsspektrum  $S_{xx}(\omega)$ !

## Aufgabe 3.8

Bestimmen Sie mit Hilfe von Näherungsmethoden folgende Parameter des Spektrums  $S_{xx}(\omega)$ :

- a) die Varianz  $\sigma_x^2$   
b) die Grenzfrequenz  $\omega_g$   
c) den Gleichanteil  $S_{xx}(0)$  unter der Voraussetzung, daß das Spektrum durch ein Rechteck der Länge  $\omega_g$  angenähert wird!

Verwenden Sie die Wertefolge der eindimensionalen Zufallszahl in Tafel 3.11!

Das Spektrum habe in logarithmischer Darstellung einen Abfall von 80 dB/Dekade.

Die Taktzeiten betragen 0,1 s, 1 s, 10 s.

Tafel 3.11. Signalwerte für Aufgabe 3.8

| $iT$ | →     |       |       |       |       |       |       |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | 0,00  | -1,26 | 0,12  | 0,24  | -0,50 | 0,91  | -0,21 |
|      | -2,25 | -0,25 | -0,79 | 0,24  | -0,60 | -1,19 | 1,74  |
|      | 0,28  | -0,45 | 0,41  | -0,05 | -0,48 | -0,11 | 3,36  |
|      | 0,76  | 1,40  | 0,33  | -0,04 | -1,09 | -0,52 | 0,37  |
|      | 2,38  | 0,43  | 0,02  | -2,07 | -1,51 | -0,73 |       |
|      | -0,18 | -0,28 | 0,61  | -0,50 | -1,71 | -0,09 |       |

## Aufgabe 3.9

Gegeben sind die in Tafel 3.12 dargestellten vier unmittelbar nacheinander aufgenommenen Serien zu je zehn Beobachtungen einer Zufallsgröße.

- a) Bestimmen Sie anhand der Serien 1 und 4
- durch Mittelwertbildung der Serien
  - durch Prüfung auf Stationarität mit dem  $F$ -Test (bezüglich  $\sigma$ ) sowie mit dem  $t$ -Test (bezüglich  $\mu$ ),

ob ein Trend vorliegt (bei  $\alpha = 0,05$ )!

- b) Schätzen Sie für die Trendfunktion  $\hat{x}(t) = at$  den Parameter  $a$  ab!
- c) Führen Sie eine Trendkorrektur durch, und tragen Sie die korrigierten Serien auf!
- d) Zu den korrigierten Meßreihen liegt aus weiteren Messungen eine Schätzung  $\sigma = 7$  vor. Es kann angenommen werden, daß die Grundgesamtheit normalverteilt ist.

Bestimmen Sie für  $\alpha = 0,3\%$ , welche Meßwerte als Fehlmessungen in Frage kommen!

Tafel 3.12. Signalwerte für Aufgabe 3.9

| Serie 1 |       | 2   |       | 3   |      | 4   |      |
|---------|-------|-----|-------|-----|------|-----|------|
| t/s     | x(t)  | t/s | x(t)  | t/s | x(t) | t/s | x(t) |
| 1       | 3,3   | 11  | 1,1   | 21  | 9,0  | 31  | 2,0  |
| 2       | – 9,3 | 12  | 11,7  | 22  | 11,7 | 32  | 15,0 |
| 3       | 9,9   | 13  | 10,1  | 23  | 4,2  | 33  | 13,4 |
| 4       | –13,4 | 14  | 1,7   | 24  | 4,4  | 34  | 35,6 |
| 5       | – 2,2 | 15  | 8,6   | 25  | 2,9  | 35  | 27,8 |
| 6       | 7,1   | 16  | 17,0  | 26  | 36,3 | 36  | 12,5 |
| 7       | 0,4   | 17  | –22,1 | 27  | 13,0 | 37  | 18,6 |
| 8       | 22,4  | 18  | 16,2  | 28  | 13,8 | 38  | 22,0 |
| 9       | 14,5  | 19  | 21,7  | 29  | 15,6 | 39  | 10,3 |
| 10      | – 1,6 | 20  | 9,3   | 30  | 14,6 | 40  | 36,6 |

## Aufgabe 3.10

Gegeben sind die in Tafel 3.13 angegebenen Werte einer abgetasteten Zufallsgröße (Abtastzeit  $T = 1$  s).

- a) Schätzen Sie die Parameter des Trendverlaufs für den Modellansatz  $\hat{x}(kT) = a_0 + a_1 kT + a_2 (kT)^2$ !
- b) Überprüfen Sie die Signifikanz der Parameter für eine Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0,05$ !
- c) Wie lautet die  $T$ -Matrix für den gleichen Modellansatz, jedoch mit einer Abtastzeit  $T = 0,5$  s?

| t/s  | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|------|-----|------|------|------|------|------|
| x(t) | 6,1 | 11,6 | 20,4 | 29,9 | 41,8 | 56,2 |

Tafel 3.13  
Signalwerte für Aufgabe 3.10

## Aufgabe 3.11

Bestimmen Sie aus den in Tafel 3.14 angegebenen abgetasteten Signalwerten (Abtastzeit  $T = 1$  s) die Parameter des Signalmodells

$$\hat{x}(kT) = a_0 + a_1 \sin \omega kT + a_2 \cos \omega kT!$$

Die Frequenz  $\omega$  wurde aus einer Spektralanalyse zu  $\omega = 0,523 \text{ s}^{-1}$  bestimmt.

| t/s | x(t)  |
|-----|-------|
| 0   | 0,55  |
| 1   | 0,66  |
| 2   | 1,1   |
| 3   | 1,1   |
| 4   | 0,64  |
| 5   | –0,02 |
| 6   | –0,57 |
| 7   | –1,09 |
| 8   | –0,99 |
| 9   | –1,17 |
| 10  | –0,56 |
| 11  | –0,1  |

Tafel 3.14  
Signalwerte für Aufgabe 3.11

## Aufgabe 3.12

Gegeben sind die in Tafel 3.15 dargestellten Meßwerte eines mit einer Abtastzeit von  $T = 1$  s abgetasteten Signals  $x(t)$ .

Tafel 3.15. Signalwerte für Aufgabe 3.12

| t/s | x(t)  | t/s | x(t)  | t/s | x(t)  | t/s | x(t)   |
|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-----|--------|
| 0   | 0     | 9   | 10,5  | 18  | –1,5  | 27  | – 9,5  |
| 1   | 1,24  | 10  | 10,35 | 19  | –0,24 | 28  | –10,85 |
| 2   | 5,42  | 11  | 8,4   | 20  | –3,42 | 29  | – 9,4  |
| 3   | 4,0   | 12  | 8,66  | 21  | –6,5  | 30  | –10,66 |
| 4   | 7,93  | 13  | 7,16  | 22  | –6,93 | 31  | – 5,66 |
| 5   | 7,16  | 14  | 4,93  | 23  | –5,66 | 32  | – 5,93 |
| 6   | 7,66  | 15  | 6,5   | 24  | –9,66 | 33  | – 4,5  |
| 7   | 7,4   | 16  | 4,42  | 25  | –7,9  | 34  | – 4,42 |
| 8   | 11,85 | 17  | 1,24  | 26  | –9,85 | 35  | – 2,24 |
|     |       |     |       |     |       | 36  | 1,5    |

Filtern Sie die Meßwertfolge

- a) mit dem nichtrekursiven Algorithmus

$$\hat{x}(k) = \frac{\omega_s T}{\pi} \sum_{i=-n}^n \frac{\sin(i\omega_s T)}{i\omega_s T} x(k-i) \quad \text{für } \omega_s = 0,6 \text{ s}^{-1} \text{ und } n = 3,$$

- b) mit dem rekursiven Algorithmus

$$\hat{x}(k) = \alpha \hat{x}(k-1) + (1-\alpha) x(k) \quad \text{für } \alpha = 0,8!$$

Zeichnen Sie  $x(k)$  und  $\hat{x}(k)$  für die Varianten a) und b) jeweils in ein Diagramm, und diskutieren Sie die Ergebnisse!

## 4. Bestimmung des dynamischen Verhaltens ungestörter Systeme

### 4.1. Systemeigenschaften, Systemmodelle und Testsignale

#### 4.1.1. Voraussetzungen für die Anwendbarkeit deterministischer Methoden

Die in den folgenden Abschnitten vorgestellten Methoden zur Bestimmung des dynamischen Verhaltens gehen davon aus, daß das System durch ein vorwiegend determiniertes Eingangssignal  $u(t)$  erregt und das ungestörte Ausgangssignal  $x(t)$  gemessen wird. Die Auswertung beider Signale ermöglicht die Ermittlung eines Modells des Systems. Für die deterministischen Methoden zur Modellbestimmung müssen in der Regel folgende Voraussetzungen an das System erfüllt sein, um eine ausreichende Modellgüte zu erzielen:

1. Das System ist ungestört/gering gestört.
2. Das Systemverhalten ist linear.
3. Das Systemverhalten ist zeitinvariant.
4. Es handelt sich um Systeme mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße.
5. Das Systemverhalten ist durch konzentrierte Parameter beschreibbar.

Unter gering gestört wird ein Niveau der Störung kleiner als 10% des Ausgangssignals angesehen. Das Ziel der weiteren Ausführungen besteht nun darin, Strategien zur Bestimmung von dynamischen Systemmodellen vorzustellen, die es gestatten, eine günstige Zuordnung von gewünschter Systembeschreibung, möglichem Testsignal und zweckmäßiger Auswertemethode zu treffen.

#### 4.1.2. Verwendete Systemmodelle

Das Ziel der verschiedenen Methoden zur Modellbestimmung des dynamischen Verhaltens besteht in der Ermittlung

- von *nichtparametrischen* (grafisch-numerischen) Systembeschreibungen in Form von Gewichts-, Übergangs- oder Frequenzgangfolgen

$$g(t_i), h(t_i), G(j\omega_i); \quad i = 1, 2, \dots, N$$

oder

- von *parametrischen* Systembeschreibungen in Form von analytischen Ausdrücken für die Gewichtsfunktion  $g(t)$ , die Übergangsfunktion  $h(t)$  oder den Frequenzgang  $G(j\omega)$  oder
- der *Systemzustände* durch einen Beobachter, bei gegebener Zustands- und Ausgangsgleichung des Systems.

Die möglichen und praktisch bewährten Wege zur Erstellung der genannten Systemmodelle sind im Bild 4.1 in einer Übersicht dargestellt. Viele der Verfahren zeichnen sich dabei durch ihre einfache gerätetechnische Realisierung und Auswertemethodik aus. Sie

haben auch nach Einführung der rechnergestützten Methoden (s. Abschnitte 5 und 6) nicht an Bedeutung verloren und dienen den leistungstärkeren Methoden u. a. zur Festlegung der Tasterperiode  $T$  und von Startwerten als vorausgehender Analyseschritt.

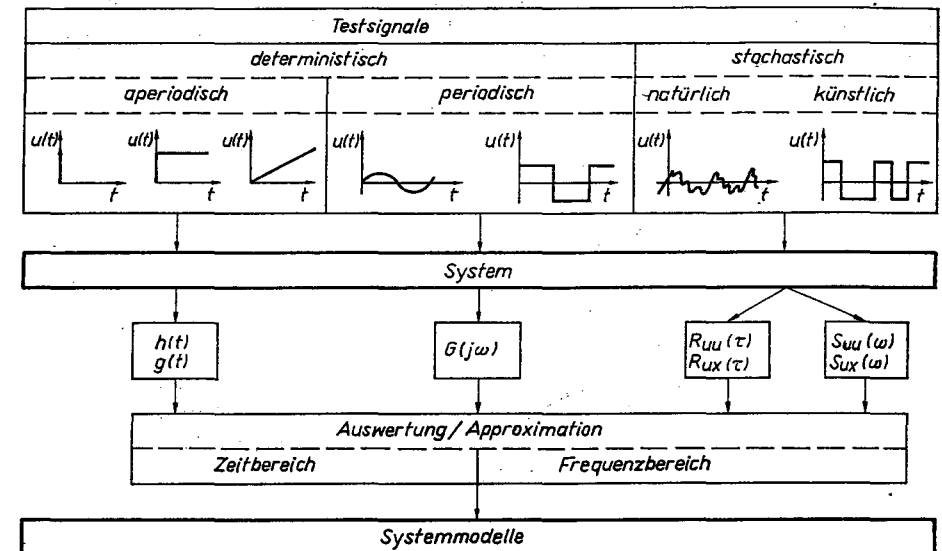


Bild 4.1. Zusammenstellung verschiedener Testsignale, Auswertemethoden und Systemmodelle

#### 4.1.3. Ausgewählte Testsignale

Für die Modellbestimmung können als Testsignale verwendet werden (s. Bild 4.1):

**Aperiodische Testsignale.** Zu dieser Gruppe von Testsignalen gehören u. a. die Sprung-, Impuls- und Rampenfunktion. Die Testsignale sind häufig einfach zu realisieren; die notwendige Beobachtungszeit des Systems ist gegenüber anderen Verfahren gering, und die Auswerteverfahren sind relativ einfach (s. Abschn. 4.2).

**Periodische Testsignale.** Als Signale dieser Gruppe sind sinusförmige oder andere periodische (z. B. Rechtecksignale) Testsignale anzusehen. Ihre Realisierung ist aufwendiger als die der aperiodischen Testsignale. Die Beobachtungszeit des Systems wird aufgrund der notwendigen Einschwingzeit für jede Frequenz und der Messungen für jede Frequenz  $\omega_i$  groß.

Dafür liefern die Auswertemethoden eine hohe Modellgüte, und sie sind relativ unempfindlich gegenüber Störungen (Korrelationsprinzip).

**Stochastische und pseudostochastische Testsignale.** Stochastische Signale können im normalen Betrieb am Systemeingang auftreten oder künstlich, u. a. in Form von Folgen (PRBS-, Plackett-Burman-,  $m$ -Folgen; s. Abschn. 6.4) aufgeprägt werden. Die Verwendung der normal im Betrieb auftretenden stochastischen Schwankungen hat den Vorteil, daß das System nicht gestört werden muß. Als entscheidender Nachteil muß aber häufig die zu geringe Erregung des Systems in den das System charakterisierenden Frequenzbereichen angesehen werden. Daraus resultieren sehr lange Beobachtungszeiten. Die Auswertung des gemessenen Eingangs- bzw. Ausgangssignals kann über die Entfaltung (siehe Abschn. 4.2.3) oder die Berechnung der Korrelationsfunktionen  $R_{uu}(\tau)$  und  $R_{ux}(\tau)$

(s. Abschn. 3.2.2) im Zeitbereich oder durch die Berechnung der Leistungsdichtespektren  $S_{uu}(\omega)$  und  $S_{ux}(\omega)$  (s. Abschn. 3.2.3) im Frequenzbereich erfolgen. Der Auswerteaufwand steigt gegenüber den ersten beiden Testsignalarten weiter an.

Die allgemeinen Zusammenhänge zwischen den Testsignalen, der auszuwertenden Systemantwort und den möglichen Systembeschreibungen sind im Bild 4.1 dargestellt.

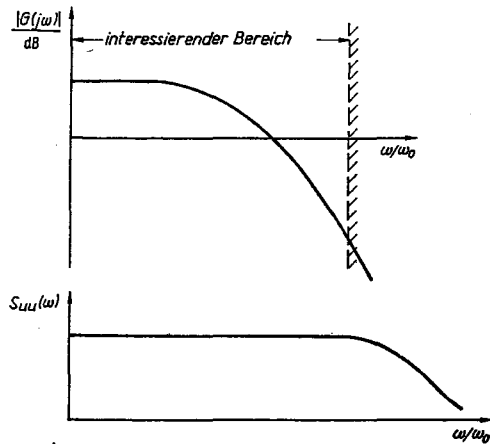


Bild 4.2  
Zusammenhang  
zwischen dem interessierenden  
Frequenzbereich des Systems  
und dem Leistungsspektrum  
eines idealen Testsignals

Für die Auswahl eines geeigneten Testsignals aus den oben angeführten Grundtypen muß neben dem Aspekt der einfachen Realisierbarkeit und dem Meß- und dem Auswerteaufwand auch der Gesichtspunkt der Modellgüte betrachtet werden. Grundsätzlich ist ein System durch ein Modell nur dann hinreichend gut nachbildbar, wenn das Leistungsdichtespektrum des Testsignals mindestens den Frequenzbereich des Systems anregt, der für die Lösung des vorliegenden Problems notwendig ist (Bild 4.2). Da dieser Bereich häufig nicht bekannt ist, wird ein Testsignal, das die Eigenschaften des „weißen Rauschens“ besitzt, bezüglich der Modellgüte Vorteile aufweisen. Betrachtet man das Amplitudenspektrum der verschiedenen Testsignale (s. Abschn. 3.1, Tafel 3.2), so kann für die Analyse des dynamischen Verhaltens folgende Rangfolge angegeben werden:

1. Dirac-Impuls, periodische Signale mit den Frequenzen  $\omega_i$ ;  $i = 1, 2, \dots$ , stochastische Signalfolgen
2. Impulsfunktion
3. Sprungfunktion
4. Rampenfunktion.

Außer bei den Signalen vom Rang 1 nimmt bei allen anderen Testsignalen die Leistung mit der Frequenz ab. Als Kompromiß aufgrund der Anregung des Systems haben sich die Impulsfunktion, die Sprungfunktion, periodische Signale und stochastische Signalfolgen durchgesetzt.

Für die Bestimmung des statischen Verhaltens, d.h. den tieffrequenten Bereich des Systems, ist eindeutig die Sprungantwort (s. Abschn. 4.2.1) zu bevorzugen. Den proportionalen Übertragungsfaktor  $K_p$  von Systemen mit Ausgleich [3.1] erhält man aus dem stationären Wert der Sprungantwort  $x(\infty)$  (Bild 4.3):

$$h(\infty) = \frac{x(\infty)}{u_0} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} K_p \frac{\prod_{i=1}^m (1 + pT_{Di})}{\prod_{i=1}^n (1 + pT_i)} = K_p. \quad (4.1)$$

Für Systeme ohne Ausgleich erhält man analog den integralen Übertragungsfaktor  $K_I$  aus der Asymptote, in die die Sprungantwort für große  $t$  einmündet (Bild 4.3):

$$h(\infty) = \frac{x(\infty)}{u_0} = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \frac{1}{p} \frac{K_I}{p} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + pT_{Di})}{\prod_{i=1}^n (1 + pT_i)} = K_I. \quad (4.2)$$

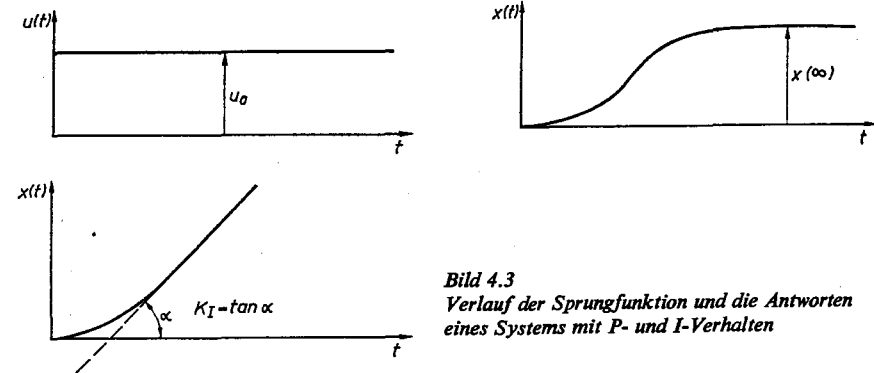


Bild 4.3  
Verlauf der Sprungfunktion und die Antworten  
eines Systems mit P- und I-Verhalten

Damit wird an dieser Stelle bereits deutlich, daß eine Kombination verschiedener Testsignale in den Varianten

- Sprungfunktion–Impulsfunktion
- Sprungfunktion–periodische Signale
- Sprungfunktion–stochastische Signalfolgen

zur effektiven Ermittlung der den tiefen und hohen Frequenzbereich des Systems beschreibenden Parameter verwendet werden sollte. Weiterführende Betrachtungen sind in [1.37, 1.40, 1.46] enthalten. Eine andere Möglichkeit besteht in der kombinierten Auswertung der Sprungantwort in der offenen und geschlossenen Kette, weil der geschlossene Kreis eine Anhebung der Leistung des Testsignals im höheren Frequenzbereich ermöglicht [1.31].

In den folgenden Abschnitten werden einige typische und in der Praxis bewährte Verfahren für die Bestimmung von dynamischen Systemmodellen im Zeitbereich (Abschnitt 4.2), im Frequenzbereich (Abschn. 4.3) und als Zustandsbeschreibung (Abschnitt 4.4) vorgestellt.

## 4.2. Ein-/Ausgangs-Modelle im Zeitbereich

### 4.2.1. Modellbestimmung anhand von Kenngrößen der Sprungantwort bzw. der Übergangsfunktion

Ausgangspunkt aller im weiteren betrachteten Verfahren ist die aufgenommene Sprungantwort  $x(t)$  bzw. die normierte Sprungantwort, die Übergangsfunktion  $h(t)$ . Die Ermittlung der Parameter des Modells aus der Sprungantwort erfolgt bei den hier vorgestellten Verfahren anhand von Kenngrößen des Verlaufs der Systemantwort, z. B. %-Werte

von  $h(t)$ , Wendepunktkoordinaten, wobei in der Mehrzahl der Methoden ein monotoner Verlauf der Sprungantwort vorausgesetzt wird. Bei nichtmonotonen Sprungantworten müssen zusätzlich Vorhalt- oder Schwingungsglieder in den durch Trägheitsglieder gebildeten allgemeinen Ansatz aufgenommen werden. Selbst bei monoton verlaufenden Systemantworten mit reinem Trägheitsverhalten ist es schwierig, mehr als drei unterschiedliche Zeitkonstanten zu ermitteln. Deshalb wurde von *Strejc* [4.1] ein Modell mit  $n$  gleichen Zeitkonstanten und von *Radtke* [4.2] ein Modell mit  $n$  harmonisch gestaffelten Zeitkonstanten vorgeschlagen. Für viele Aufgaben des Steuerungsentwurfs sind diese Approximationen ausreichend.

Neben der Bestimmung der statischen Übertragungsfaktoren  $K_p$  (im folgenden immer mit  $K$  bezeichnet) und  $K_1$  spielt die Ermittlung der Totzeit  $T_t$  eines Systems eine große Rolle. Sie kann bei der Auswertung von Sprungantworten noch relativ gut aus der Ermittlung der Zeitdifferenz vom Sprungfunktionsbeginn bis zur Anstiegsänderung  $dx(t)/dt \neq 0$  des Ausgangssignals gewonnen werden. Für Systeme höherer Ordnung nimmt die Genauigkeit mit der Zunahme der Ordnung ab. Dann ist eine günstig gewählte Totzeit  $T_t$  gegeben, wenn der restliche Teil der Sprungantwort/Übergangsfunktion durch reine Trägheitsglieder gut approximiert werden kann.

Für folgende Systemmodelle werden Methoden zur Struktur- und/oder Parameterbestimmung vorgestellt, die teilweise auf heuristischen Elementen beruhen:

1.  $P$ - $T_1$ - und  $P$ - $T_1$ - $T_{D1}$ -System,
2.  $P$ - $T_n$ - $T_1$ -System
  - 2 unterschiedliche Zeitkonstanten
  - $n$  gleiche Zeitkonstanten
  - $n$  gestaffelte Zeitkonstanten,
3.  $I$ - $T_1$ -System,
4.  $G(j\omega)$  aus der Übergangsfunktion  $h(t)$ .

#### 4.2.1.1. Modellbildung von $P$ - $T_1$ - und $P$ - $T_1$ - $T_{D1}$ -Systemen

Das Ziel dieser Methoden besteht darin, aus der gemessenen Sprungantwort  $x(t)$  bzw. Übergangsfunktion  $h(t)$  die Parameter der Übertragungsfunktion  $G(p)$  zu bestimmen. Als Systemstrukturen werden angenommen

$$G(p) = \frac{K}{(1 + pT_1)} \quad \text{bzw.} \quad G(p) = \frac{K(1 + pT_{D1})}{(1 + pT_1)}. \quad (4.3)$$

Für die Parameterbestimmung des  $P$ - $T_1$ -Systems gilt:

Verstärkung  $K$

Aus der Übergangsfunktion

$$x(t) = u_0 K (1 - e^{-t/T_1}) \quad (4.4)$$

folgt mit  $t \rightarrow \infty$  für den Parameter  $K$

$$K = \frac{x(\infty)}{u_0}. \quad (4.5)$$

Zeitkonstante  $T_1$

Wegen der 1. Ordnung – Gl. (4.3) – kann der Parameter  $T_1$  entsprechend Bild 4.4 aus folgenden Punkten der Übergangsfunktion bestimmt werden:

- I.  $h(T_1) = 0,632$
- II.  $h(1,2T_1) = 0,7$
- III. aus Subtangente  $s(t_0)$  an der Stelle  $t_0$ .

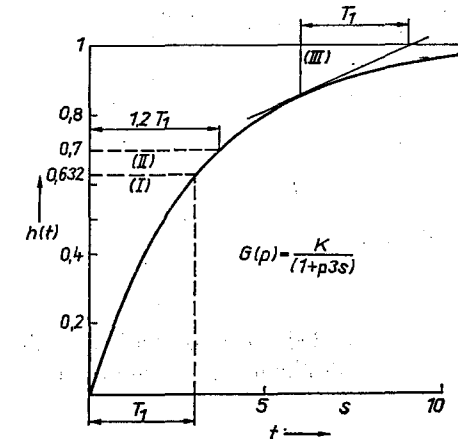


Bild 4.4  
Auswertung einer Übergangsfunktion  
eines  $P$ - $T_1$ -Systems

Die Variante III ergibt sich aus der Konstruktion der Subtangente  $s(t_0)$  an einer beliebigen Stelle  $t_0$  der Übergangsfunktion  $h(t)$  (s. Bild 4.3). Aus der Gleichung für die Tangente an die Übergangsfunktion im Zeitpunkt  $t = t_0$

$$h_T(t) = h(t_0) + \dot{h}(t_0)(t - t_0) \quad (4.6)$$

mit

$$h(t_0) = 1 - e^{-t_0/T_1}$$

$$\dot{h}(t_0) = \frac{1}{T_1} e^{-t_0/T_1}, \quad h(t) = \frac{h(t) - h(0)}{h(\infty) - h(0)}$$

und deren Schnittpunkt  $t_s$  mit der Asymptote  $h(\infty) = 1$  erhält man

$$h_T(t_s) = 1 = 1 - e^{-t_0/T_1} + \frac{t_s - t_0}{T_1} e^{-t_0/T_1} \quad (4.7)$$

und daraus für die Subtangente

$$s(t_0) = t_s - t_0 = T_1. \quad (4.8)$$

Die Beziehung von Gl. (4.8) gilt auch für unnormierte Übergangsfunktionen von  $P$ - $T_1$ - und  $T_1$ - $T_{D1}$ -Gliedern.

Für die Parameterbestimmung des  $P$ - $T_1$ - $T_{D1}$ -Systems gilt

Verstärkung  $K$ : nach Gl. (4.5).

Zeitkonstante  $T_1$ : aus der Subtangente an der Stelle  $t_0$  (Bild 4.5).

Vorhaltzeitkonstante  $T_{D1}$ : Aus Gl. (4.3) erhält man für den Anfangswert

$$x(0) = u_0 K \frac{T_{D1}}{T_1}. \quad (4.9)$$

Damit kann die Vorhaltzeitkonstante  $T_{D1}$  aus

$$T_{D1} = T_1 h(0) = T_1 \frac{x(0)}{u_0} \quad (4.10)$$

bestimmt werden (Bild 4.5).

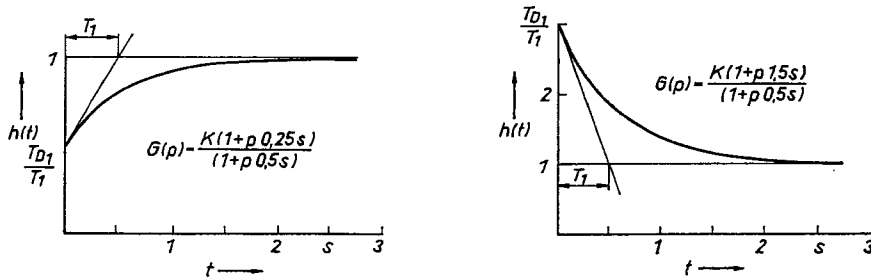


Bild 4.5. Auswertung der Übergangsfunktionen eines  $P-T_1-T_{D1}$ -Systems

#### 4.2.1.2. Modellbestimmung von $P-T_n-T_c$ -Systemen

Hat die Übergangsfunktion  $h(t)$  einen Wendepunkt, so muß eine Approximation durch eine  $P-T_n-T_c$ -Struktur,  $n = 2$  vorgenommen werden. Die Bestimmung der Parameter

- Verstärkung  $K$  (analog zu Abschn. 4.1.3)
- Totzeit  $T_t$  (Bild 4.6)

erfolgt für alle Verfahren und Modellstrukturen gleich.

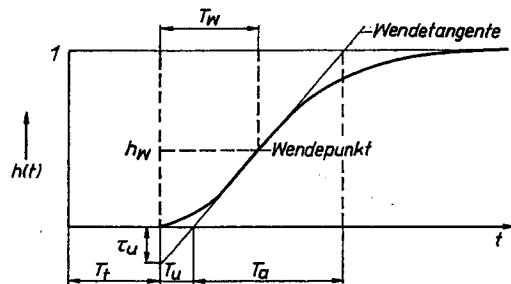


Bild 4.6  
Bestimmung der Kenngrößen  
der Übergangsfunktion  
eines  $P-T_n-T_c$ -Systems

Im Rahmen dieses Buches sollen zur Struktur- und Parameterermittlung folgende bewährte Modellansätze verwendet werden:

1. Approximation durch zwei unterschiedliche Zeitkonstanten; s. Gl. (4.11)
2. Approximation durch  $n$  gleiche Zeitkonstanten; s. Gl. (4.12)
3. Approximation durch  $n$  harmonisch gestaffelte Zeitkonstanten; s. Gl. (4.17).

Mit diesen drei Strukturen kann das Verhalten vieler Systeme hinreichend genau beschrieben werden.

#### Approximation durch zwei unterschiedliche oder $n$ gleiche Zeitkonstanten

Das von Strejc [4.1] entwickelte Verfahren gestattet die Approximation des Systems durch

$$\text{Modell I} \quad G(p) = \frac{K e^{pT_t}}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)} \quad (4.11)$$

$$\text{Modell II} \quad G(p) = \frac{K e^{pT_t}}{(1 + pT')^n} \quad (4.12)$$

Die Entscheidung über die Wahl der jeweiligen Modellstruktur wird auf der Grundlage der Koordinaten  $T_w$  und  $h_w$  des Wendepunktes sowie der Werte von  $\tau_u$ ,  $T_u$  und  $T_a$ , die sich aus der Tangente durch den Wendepunkt gemäß Bild 4.6 ergeben, getroffen.

Danach wird entsprechend den Werten in Tafel 4.1 der in Gl. (4.11) oder in Gl. (4.12) angegebene Modelltyp gewählt.

| Modelltyp | $h_w$        | $\tau_u$     |
|-----------|--------------|--------------|
| I         | $\leq 0,264$ | $\leq 0,104$ |
| II        | $> 0,264$    | $> 0,104$    |

Tafel 4.1  
Grenzen der Wendepunktparameter  
zur Wahl des Modelltyps

Die Parameter  $T_1$  und  $T_2$  des Modells I werden entsprechend Bild 4.7 aus den Kenngrößen  $h(t_{0,7})$ ,  $T_{0,7}$ ,  $T_{0,7/4}$  und  $h(t_{0,7/4})$  bestimmt.

Nach Untersuchungen von [4.1] ist der Wert  $h(t_{0,7}) = 0,7$  (Bild 4.7) nahezu unabhängig vom Verhältnis  $T_2/T_1$  und stark abhängig von der Summenzeitkonstante. Es gilt:

$$T_{0,7} = 1,2 (T_1 + T_2) \quad \text{mit einem Fehler } \leq 1,7\%. \quad (4.13)$$

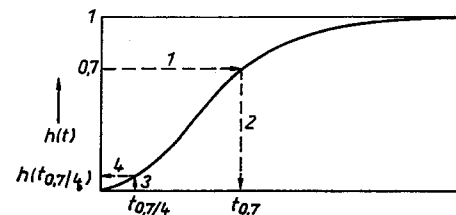


Bild 4.7  
Bestimmung der Kenngrößen  $t_1$  und  $h(t_2)$   
der Übergangsfunktion eines  $P-T_2$ -Systems

Auf der anderen Seite ist der Funktionswert  $h(t_{0,7/4})$  maximal abhängig vom Verhältnis  $T_2/T_1$ . Mit (4.11) findet man

$$T_1 = \frac{t_{0,7}}{1,2 (1 + T_2/T_1)} \quad (4.14)$$

Das Verhältnis  $T_2/T_1$  wird aus Tafel 4.2 entsprechend dem Wert  $h(t_{0,7/4})$  ermittelt.

Ist das Zeitkonstantenverhältnis  $T_1/T_2$  groß, wird der Verlauf der Übergangsfunktion  $h(t)$  für größere Zeit fast ausschließlich durch die Zeitkonstante  $T_1$  bestimmt, da der

| $h(t_{0,7/4})$ | $T_2/T_1$ |
|----------------|-----------|
| 0,260          | 0         |
| 0,200          | 0,1       |
| 0,174          | 0,2       |
| 0,150          | 0,3       |
| 0,135          | 0,4       |
| 0,131          | 0,5       |
| 0,126          | 0,6       |
| 0,125          | 0,7       |
| 0,124          | 0,8       |
| 0,123          | 0,9       |
| 0,123          | 1         |

Tafel 4.2  
Ermittlung des Verhältnisses  $T_2/T_1$

durch die Zeitkonstante  $T_2$  beeinflusste Teilvorgang bereits abgeklungen ist. Dies wird sofort bei der Betrachtung der Gleichung für die Übergangsfunktion  $h(t)$  deutlich. Es gilt für diesen Modelltyp:

$$h(t) = 1 - h_1(t) + h_2(t) \quad (4.15)$$

mit

$$h_1(t) = \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1}, \quad h_2(t) = \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}.$$

Für  $t > (2 \dots 5) T_2$ , d.h. im Endbereich der Übergangsfunktion, ist nur noch der Einfluß von  $h_1(t)$ , d.h. der Zeitkonstanten  $T_1$ , vorhanden. Damit ergibt sich eine zweite einfache Möglichkeit der Bestimmung beider Zeitkonstanten in folgenden Schritten:

1. Ermittlung von  $T_1 + T_2$  entsprechend Gl. (4.13)
2. Ermittlung von  $T_1$  aus der Subtangente für größere Zeiten  $t$  entsprechend Abschnitt 4.2.1.1.

Liegen die Parameter  $\tau_u$  und  $h_w$  des Wendepunktes im Wertebereich für das Modell II, so sind die Parameter  $n$  und  $T'$  aus Gl. (4.12) zu bestimmen. Für den Fall von  $n$  gleichen Zeitkonstanten wurde bewiesen, daß der Ordinatenwert  $\tau_u$  von der Ordnungszahl  $n$  abhängt. Damit gilt die Beziehung  $n = f(\tau_u)$ , die in Tafel 4.3 dargestellt ist.

Tafel 4.3. Kenngrößen der Übergangsfunktion für P-T<sub>n</sub>-Systeme (n gleiche Zeitkonstanten)

| $n$ | $\tau_u$ | $h_w$ | $T_w/T'$ | $T_u/T'$ | $T_a/T'$ |
|-----|----------|-------|----------|----------|----------|
| 1   | 0        | 0     | 0        | 0        | 1        |
| 2   | 0,104    | 0,264 | 1        | 0,282    | 2,718    |
| 3   | 0,218    | 0,323 | 2        | 0,805    | 3,695    |
| 4   | 0,319    | 0,353 | 3        | 1,425    | 4,463    |
| 5   | 0,410    | 0,371 | 4        | 2,100    | 5,119    |
| 6   | 0,493    | 0,384 | 5        | 2,811    | 5,699    |
| 7   | 0,570    | 0,394 | 6        | 3,549    | 6,226    |
| 8   | 0,642    | 0,401 | 7        | 4,307    | 6,711    |

Die Zeitkonstante  $T'$  wird für ein gewähltes  $n$  entsprechend Tafel 4.3 aus den Kenngrößen  $T_u/T'$ ,  $T_w/T'$  oder  $T_a/T'$  (s. Bild 4.6) ermittelt. Die nicht für die Bestimmung von  $n$  benutzten Kenngrößen können zur Kontrolle bzw. Korrektur verwendet werden. Die in Tafel 4.3 dargestellten Zusammenhänge sind durch analytische Berechnung aus vorgegebenem bekanntem Systemverhalten gewonnen worden [4.1].

Für die Übergangsfunktion  $h(t)$  des Systems von Gl. (4.12) erhält man den Ausdruck

$$h(t) = 1 - \left[ \sum_{a=0}^{n-1} \frac{(t/T)^a}{a!} \right] e^{-t/T'}. \quad (4.16)$$

Aus der Wendetangentenkonstruktion erhält man dann u. a. folgende Beziehungen, die zahlenmäßig für  $n = 1 \dots 10$  in Tafel 4.3 dargestellt sind:

$$T_a/T' = \frac{(n-2)!}{(n-1)^{n-2}} e^{n-1},$$

$$T_u/T' = n - 1 - \frac{(n-2)!}{(n-1)^{n-2}} \left[ e^{n-1} \sum_{a=0}^{n-1} \frac{(n-1)^a}{a!} \right].$$

Da in praktischen Fällen in der Regel das System ungleiche Zeitkonstanten besitzt, liegen die Werte für die Kenngrößen  $\tau_u$  und  $h_w$  zwischen den in Tafel 4.3 angegebenen. In diesen Fällen ist die Ordnung  $n$  zu wählen, die den Werten  $\tau_u$  bzw.  $h_w$  am nächsten ist.

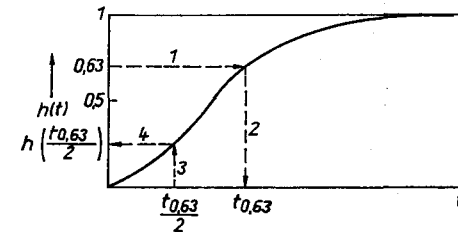


Bild 4.8  
Bestimmung der Kenngrößen  
der Übergangsfunktion  
für ein P-T<sub>n</sub>-System  
(gestaffelte Zeitkonstanten)

#### Approximation durch ein Modell mit harmonisch gestaffelten Zeitkonstanten

Kann mit dem Modell von Gl. (4.11) bzw. Gl. (4.12) keine ausreichende Approximation des Systemverhaltens erreicht werden, ist eine stärkere Staffelung der Zeitkonstanten des Systems zu vermuten. Ein Modell, das sich leicht beschreiben läßt und zu einem einfachen Auswerteverfahren führt, wurde von Radtke [4.2] entwickelt. Das Modell hat die Form

$$G(p) = \frac{K}{\prod_{j=1}^n \left( 1 + p \frac{T'_j}{T_j} \right)}. \quad (4.17)$$

Es wurde nachgewiesen, daß bei diesem Modell zwischen der Zeit  $t_{0,63}$  (Bild 4.8) und der Summenzeitkonstante  $T_z$  ein Zusammenhang der Form

$$t_{0,63} = T_z (1,045 \pm 0,045) \quad (4.18)$$

besteht. Mit

$$T_z = \sum_{j=1}^n T_j = T' \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

folgt für die Bestimmung der Zeitkonstante  $T'$

$$T' = \frac{1}{1,045 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}} t_{0,63} = D(n) t_{0,63}. \quad (4.19)$$

Für die Ermittlung der Ordnungszahl  $n$  erwies sich der Funktionswert  $h(t_{0,63}/2)$  der Übergangsfunktion als sehr geeignet (Bild 4.8). In Tafel 4.4 sind die benötigten Kenngrößen für dieses Modell dargestellt.

In Analogie zu dem von Radtke für das Modell mit gestaffelten Zeitkonstanten entwickelten Verfahren wurde von Sporer [4.3] ein Auswerteverfahren zur Bestimmung der Parameter eines Modells mit  $n$  gleichen Zeitkonstanten Gl. (4.12) entwickelt. Es umgeht die häufig schwierige Bestimmung des Wendepunktes der Übergangsfunktion.

Ausgehend von Gl. (4.18) gilt für gleich große Zeitkonstanten

$$T' = \frac{1}{1,045n} t_{0,63} = D'(n) t_{0,63}.$$

Zur Bestimmung der Ordnung  $n$  wird ebenfalls der Funktionswert  $h(t_{0,63}/2)$  verwendet, der in Tafel 4.4 als Funktion von  $n$  für diesen Modelltyp dargestellt ist.

| n  | Modell I<br>$h(t_{0,63/2})$ | $D(n)$ | Modell II<br>$h(t_{0,63/2})$ | $D'(n)$ |
|----|-----------------------------|--------|------------------------------|---------|
| 1  | 0,392                       | 0,957  | 0,392                        | 0,957   |
| 2  | 0,291                       | 0,478  | 0,299                        | 0,638   |
| 3  | 0,224                       | 0,319  | 0,242                        | 0,522   |
| 4  | 0,176                       | 0,239  | 0,202                        | 0,459   |
| 5  | 0,139                       | 0,191  | 0,173                        | 0,419   |
| 6  | 0,112                       | 0,159  | 0,149                        | 0,391   |
| 7  | 0,089                       | 0,137  | 0,129                        | 0,368   |
| 8  | 0,072                       | 0,119  | 0,116                        | 0,352   |
| 9  | 0,058                       | 0,106  | 0,103                        | 0,338   |
| 10 | 0,047                       | 0,095  | 0,093                        | 0,326   |

Weitere sehr umfassend ausgearbeitete Methoden zur Approximation von Übergangsfunktionen sind die *Zeitprozentmethode* von *Schwarze* [4.4] und die *Momentenmethode* von *Simoju* [4.5]. Ihre praktische Anwendung ist z. Z. nicht mehr sehr groß.

#### 4.2.1.3. Modellbestimmung von I<sub>1</sub>-T<sub>n</sub>-T<sub>i</sub>-Systemen

Für I<sub>1</sub>-T<sub>n</sub>-T<sub>i</sub>-Systeme sind für die folgenden Modelle:

$$\begin{aligned} \text{Modell I} \quad G(p) &= \frac{K_I}{p(1+pT')^n} \quad (4.20) \\ \text{Modell II} \quad G(p) &= \frac{K_I}{p \prod_{j=1}^n \left(1 + p \frac{T'_j}{T_j}\right)} \quad (4.21) \end{aligned}$$

von *Schwarze* [4.4] und *Sponer* [4.3] Approximationsregeln aus der Sprungantwort entwickelt worden. Die Totzeit  $T_i$  wird für beide Verfahren als erster Parameter wieder abgespalten (Bild 4.9).

Die Approximation des I<sub>1</sub>-T<sub>n</sub>-Systems durch ein Modell mit  $n$  gleichen Zeitkonstanten (Modell I) erfolgt in den Schritten

- Ermittlung von  $K_I = \tan \alpha / u_0$  und  $T_z = nT'$  (Bild 4.9),
- Bestimmung der Ordnung  $n$  aus  $x(T_z)/(K_I T_z u_0)$  (Tafel 4.5),
- Bestimmung der Zeitkonstanten  $T' = D_1(n) T_z$ ;  $D_1(n)$  aus Tafel 4.5.

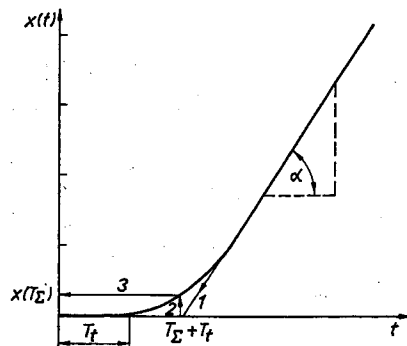


Bild 4.9  
Bestimmung der Kenngrößen  
der Sprungantwort für ein I<sub>1</sub>-T<sub>n</sub>-T<sub>i</sub>-System

Für die Approximation des Systems mit gestaffelten Zeitkonstanten (Modell II) werden die gleichen Schritte durchlaufen, wobei für die Faktoren  $D_1(n)$  und  $x(T_z)/(K_I T_z u_0)$  entsprechend Tafel 4.5 andere Werte einzusetzen sind.

| n | Modell I<br>$\frac{x(T_z)}{T_z K_I u_0}$ | $D_1(n)$ | Modell II<br>$\frac{x(T_z)}{T_z K_I u_0}$ | $D_1(n)$ |
|---|------------------------------------------|----------|-------------------------------------------|----------|
| 1 | 0,368                                    | 1,000    | 0,368                                     | 1,000    |
| 2 | 0,281                                    | 0,666    | 0,271                                     | 0,500    |
| 3 | 0,241                                    | 0,545    | 0,224                                     | 0,333    |
| 4 | 0,218                                    | 0,480    | 0,195                                     | 0,250    |
| 5 | 0,202                                    | 0,438    | 0,174                                     | 0,200    |
| 6 | 0,190                                    | 0,408    | 0,161                                     | 0,167    |

#### 4.2.1.4. Bestimmung diskreter Werte des Frequenzgangs $G(j\omega)$ aus der Übergangsfunktion

Bei dieser von *Unbehauen* [4.7] vorgeschlagenen Methode wird die im Bild 4.10 dargestellte Übergangsfunktion  $h(t)$  durch eine Summe von Geradenstücken  $\tilde{h}_i(t)$  angenähert. Damit gilt für die approximierte Übergangsfunktion  $\tilde{h}(t)$ :

$$\tilde{h}(t) = h_0 + \sum_{i=0}^n \tilde{h}_i(t) \quad (4.22)$$

mit

$$\tilde{h}_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_i \\ \frac{b_i}{T} (t - t_i) & \text{für } t \geq t_i \end{cases}$$

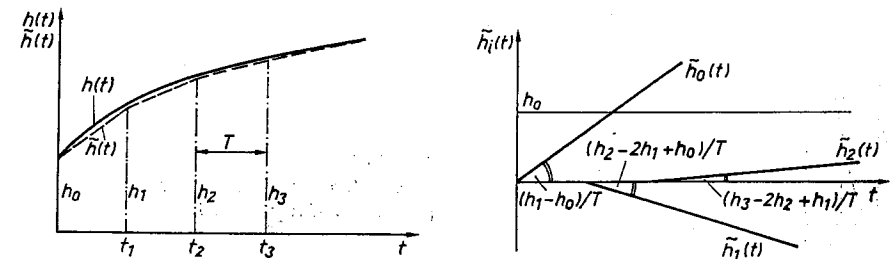


Bild 4.10. Prinzip der Zerlegung der Übergangsfunktion  $h(t)$

Die Faktoren  $b_i$ , die die Differenz der Steigungen zwischen zwei Abschnitten ausdrücken, werden aus den Gleichungen

$$\frac{b_i}{T} = \begin{cases} (h_1 - h_0)/T & \text{für } i = 0 \\ (h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1})/T & \text{für } i > 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

bestimmt. Für die Übertragungsfunktion  $G(p)$  der angenäherten Übergangsfunktion  $\tilde{h}(t)$  gilt dann

$$\tilde{G}(p) = h_0 + \frac{1}{pT} \sum_{i=0}^n b_i e^{-p t_i} \quad (4.24)$$

Soll der Frequenzgang  $\tilde{G}(j\omega_l)$  für die Frequenz  $\omega_l$  ermittelt werden, wird  $p = j\omega_l$  gesetzt, und man erhält

$$\tilde{G}(j\omega_l) = h_0 - \frac{1}{T\omega_l} \sum_{i=0}^n b_i \sin(iT\omega_l) - \frac{1}{T\omega_l} \sum_{i=0}^n b_i \cos(iT\omega_l); \quad l = 1, 2, \dots, k. \quad (4.25)$$

Die Genauigkeit der Approximation steigt mit der Anzahl der Stützstellen. Zufriedenstellende Ergebnisse liefert das Verfahren schon für den Bereich  $20 < n < 30$ .

Bezüglich der Modellstruktur kann es auch auf Systeme mit konjugiert komplexen Polen (Schwingungsglieder) und mit integralem Verhalten angewendet werden.

#### 4.2.2. Modellbestimmung anhand von Kenngrößen der Impulsantworten bzw. der Gewichtsfunktionen

Ist die Aufprägung von Sprungfunktionen auf das System nicht zweckmäßig (z. B. bei I-Gliedern, Gefährdung der Lebensfunktion des Systems), wird häufig ein Impuls als Testsignal verwendet. Das Problem dieses Testsignals liegt in der Realisierungsmöglichkeit des „idealen Impulses“, d. h. Amplitudenwert  $\Rightarrow \infty$ , Impulsbreite  $\Rightarrow 0$ . Deshalb werden in den folgenden Abschnitten Verfahren angegeben, die sowohl von den idealen als auch von den realen Realisierungsmöglichkeiten des Impulses ausgehen.

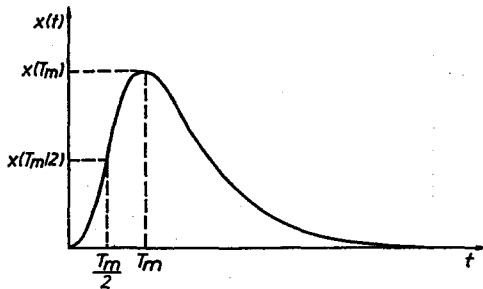


Bild 4.11  
Kenngrößen der Impulsantwort  
(n gleiche Zeitkonstanten)

##### 4.2.2.1. Auswertung von Impulsantworten bei idealem Eingangssignal (Dirac-Impuls)

Für den Fall, daß das Eingangssignal als Dirac-Impuls angesehen werden kann, wurde von Werner [4.8] für den Modellansatz

$$G(p) = \frac{K}{(1 + pT')^n} \quad (4.26)$$

ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Parameter  $n$  und  $T'$  entwickelt. Als Grenzwert für die Impulsbreite  $\Delta T$  gilt

$$\Delta T \leq 0,1T'.$$

Aus den Kennwerten der Impulsantwort  $T_m$ ,  $T_m/2$ ,  $x(T_m)$  und  $x(T_m/2)$  (Bild 4.11) werden entsprechend Tafel 4.6 die Parameter des Modells in Gl. (4.26) ermittelt. Die einzelnen Schritte sind folgende:

- Aus dem Verhältnis  $x(T_m)/x(T_m/2)$  wird die Ordnung  $n$  bestimmt.
- Bei bekannter Ordnung  $n$  folgt aus  $T_m/T'$  die Zeitkonstante  $T'$ .
- Aus  $T'x(T_m)/u_0K$  folgt bei bekannter Fläche des Impulses  $u_0 = A = 1$  der Verstärkungsfaktor  $K$ .

Bei Impulsen mit einer Impulsbreite von  $\Delta T > 0,1T'$  werden die Kennwerte vom Verhältnis  $\Delta T/T'$  abhängig. Die Auswertung wird dadurch sehr erschwert.

| $\frac{x(T_m)}{x(T_m/2)}$ | $n$ | $\frac{T_m}{T'}$ | $\frac{T'x(T_m)}{u_0K}$ |
|---------------------------|-----|------------------|-------------------------|
| 1,213                     | 2   | 1                | 0,368                   |
| 1,471                     | 3   | 2                | 0,271                   |
| 1,785                     | 4   | 3                | 0,224                   |
| 2,165                     | 5   | 4                | 0,196                   |
| 2,623                     | 6   | 5                | 0,175                   |
| 3,185                     | 7   | 6                | 0,159                   |

Tafel 4.6  
Kennwerte der Impulsantwort  
für P-T<sub>n</sub>-Systeme  
mit n gleichen Zeitkonstanten

##### 4.2.2.2. Auswertung von Impulsantworten unter Beachtung der Impulsbreite des Eingangssignals

Ist die Impulsbreite  $\Delta T > 0,1T'$ , so ist es notwendig, sie bei der Approximation zu berücksichtigen. Die Methode basiert auf der Approximation durch ein Modell mit  $n$  harmonisch gestaffelten Zeitkonstanten; s. Gl. (4.17) [4.2]. Als Kennwerte eignen sich entsprechend Bild 4.12 die Zeiten  $\Delta T$ ,  $T_m$  und  $T_{00} = t(x_0)$  sowie die Funktionswerte  $x_0 = x(\Delta T)$  und  $x_m = x(T_m)$ . Unter Annahme der Modellstruktur ergeben sich die im Bild 4.13 dargestellten Verläufe für Quotienten aus den Kennwerten. Die Bestimmung der Parameter erfolgt in den Schritten:

- Ermittlung der Kennwerte  $x_0/x_m$  und  $T/T_{00}$  entsprechend Bild 4.12.
- Ermittlung der Ordnung  $n$  aus den Kennwerten  $x_0/x_m$  und  $T/T_{00}$  im Bild 4.13 a.
- Aus Bild 4.13 b wird mit Hilfe der Größen  $x_0/x_m$  und  $n$  der Wert für  $T'/\Delta T$  entnommen und somit die Zeitkonstante  $T'$  ermittelt.
- Der Verstärkungsfaktor  $K$  wird bestimmt aus der Beziehung

$$K = \frac{1}{u_0} \frac{x_0}{\tilde{x}_0} \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_0 = (1 - e^{-T/T'})^n. \quad (4.27)$$

Eine Überprüfung der Approximation mit verschiedenen  $\Delta T$  ist in der Praxis sinnvoll.

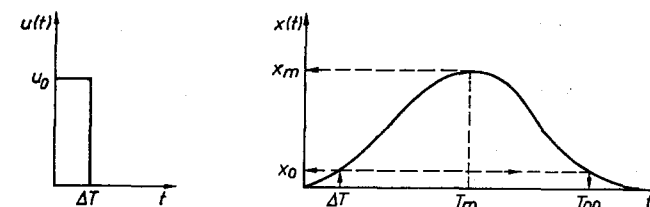


Bild 4.12  
Kenngrößen  
der Impulsantwort  
(n gestaffelte  
Zeitkonstanten)

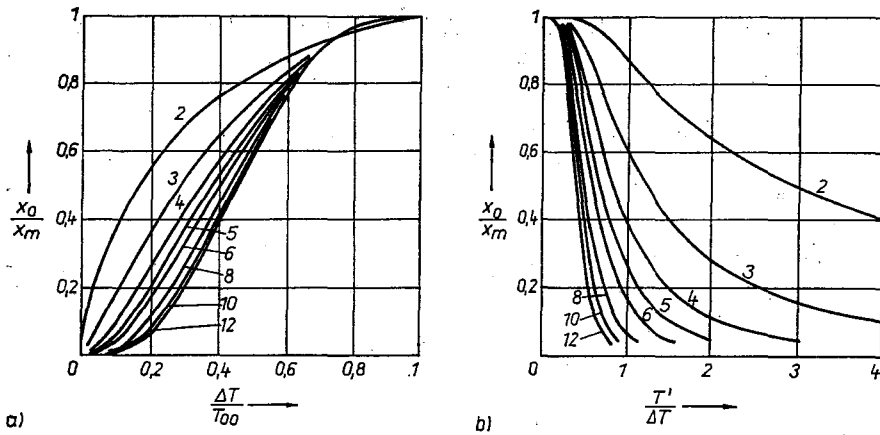


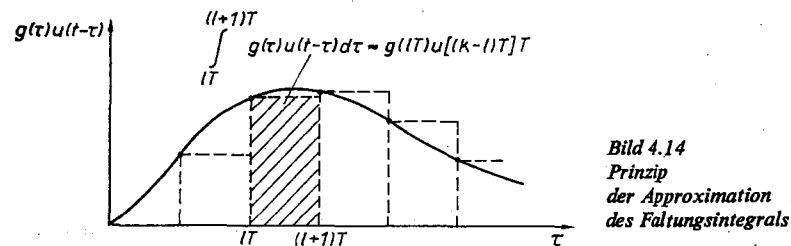
Bild 4.13. Verlauf von Quotienten der Kenngrößen aus Bild 4.12 zur Approximation von Impulsantworten

a) Diagramm zur Ermittlung der Ordnungszahl  $n$   
 b) Diagramm zur Bestimmung der Zeitkonstanten  $T'$

#### 4.2.3. Ermittlung von Stützstellen der Gewichtsfunktion aus beliebigen Eingangs- und Ausgangssignalen – Entfaltung ohne Ausgleich

Die bisher vorgestellten Verfahren sind auf geometrisch einfache Testsignale, die aktiv auf das System aufgeprägt werden müssen, beschränkt. Hat das aktiv auf das System aufgeprägte oder im normalen Betrieb anliegende Testsignal eine beliebige Form, versagen die bis jetzt vorgestellten Modellbildungsverfahren. Als ein Ausweg bietet sich die Verwendung des Faltungsintegrals an, das das Ausgangssignal  $x(t)$  über eine Integralbeziehung aus dem Produkt der Gewichtsfunktion  $g(t)$  und dem zeitverschobenen Eingangssignal ermittelt. Damit gilt mit  $u(t) = 0$  für  $t < 0$

$$x(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (4.28)$$

Bild 4.14  
Prinzip  
der Approximation  
des Faltungsintegrals

Das Problem besteht in der Auflösung der Integralgleichung nach  $g(\tau)$  bzw. nach ihren Stützstellenwerten  $g(\tau_i)$  bei bekannten Signalen  $x(t)$  und  $u(t)$ . Im einfachsten Fall kann das Integral mit Hilfe der Rechteckregel aufgelöst werden. Entsprechend Bild 4.14 gilt für Systeme mit einem Gedächtnis von  $(r-1)T$ , d. h.  $g(iT) = 0$  für  $i = r$ , für das Ausgangssignal

$$x(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{iT}^{(i+1)T} g(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (4.29)$$

Verwendet man nur die diskreten Werte der Eingangs- und Ausgangssignale  $u(k-T) \triangleq u(k)$  und  $x(kT) \triangleq x(k)$ , so erhält man als Näherung für das Ausgangssignal zum Zeitpunkt  $t = kT$  die Faltungssumme

$$x(k) \approx T \sum_{l=0}^{r-1} g(l) u(k-l) \quad (4.30)$$

mit

$$t = kT, \quad \tau = lT, \quad l = 0, 1, \dots, (r-1).$$

In Matrixschreibweise erhält man für  $j$  Beobachtungen und die Anfangswerte  $x(t) = 0$ ,  $u(t) = 0$  für  $t \leq 0$

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(j) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u(1) & 0 & \dots & 0 \\ u(2) & u(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(j) & u(j-1) & \dots & u(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(r-1) \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_x \quad \underbrace{\hspace{10em}}_U \quad \underbrace{\hspace{10em}}_g$

Damit ergibt sich als Systembeschreibung

$$x = T U g. \quad (4.31)$$

Die Auflösung von Gl. (4.31) nach dem Vektor der Stützstellen  $g$  wird als *Entfaltung* bezeichnet und ergibt, wenn die Matrix  $U$  invertierbar ist,

$$g = \frac{1}{T} U^{-1} x. \quad (4.32)$$

Wird ein bestimmtes Testsignal  $u(t)$  immer verwendet, kann die Matrix  $U^{-1}$  einmal berechnet und für weitere Untersuchungen abgespeichert werden.

Der Fehler der Approximation hängt wesentlich von der Abtastweite  $T$  ab. Sie soll so gewählt werden, daß die Gewichtsfunktion  $g(t)$  durch 20 bis 40 Stützstellen beschrieben wird. Nach der Ermittlung der Stützstellen kann dann eine Approximation durch ein parametrisches Modell mit den im Abschnitt 4.2.2 vorgestellten Methoden erfolgen.

Bei dieser Methode ist zu beachten, daß das Testsignal  $u(t)$  ein für die Ermittlung der Stützstellenwerte der Gewichtsfunktion  $g(IT)$  günstiges Amplitudenspektrum („ideal weißes Rauschen“) besitzt und daß keine Störung  $z(t)$  auftreten darf. Ist eine nicht zu vernachlässigende Störung vorhanden, muß eine Schätzung mit der Methode der Entfaltung mit Fehlerausgleich (s. Abschn. 6.2) durchgeführt werden.

#### 4.3. Ein-/Ausgangs-Modelle im Frequenzbereich

Die Auswertung von Frequenzgangmessungen liefert, da alle Frequenzbereiche des Systems im Gegensatz zu den im Abschnitt 4.2 verwendeten Testsignalen mit der gleichen Energie angeregt werden, Modelle mit hoher Genauigkeit. Außerdem sind die Verfahren, die durch ein Korrelationsprinzip den Frequenzgang ermitteln, relativ unempfindlich gegen Störungen. Der Nachteil der Verfahren liegt in den langen Meßzeiten im tief-frequenten Bereich des Systems. Einen Ausweg bilden kombinierte Methoden, z. B. die

Auswertung von Übergangsfunktion (für die den tieffrequenten Bereich beschreibenden Parameter) und Frequenzgang (für die den hochfrequenten Bereich beschreibenden Parameter) [1.27, 1.46].

Außerdem ist zu beachten, daß die Frequenzen  $\omega_i$  des periodischen Testsignals wieder über den „interessierenden Frequenzbereich“ des Systems verteilt sein müssen, um die Struktur und die Parameter eines analytischen Frequenzgangmodells mit ausreichender Genauigkeit zu ermitteln. Gleichzeitig muß bei allen Meßverfahren bedacht werden, daß der Frequenzgang  $G(j\omega)$  der Quotient der komplexen Amplitude von Ausgangs- zu sinusförmigem Eingangssignal im stationären Zustand ist. Das bedeutet, daß bei jeder neugewählten Frequenz  $\omega_i$  der Einschwingvorgang zur Auswertung abgewartet werden muß, was besonders im tiefen Frequenzbereich zu erheblichen Meßzeiten, Kosten oder Belastungen führen kann (Bild 4.15). Der Ausweg aus diesem Problem wurde oben aufgezeigt. Für die Wahl der Frequenzen des Testsignals hat sich ein konstanter Quotient benachbarter Frequenzen  $\omega_{i+1}/\omega_i$  bewährt, weil dann der interessierende Frequenzbereich im Bode-Diagramm durch Meßwerte mit stets gleichem Abstand beschrieben werden kann.

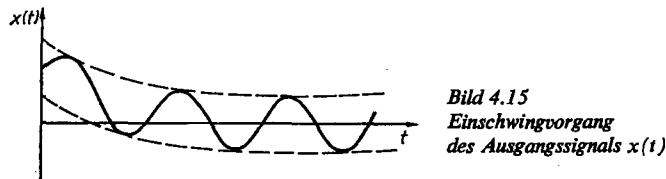


Bild 4.15  
Einschwingvorgang  
des Ausgangssignals  $x(t)$

In den folgenden Abschnitten soll auf einige typische Methoden zur Ermittlung des Frequenzgangs (Abschn. 4.3.1), auf die Approximation des Frequenzgangs durch ein parametrisches Modell in Form eines Zeitkonstantenmodells (Abschn. 4.3.2) und auf die Approximation der Ortskurve durch ein Polynommodell (Abschn. 4.3.3) näher eingegangen werden. Auf eine große Anzahl weiterer Verfahren kann an dieser Stelle nur verwiesen werden [1.37, 1.46].

#### 4.3.1. Methoden zur Aufnahme des Frequenzgangs $G(j\omega)$

Die entwickelten Methoden haben das Ziel, die Komponenten des Frequenzgangs  $G(j\omega)$  in einer der Formen

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.33)$$

zu ermitteln. Werden Phasenminimumsysteme vorausgesetzt, kann die Messung des Frequenzgangs auf die Bestimmung von  $|G(j\omega)|$  beschränkt werden, da aus dem Amplitudenfrequenzgang  $|G(j\omega)|$  der Phasenfrequenzgang konstruiert werden kann.

##### 4.3.1.1. Synchronaufzeichnungsverfahren

Aus den synchron entsprechend Bild 4.16 registrierten Eingangs- und Ausgangssignalen

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \text{und} \quad x(t) = B \sin(\omega t + \varphi_x)$$

kann der Betrag des Frequenzgangs

$$|G(j\omega)| = B/A \quad (4.34)$$

und der Phasenfrequenzgang

$$\varphi(\omega) = \varphi_x - \varphi_u = \omega(t_x - t_u) = \omega t_\varphi$$

ermittelt werden. Als günstiger Frequenzbereich für diese Synchronaufzeichnung hat sich  $10^{-5} \text{ s}^{-1} < f < 10^{-1} \text{ s}^{-1}$  erwiesen. Problematisch ist die Bestimmung kleiner Phasenverschiebungen.

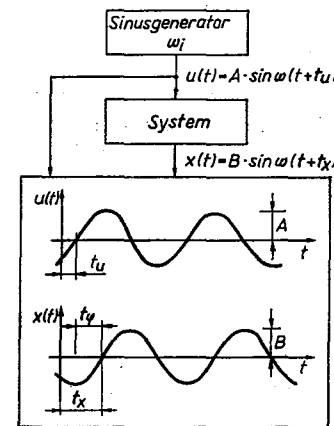


Bild 4.16. Schema des Synchronaufzeichnungsverfahrens

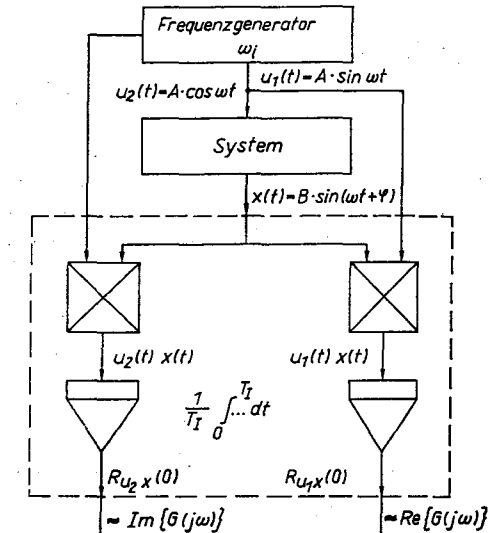


Bild 4.17. Schema des Komponentenverfahrens

##### 4.3.1.2. Komponentenverfahren

Das Komponentenverfahren hat aufgrund der Möglichkeit der sehr feinen Unterteilung eines großen Frequenzbereichs  $10^4 \text{ s}^{-1} < f < 10^2 \text{ s}^{-1}$  und der guten Störunterdrückung durch die Anwendung des Korrelationsprinzips die breiteste Anwendung gefunden. Das Schema dieses Verfahrens ist im Bild 4.17 dargestellt. Der Realteil des Frequenzgangs wird dabei in dem einen Kanal durch die Multiplikation des Systemausgangssignals mit dem Eingangssignal, der Imaginärteil in dem anderen Kanal durch die Multiplikation des Ausgangssignals mit dem um  $90^\circ$  verschobenen Testsignal ermittelt.

Der Realteil ergibt sich aus (s. Abschn. 3.2.2.2)

$$\begin{aligned} R_{u_1x}(0) &= \frac{1}{T_I} \int_0^{T_I} AB \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{AB}{2T_I} \int_0^{T_I} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] dt \end{aligned} \quad (4.35)$$

und für genügend große  $T_I$

$$\begin{aligned} R_{u_1x}(0) &= \frac{AB}{2} \cos \varphi = \frac{A^2}{2} |G(j\omega)| \cos \varphi \\ R_{u_2x}(0) &= \frac{A^2}{2} \text{Re} \{G(j\omega)\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Für den Imaginärteil erhält man analog

$$\begin{aligned} R_{u_2x}(0) &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} AB \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{AB}{2T_1} \int_0^{T_1} \sin \omega + \sin(2\omega t + \varphi) dt. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Für große  $T_1$  wird

$$R_{u_2x}(0) = \frac{A^2}{2} |G(j\omega)| \sin \varphi = \frac{A^2}{2} \operatorname{Im} \{G(j\omega)\}. \quad (4.38)$$

Ein Störsignal  $z(t)$  wird durch das Korrelationsprinzip beseitigt, wenn in der Störung keine periodischen Komponenten der Testsignalfrequenz enthalten sind. Für hinreichend große Mittelungszeiten  $T_1$  gehen die Anteile der Korrelationsfunktion, die zusätzlich in den Gln. (4.36) und (4.37) auftreten,

$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} z(t) A \sin \omega t dt \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} z(t) A \cos \omega t dt,$$

gegen Null. Bei periodischen Störsignalen wird der Fehler des Frequenzgangs um so größer, je näher Störsignalfrequenz und Testsignalfrequenz zusammenliegen. Weiterführende Betrachtungen zu diesem Problem und zum Einfluß einer endlichen Mittelungszeit auf die Genauigkeit der Frequenzgangbestimmung sind in [1.37, 1.46, 4.9] enthalten.

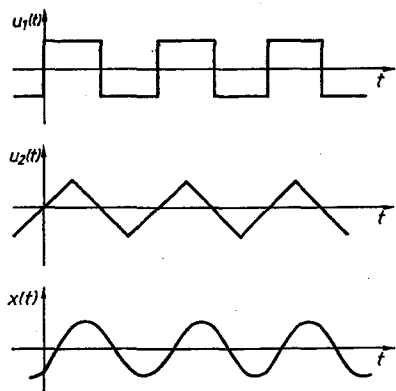


Bild 4.18  
Verlauf von rechteck- und dreieckförmigen Testsignalen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  und Verlauf der Grundwelle des Ausgangssignals  $x(t)$

#### 4.3.1.3. Frequenzgangmessung mit Rechteck- und Dreieckswellen

Die Ermittlung des Frequenzgangs aus der Analyse des Ausgangssignals bei aufgeprägten Rechteck- oder Dreieckswellen hat die Vorteile der einfachen Realisierbarkeit und teilweise der Erhöhung des Störabstands. So besitzt die Grundwelle des Rechtecksignals einer Amplitude  $u_0$  die Amplitude  $u_0 \cdot 4/\pi$  (s. Abschn. 3.1.2), d.h., bei gleicher Aussteuerung wird der Störabstand gegenüber dem sinusförmigen Testsignal um den Faktor 1,27 verbessert. Bei der Verwendung eines Dreieckssignals einer Amplitude  $u_0$  besitzt die Grundwelle die Amplitude  $u_0 \cdot 8/\pi^2$ , d.h., der Störabstand wird um den Faktor 0,81 verschlechtert.

Für die Rechteckwelle der Amplitude  $u_0$  (Bild 4.18) gilt für die Fourier-Zerlegung entsprechend Abschnitt 3.1.2, Tafel 3.1, die Beziehung

$$u(t) = \frac{4}{\pi} u_0 \left\{ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right\}. \quad (4.39)$$

Das Ausgangssignal lautet entsprechend

$$x(t) = \frac{4}{\pi} u_0 \left\{ |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) + \frac{1}{3} |G(j\omega)| \sin(3\omega t + \varphi(3\omega)) + \dots \right\}. \quad (4.40)$$

Die Ermittlung der Amplitude der Grundwelle im Ausgangssignal erfolgt zweckmäßigerweise durch eine Fourier-Analyse mit Hilfe der im Abschnitt 3.2.3.4 vorgestellten Algorithmen durch einen Digitalrechner. Vereinfachte Verfahren für P- $T_s$ -Systeme sind in [1.40, 4.8] enthalten.

Werden Testsignale in Form von Dreieckswellen verwendet, so lautet die Fourier-Zerlegung (s. Tafel 3.1)

$$u(t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \left\{ \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t + \dots \right\}. \quad (4.41)$$

Für das Ausgangssignal gilt damit

$$x(t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \left\{ |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) - \frac{1}{9} |G(j\omega)| \sin(3\omega t + \varphi(3\omega)) + \dots \right\}. \quad (4.42)$$

Aus Gl. (4.42) ist zu erkennen, daß sich gegenüber der Rechteckwelle der Störabstand verschlechtert und daß die dritte Oberwelle um den Faktor  $\frac{1}{9}$  stärker gedämpft wird, was die Ermittlung von  $G(j\omega)$  erleichtert.

Neben diesen beiden Testsignalarten wurden sog. *Mehrfrequenzsignale* entworfen, die in einem Meßvorgang die Frequenzgangbestimmung für mehrere Frequenzen gestatten. So enthält z. B. ein in [1.40, 4.10] vorgestelltes binäres Signal neben der Grundwelle  $\omega$  die Oberwellen mit den Frequenzen  $2\omega, 4\omega, 8\omega, 16\omega$  und  $32\omega$ . Ihre Anwendung ist jedoch auch beschränkt, weil die Amplituden der Einzelschwingungen des Mehrfrequenzsignals wesentlich geringer sind als bei den bereits genannten Testsignalen und sich damit der Störabstand wesentlich verschlechtert.

Durch die Anwendung der in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden erhält man eine diskrete Folge von Frequenzgangwerten. Sie können in der komplexen  $G(j\omega)$ -Ebene (Ortskurve) oder als Amplituden- und Phasenfrequenzgang (Bode-Diagramm) [1.2, 3.1] dargestellt werden. Für viele Anwendungen ist es zweckmäßig, das in Form einer Wertefolge bzw. grafisch als Ortskurve oder Frequenzganglinien vorliegende nicht-parametrische Modell durch ein parametrisches Modell zu approximieren. Bei der Ermittlung des durch wenige Parameter zu beschreibenden parametrischen Modells muß die Struktur- und Parameterbestimmung gelöst werden. Aus diesem Grunde werden in den folgenden Abschnitten Verfahren zur Approximation des Frequenzgangs durch parametrische Modelle in Form des Zeitkonstantenmodells und des Polynommodells vorgestellt.

4.3.2. Approximation von  $G(j\omega)$  durch ein Zeitkonstantenmodell

Aus dem gemessenen Frequenzgang  $G(j\omega)$ , der oft als Amplituden- und Phasenfrequenzgang aufgetragen wird, sollen die Struktur und die Parameter eines Modells der Form

$$G(p) = K \frac{\prod_{i=1}^n (1 + pT_{Di})}{\prod_{j=1}^m (1 + pT_j)} \quad (4.43)$$

bestimmt werden. Dabei wird vom Gesamtfrequenzgang  $G(j\omega)$ , vom Amplitudenfrequenzgang  $\lg |G(j\omega)|$  oder vom Phasenfrequenzgang  $\varphi(j\omega)$  ausgegangen [4.11, 4.12]. Bei Phasenminimumsystemen sind die Verfahren, die von  $|G(j\omega)|$  ausgehen, wegen ihrer Einfachheit und Übersichtlichkeit vorteilhaft. Als Phasenminimumsystem werden solche Systeme bezeichnet, die den zu dem vorhandenen Amplitudenfrequenzgang möglichen minimalen negativen Phasenfrequenzgang für alle Frequenzen haben [1.2]. Sie besitzen keine Nullstellen in der rechten p-Halbebene, und für sie existiert eine eindeutige Zuordnung zwischen Amplituden- und Phasenfrequenzgang. Damit fallen für diese Methode alle Systeme mit Allpaß- und Laufzeitverhalten aus der weiteren Betrachtung heraus.

Deswegen kann die Ermittlung eines parametrischen Modells allein auf der Grundlage des Amplitudenfrequenzgangs erfolgen. Das Verfahren beruht auf einer Approximation des in dB über  $\lg \omega$  aufgetragenen Amplitudenfrequenzgangs durch Geraden verschiedener Neigungen. Es wird davon ausgegangen, daß der Amplitudenfrequenzgang sich aus einer Summe von Elementarkennlinien mit P-, I-, D-,  $T_1$ - $T_{D1}$ - und  $T_2^*$ -Verhalten nach der Vorschrift

$$\lg |G(j\omega)| = \sum_{i=1}^m \lg |G_i(j\omega)| \quad (4.44)$$

ergibt. Die Kennlinien der Elementarsysteme sind in Tafel 4.7 als Geraden dargestellt.

Für die Approximation gilt analog zu Gl. (4.44)

$$\lg |\tilde{G}(j\omega)| = \sum_{j=1}^n \lg |\tilde{G}_j(j\omega)| \quad (4.45)$$

Der Amplitudenfrequenzgang  $|G(j\omega)|$  sollte in folgenden Schritten approximiert werden:

1. Darstellung von  $|G(j\omega)|$  als Funktion von  $\lg \omega/\omega^*$ ;  $\omega^*$  wählbare Bezugsfrequenz.
2. Approximation von  $|G(j\omega)|$  durch Geraden mit den Neigungen

$$k^* = \frac{d \lg |G(j\omega)|}{d \lg \omega/\omega^*}; \quad k^* = \pm 0, 1, 2, \dots$$

( $k^* = -1$  entspricht der Neigung 20 dB/Dekade).

Ändert sich an einer Knickstelle  $\omega_i$  die Neigung um  $+(-)1$ , so ist eine reelle Nullstelle (reeller Pol) mit  $T_i = 1/\omega_i$  anzusetzen. Bei Änderung der Neigung um  $+(-)2$  ist ein konjugiert-komplexes Nullstellen- (Pol-) Paar vorzusehen. Hierbei ist  $\omega_0$  mit der Knickfrequenz identisch. An einfachen, weiter voneinander entfernten Knickpunkten  $\omega_i$  soll die Abweichung des asymptotischen Verlaufs (Geradenapproximation) vom exakten Verlauf, d. h.  $\lg |G(j\omega)| - \lg |\tilde{G}(j\omega)|$ ,  $+(-)3$  dB betragen (Bild 4.19).

| Systemverhalten                                                          | Approximation |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------|
| P-Verhalten<br>$G(j\omega) = K$<br>$k^* = 0$                             |               |
| I-Verhalten<br>$G(j\omega) = 1/j\omega T_I$<br>$k^* = -1$                |               |
| D-Verhalten<br>$G(j\omega) = j\omega T_D$<br>$k^* = +1$                  |               |
| $T_1$ -Verhalten<br>$G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T_1)$<br>$k^* = -1$     |               |
| $T_{D1}$ -Verhalten<br>$G(j\omega) = (1 + j\omega T_{D1})$<br>$k^* = +1$ |               |

Tafel 4.7

Geradenapproximation des Amplitudenfrequenzgangs einfacher Übertragungsfunktionen

3. Konstruktion des Verlaufs der verfeinerten Approximationskurve unter Anwendung der Korrekturtafeln aus den Bildern 4.20 und 4.21 zur Berücksichtigung der von benachbarten Knickstellen herrührenden Abweichungen nach der Vorschrift

$$\lg |\hat{G}(j\omega)| = \lg |\tilde{G}(j\omega)| + \lg |\Delta G(j\omega)| \quad (4.46)$$

mit  $\lg |\Delta G(j\omega)|$  als Korrekturwerte entsprechend den Bildern 4.20 und 4.21.

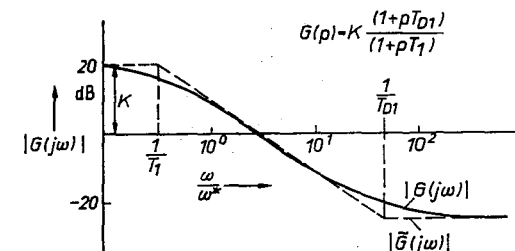


Bild 4.19

Beispiel einer Frequenzgangapproximation durch ein Zeitkonstantenmodell

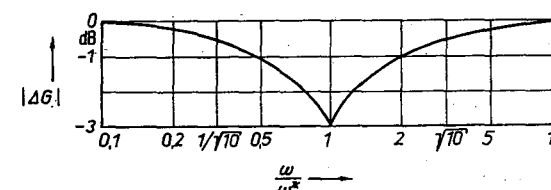


Bild 4.20

Korrekturtafel für die Geradenapproximation von Amplitudenfrequenzgängen für Trägheits- und Vorhaltglieder

4. Vergleich der Amplitudenfrequenzgänge  $\lg |G(j\omega)| - \lg |\hat{G}(j\omega)|$  und ggf. eine Korrektur der Knickfrequenzen und Rücksprung zu Punkt 2.
5. Falls die Genauigkeit der Approximation immer noch nicht ausreichend ist, muß mit dem Verfahren von Linvill in [4.12] eine weitere Verbesserung versucht werden.

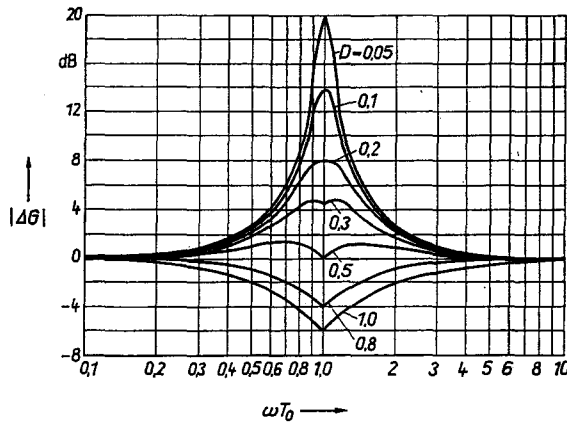


Bild 4.21  
Korrekturtafel  
für die Geradenapproximation  
von Amplitudenfrequenzgängen  
für Schwingungsglieder

Das vorgestellte Verfahren zeichnet sich durch seine einfache Handhabung und durch eine für viele Aufgaben ausreichende Güte bezüglich der Struktur- und Parameterermittlung aus. Sind jedoch höhere Genauigkeitsanforderungen zu erfüllen, sollte auf rechnergestützte Methoden zurückgegriffen werden [1.46]. Dabei muß festgestellt werden, daß die Güte dieses Verfahrens wesentlich durch die Erfahrung und das Geschick des jeweiligen Bearbeiters bestimmt wird. Diese Aussage trifft für das im folgenden Abschnitt vorgestellte Verfahren der analytischen Approximation der diskreten Frequenzgangwerte in der  $G(j\omega)$ -Ebene, d.h. der Ortskurve, nicht zu.

#### 4.3.3. Approximation von $G(j\omega)$ durch ein Polynommodell

Die Bestimmung der analytischen Beschreibung  $G(j\omega)$  eines Systems mit konzentrierten Parametern der Form

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^m \left[ 1 + \sum_{i=1}^n a_i (j\omega)^i \right]} = \frac{K}{(j\omega)^m [U(\omega) + jV(\omega)]} \quad (4.47)$$

erfordert

1. die Bestimmung des Grades  $n$  und  $m$  (d.h. der Struktur),
2. die Bestimmung der Parameter  $a_i$ .

Wird das System durch Gl. (4.47) hinreichend genau beschrieben; so können die Strukturparameter  $n$  und  $m$  aus folgenden Überlegungen gewonnen werden. Trennt man die Beschreibung des Frequenzgangs von Gl. (4.47) in die Teilfrequenzgänge

$$G_1(j\omega) = K/(j\omega)^m; \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4.48)$$

$$G_2(j\omega) = 1 / \left( 1 + \sum_{i=1}^n a_i (j\omega)^i \right); \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

so ist zu erkennen, daß bei tiefen Frequenzen das Gesamtverhalten durch  $G_1(j\omega)$  bestimmt wird:

$$\hat{G}(j\omega) \approx G_1(j\omega) = K/(j\omega)^m.$$

Im Bild 4.22 ist der Verlauf der Ortskurve für  $m = 0$  (P-Glied) bis  $m = 3$  ( $I_3$ -Glied) dargestellt. Der zweite Teilfrequenzgang  $G_2(j\omega)$  hat den Verlauf von  $T_n$ -Gliedern. Die Ortskurve durchläuft, von der reellen Achse beginnend,  $n$  Quadranten (Bild 4.23). Insgesamt gilt damit für die Strukturparameter

$m$  Anzahl der Quadranten der  $G(j\omega)$ -Ebene, die im Uhrzeigersinn zwischen der positiven reellen Achse und dem Quadranten liegt, in dem die Ortskurve mit  $\omega = 0$  beginnt (s. Bild 4.22)

$n$  Anzahl der Quadranten, die die Ortskurve berührt (s. Bild 4.23).

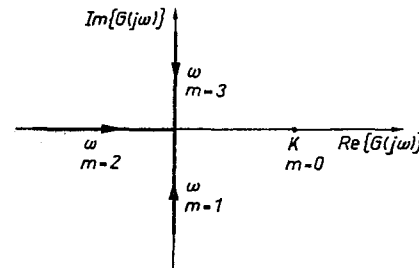


Bild 4.22. Ortskurven des Teilfrequenzgangs  
 $G_1(j\omega) = K/(j\omega)^m$

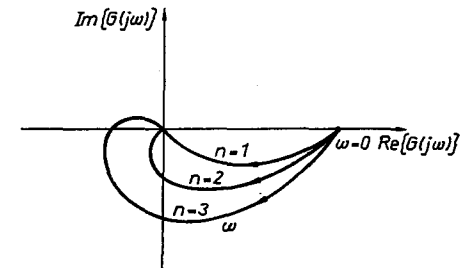


Bild 4.23. Ortskurven des Teilfrequenzgangs  
 $G_2(j\omega) = 1 / \left( 1 + \sum_{i=1}^n a_i (j\omega)^i \right)$

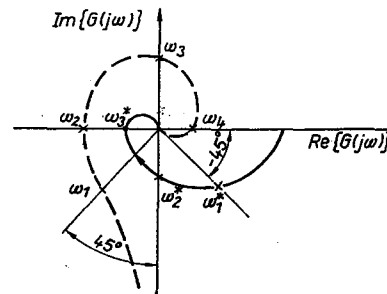


Bild 4.24  
Wahl der Interpolationspunkte  
bei dem Verfahren von Szweda  
 $\omega_i^*$  P-Verhalten  
 $\omega_i$  I-Verhalten

Das System wird dann durch das Modell gut approximiert, wenn keine wesentlichen Nullstellen im System vorhanden sind [3.1]. Nach der Festlegung der Strukturparameter  $m$  und  $n$  des Modells von Gl. (4.47) können die  $n$  Parameter  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  ermittelt werden. Die Bestimmungsgleichungen werden dadurch gefunden, daß bei  $n$  diskreten Frequenzen  $\omega_i$  die Amplituden und Phasen des gemessenen Frequenzgangs  $G(j\omega)$  mit der Approximation  $\hat{G}(j\omega)$  übereinstimmen müssen. Zu relativ einfachen Bestimmungsgleichungen gelangt man, wenn man nach Szweda [4.13] die Übereinstimmung der Phasen bei  $n$  Frequenzen  $\omega_i$  fordert. Damit sind für die Übereinstimmung zwischen dem Frequenzgang des Modells  $\hat{G}(j\omega)$  und dem des Systems  $G(j\omega)$  in  $n$  Punkten die Bedingungen

$$\phi(\omega_i) - \varphi(\omega_i) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.49)$$

zu erfüllen.

Wählt man als ersten Punkt der Ortskurve die Frequenz  $\omega_1$ , bei der erstmals  $|U(\omega)| = |V(\omega)|$ , und als weitere ( $\omega_2 \dots \omega_n$ ) die  $(n-1)$  Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, wo entweder  $U(\omega) = 0$  oder  $V(\omega) = 0$  sind, so erhält man ein System von  $n$  Gleichungen (Bild 4.24).

Für  $n = 7$  erhält man die Bestimmungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\omega_1} \frac{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_6^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_5^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_7^2}\right)} \\ a_2 &= \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_4^2} + \frac{1}{\omega_6^2} \\ a_3 &= a_1 \left( \frac{1}{\omega_3^2} + \frac{1}{\omega_5^2} + \frac{1}{\omega_7^2} \right) \\ a_4 &= \frac{1}{\omega_2^2 \omega_4^2} + \frac{1}{\omega_2^2 \omega_6^2} + \frac{1}{\omega_4^2 \omega_6^2} \\ a_5 &= \frac{1}{\omega_3^2 \omega_5^2} + \frac{1}{\omega_3^2 \omega_7^2} + \frac{1}{\omega_5^2 \omega_7^2} \\ a_6 &= \frac{1}{\omega_2^2 \omega_4^2 \omega_6^2} \\ a_7 &= a_1 \frac{1}{\omega_3^2 \omega_5^2 \omega_7^2} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Zur Bestimmung der Parameter  $a_i$  werden nur die Frequenzen  $\omega_1 \dots \omega_n$  benötigt. Für  $n < 7$  sind in den Bestimmungsgleichungen für  $a_i$  alle  $\omega_i$  mit  $i > n$  unendlich zu setzen.

Die Ermittlung des statischen Verstärkungsfaktors  $K$  erfolgt bei der angenommenen Systemstruktur von Gl. (4.47) entsprechend den Beziehungen

a)  $m = 0$

$$K = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega), \quad (4.51)$$

b)  $m > 0$

$$K = |G(j\omega_1)| \sqrt{2} \omega_1^m \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_6^2}\right).$$

Ermittlung von

$$\omega_1 \quad \text{bei} \quad \varphi(\omega_1) = -m \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

und

$$\omega_i \quad \text{bei} \quad \varphi(\omega_i) = -m \frac{\pi}{2} - (i-1) \frac{\pi}{2}; \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Die praktische Ermittlung der Frequenzen  $\omega_i$  (z. B. mit dem Komponentenverfahren) erfolgt durch Erhöhung der Testsignalfrequenz von null bis zu dem Wert, bei dem erstmalig Real- und Imaginärteil gleich sind ( $\omega_1$ ), und dann weiter, bis im Wechsel Real-

und Imaginärteil verschwinden. Die Messung ist zu beenden, wenn kein Schnittpunkt mit einer der Koordinatenachsen mehr festgestellt werden kann.

Für die Approximation des Frequenzgangs durch rationale Übertragungsfunktionen beliebiger Struktur unter Verwendung der Methode der kleinsten mittleren Fehlerquadrate (Regression) sind u. a. von Strobel [1.46] sehr leistungsfähige Verfahren für den Digitalrechner und als Handverfahren entworfen worden. Die Verfahren ermitteln bei vorgegebener Approximationsgüte automatisch die minimale Parameteranzahl.

## 4.4. Ermittlung des Zustands/Beobachter

### 4.4.1. Problemstellung

Entsprechend den Darstellungen im Abschnitt 1.4 soll in den weiteren Betrachtungen von folgender Zustandsbeschreibung des Systems ausgegangen werden:

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bu(t) \quad (4.52)$$

$$x(t) = Cq(t)$$

mit den Dimensionen der Vektoren und Matrizen

$$q(t): [n \times 1], \quad u(t): [l \times 1], \quad x(t): [m \times 1],$$

$$A: [n \times n], \quad B: [n \times l], \quad C: [m \times n].$$

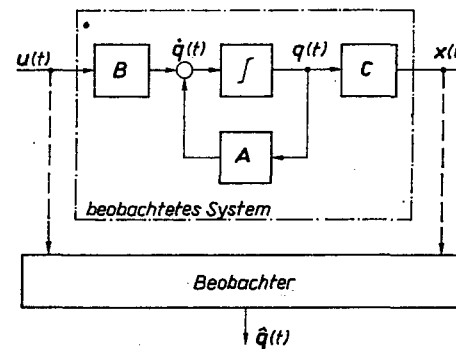


Bild 4.25  
Allgemeines Prinzip  
der Zustandsbestimmung  
durch einen Beobachter

Die Aufgabe besteht nun darin, für das durch Gl. (4.52) gegebene System, von dem die Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  bekannt sind, eine Vorschrift (Algorithmus) zu entwerfen, die die Rekonstruktion des Zustandsvektors  $q(t)$  aus dem gemessenen Eingangssignal oder aus dem gemessenen Eingangs- und Ausgangssignal entsprechend Bild 4.25 gestattet. Für die Ermittlung des Zustands ist ein zweites dynamisches System, der Zustandsbeobachter/Beobachter, zu entwerfen. Er soll so gestaltet sein, daß nach einer endlichen Einschwingzeit der durch den Beobachter ermittelte Zustand  $\hat{q}(t)$  mit dem nichtmeßbaren Zustand  $q(t)$  möglichst identisch ist.

Die Bestimmung des Zustands gewinnt immer mehr an Bedeutung, weil u. a. folgende Aufgaben gelöst werden können:

1. Gewinnung von mehr und besserer Information über den Prozeß (Bedeutung für die Sensortechnik)

2. möglicher Verzicht auf eine direkte Messung von Prozeßgrößen in den Fällen, in denen keine Meßmöglichkeit besteht, das technische Meßprinzip zu aufwendig gegenüber der rechentechnischen Lösung und das Beobachtungsprinzip zuverlässiger ist
3. Ergänzung unvollständiger Messungen
4. Ermittlung des Zustands für die Realisierung des Steuergesetzes bei Konzepten der Zustandsrückführung und Optimalsteuerung.

In den folgenden Abschnitten werden für das in Gl. (4.52) dargestellte System die Konzepte der Beobachtung des Zustands auf der Grundlage der gemessenen Eingangssignale  $u(t)$  mit einem Parallelmodell des Systems und auf der Grundlage der gemessenen Eingangs- und Ausgangsgrößen mit einem erweiterten Systemmodell (Luenberger-Beobachter) dargelegt. Dabei wird in allen Fällen von der kontinuierlichen Darstellung ausgegangen und dann zur diskontinuierlichen Betrachtung übergegangen. Die trivialen Fälle, daß alle Zustandsgrößen direkt meßbar sind oder aus der Ausgangsgröße direkt durch Bildung von Ableitungen gewonnen werden können, werden hier nicht betrachtet. Außerdem sollen an dieser Stelle nur Beobachter behandelt werden, bei denen die Ordnungen  $n$  von System und Beobachter gleich sind (vollständige Beobachter). Ist die Ordnung des Beobachters geringer als die des Systems, wird von reduzierten Beobachtern gesprochen [3.24, 4.14, 4.15].

#### 4.4.2. Zustandsbeobachtung aus den Eingangsgrößen und einem Systemmodell

Die Beobachtung der Zustände erfolgt bei diesem Prinzip durch ein dem System parallelgeschaltetes Modell unter Verwendung der Eingangssignale  $u_i(t)$  (Bild 4.26). Die Zustandsgrößen  $\hat{q}_i(t)$  des Modells werden im stationären Fall die Werte  $q_i(t)$  des Systems annehmen, wenn gilt

$$\hat{A} = A \quad \text{und} \quad \hat{B} = B.$$

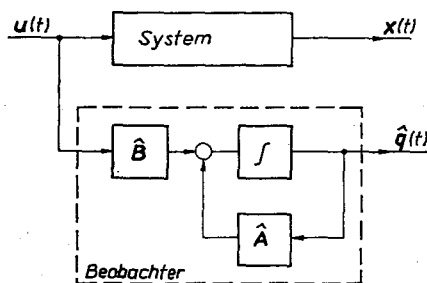


Bild 4.26  
Zustandsbeobachtung  
mittels Parallelmodell

Damit gilt als allgemeine Beobachtergleichung im kontinuierlichen Fall

$$\dot{\hat{q}}(t) = A\hat{q}(t) + Bu(t) \quad (4.53)$$

mit den Anfangsbedingungen  $\hat{q}(t_0) = 0$ .

Für diskrete Systeme bzw. diskrete Steuerung kontinuierlicher Systeme erhält man mit der Tasterperiode  $T$  und den Vereinbarungen  $q(kT) \triangleq q(k)$  und  $u(kT) \triangleq u(k)$  die Beobachtergleichung in der Form

$$\hat{q}(k+1) = A^*\hat{q}(k) + B^*u(k). \quad (4.54)$$

Dabei gelten für die Zusammenhänge zwischen den Matrizen der zeitdiskreten und der kontinuierlichen Zustandsraumdarstellung [1.52, 3.2, 3.24, 4.15]

$$\begin{aligned} A^* &= e^{AT} \\ B^* &= (e^{AT} - I) A^{-1} B \\ D^* &= D, \quad C^* = C. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Zur numerischen Lösung der Gl. (4.55) benutzt man häufig die folgende Reihenentwicklung:

$$A^* = I + AT + A^2 \frac{T^2}{2!} + A^3 \frac{T^3}{3!} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} A^s \frac{T^s}{s!}, \quad (4.56)$$

die in den Ausdruck

$$A^* = I + SA$$

mit

$$S = T \left( I + A \frac{T}{2!} + A^2 \frac{T^2}{3!} + \dots \right) A$$

umgeformt werden kann. Damit erhält man als endgültige Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} A^* &= I + SA \\ B^* &= SB. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Gegenüber Gl. (4.55) wird die Inversion umgangen; aber durch die notwendige endliche Anzahl von Gliedern der Reihenentwicklung tritt ein Fehler auf. Eine Abschätzung über die erforderliche Zahl der Glieder der Reihenentwicklung  $m$  kann durch die Norm des Zuwachsterms

$$\left\| A^m \frac{T^m}{(m+1)!} \right\| \quad (4.58)$$

erfolgen. Die Ermittlung des Zustandsvektors  $q(t)$  bzw.  $q(k)$  mit dieser Methode hat den Vorteil, daß ein Differenzieren von Signalen vermieden wird. Als Nachteil muß aber angesehen werden, daß das Konvergenzverhalten des Fehlers zwischen System- und Beobachterzustand, d. h.

$$\tilde{q}(t) = q(t) - \hat{q}(t), \quad (4.59)$$

nur von der Dynamik des beobachteten Systems abhängt. In den meisten Systemen ist das Konvergenzverhalten damit durch Trägheitsverhalten gekennzeichnet. Dieser wesentliche Nachteil kann, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, durch die Erweiterung des in Gl. (4.53) verwendeten Modells mit der Ausgangsgleichung

$$x(t) = Cq(t)$$

beseitigt werden.

#### 4.4.3. Zustandsbeobachtung aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen – Luenberger-Beobachter

Den Ausgangspunkt für den von *Luenberger* [4.16] vorgeschlagenen Zustandsbeobachter bildet die Erweiterung des Systemmodells von Gl. (4.53) um den mit der Verstärkungsmatrix  $K$  multiplizierten Ausgangsvektor  $x(t)$  zu der Form (Bild 4.27)

$$\dot{\hat{q}}(t) = \hat{A}\hat{q}(t) + \hat{B}u(t) + Kx(t). \quad (4.60)$$

Das Ziel ist es nun, einen Beobachter so zu entwerfen, daß im stationären Fall für den Zustandsfehler

$$\tilde{q}(t) = [q(t) - \hat{q}(t)] = 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (4.61)$$

gilt. Mit den Systembeschreibungen von Gl. (4.52) und der Modellbeschreibung von Gl. (4.60) werden aus der Differenz beider Gleichungen Bedingungen für die Wahl der Matrizen  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  und  $K$  abgeleitet, damit Gl. (4.61) erfüllt ist. Es gilt

$$\dot{\hat{q}}(t) - \dot{q}(t) = Aq(t) + Bu(t) - \hat{A}\hat{q}(t) - \hat{B}u(t) - KCq(t). \quad (4.62)$$

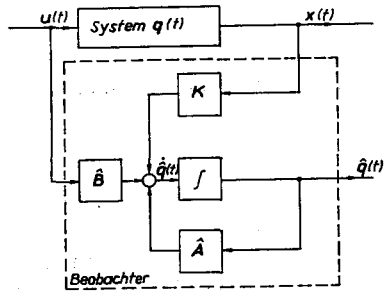


Bild 4.27  
Zustandsbeobachtung  
aus den gemessenen Eingangs- und Ausgangsgrößen

Durch Erweiterung von Gl. (4.62) um  $\pm \hat{A}\hat{q}(t)$  ergibt sich für

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}(t) - \dot{q}(t) &= Aq(t) + Bu(t) + \hat{A}[q(t) - \hat{q}(t)] \\ &\quad - \hat{A}\hat{q}(t) - \hat{B}u(t) - KCq(t) \end{aligned}$$

und durch weitere Umformungen

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}(t) - \dot{q}(t) &= \hat{A}[q(t) - \hat{q}(t)] + q(t)[A - \hat{A} - KC] \\ &\quad + u(t)[B - \hat{B}]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Aus Gl. (4.63) ist zu ersehen, daß der Fehler und seine Ableitungen für  $t \rightarrow \infty$  verschwinden, wenn

$$A - \hat{A} - KC = 0$$

$$B - \hat{B} = 0$$

und damit für die Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $K$  gilt

$$\hat{A} = A - KC$$

$$\hat{B} = B;$$

$$(4.64)$$

$K$  frei wählbar unter Beachtung notwendiger negativer Eigenwerte von  $\hat{A}$ .

Damit ergibt sich aus Gl. (4.60) die folgende Gleichung für den Beobachter:

$$\dot{\hat{q}}(t) = [A - KC]\hat{q}(t) + Bu(t) + Kx(t). \quad (4.65)$$

Durch weitere Umformungen kann aus Gl. (4.65) die endgültige Form der Beschreibung des *Luenberger-Beobachters* gefunden werden. Sie lautet:

$$\dot{\hat{q}}(t) = \hat{A}\hat{q}(t) + Bu(t) + K[x(t) - \hat{x}(t)]. \quad (4.66)$$

Die Struktur dieser Beobachterform ist im Bild 4.28 dargestellt.

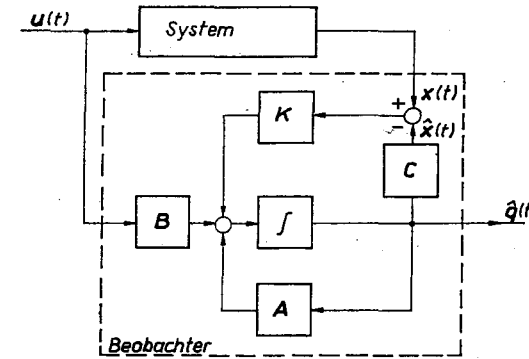


Bild 4.28  
Zustandsbeobachtung  
mit einem Luenberger-Beobachter

In diskreter Form lautet das Beobachtergesetz analog zu Abschnitt 4.4.2 und Gl. (4.66):

$$\hat{q}(k+1) = A^*\hat{q}(k) + B^*u(k) + K[x(k) - \hat{x}(k)] \quad (4.67)$$

mit

$$\hat{x}(k) = C^*\hat{q}(k).$$

Damit besteht der Luenberger-Beobachter aus einem Modell des Systems, das um die durch die Verstärkungsmatrix  $K$  bewertete Differenz zwischen beobachtetem und vorhergesagtem Ausgangssignalvektor erweitert wird. Die in den Gln. (4.66) und (4.67) dargestellten Beziehungen entsprechen in Grundstruktur und Verhalten den rekursiven Schätzalgorithmen (s. Abschn. 5.4). Durch die Wahl der Elemente der Verstärkungsmatrix  $K$  ist bei diesem Beobachterttyp das dynamische Verhalten gut zu beeinflussen. Um die Wirkung der Elemente der Verstärkungsmatrix  $K$  auf die Konvergenz der Zustandsbestimmung darzustellen, soll als Ausgangspunkt die Vektordifferentialgleichung des Zustandsfehlers von Gl. (4.63) mit den Annahmen

$$\hat{A} = A - KC \quad \text{und} \quad \hat{B} = B$$

betrachtet werden. Damit gilt

$$[\dot{\hat{q}}(t) - \dot{q}(t)] = \hat{A}[q(t) - \hat{q}(t)]. \quad (4.68)$$

Die Lösung der Vektordifferentialgleichung 1. Ordnung von Gl. (4.68) lautet dann

$$[q(t) - \hat{q}(t)] = e^{\hat{A}t}[q(t_0) - \hat{q}(t_0)]; \quad (4.69)$$

$q(t_0)$  Anfangszustand.

Die Gl. (4.69) zeigt deutlich, daß der Einschwingvorgang des Zustandsfehlers  $\tilde{q}(t)$  wesentlich durch die Eigenwerte der Matrix  $\hat{A}$  bestimmt wird.

Für ein schnelles Abklingen von  $e^{\hat{A}t}$  sind offenbar Eigenwerte von  $\hat{A}$  erforderlich, die möglichst weit links auf der imaginären Achse liegen müssen (d.h. großer negativer Realteil). Praktisch wird man aber die Eigenwerte nicht zu groß wählen, weil der Beobachter dann als nahezu differenzierendes System arbeitet. In der Regel werden die Eigenwerte der Matrix  $\hat{A}$  so vorgegeben, daß sie links von denen der Matrix  $A$  liegen. Damit klingt der Beobachtungsvorgang immer noch schneller ab als die Vorgänge im beobachteten System. Sind die Eigenwerte der Matrix  $\hat{A}$  durch diese Überlegungen festgelegt worden, muß man die Verstärkungsmatrix  $K$  so bestimmen, daß die Matrix

$$\hat{A} = A - KC$$

die vorgegebenen Eigenwerte hat. Theoretisch existieren unendlich viele Matrizen  $K$ , die die gleichen Eigenwerte aufweisen. Sie besitzen alle das charakteristische Polynom:

$$\det [pI - \hat{A}] = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$$

bzw.

$$\det [pI - A + KC] = p^n + \hat{a}_{n-1}p^{n-1} \dots + \hat{a}_0. \quad (4.70)$$

Die Existenz einer Lösung für Gl. (4.70) wurde unter der Voraussetzung, daß das System

$$\dot{q}(t) = Aq(t), \quad x(t) = Cq(t) \quad (4.71)$$

beobachtbar ist, in [4.17] nachgewiesen.

Dabei soll unter der Beobachtbarkeit die Eigenschaft des Systems charakterisiert werden, daß aus den gemessenen Ausgangsgrößen  $x(t)$  der Zustand  $q(t)$  eindeutig ermittelt werden kann.

Die Festlegung der Elemente der Verstärkungsmatrix  $K$  ist besonders übersichtlich, wenn die Zustandsgleichungen in die Beobachtungsnormalform [1.2, 4.15, 4.17] übergeführt werden. Für ein System mit einem Ein- und Ausgang gilt dann

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + bu(t) \quad (4.72)$$

$$x(t) = c^T q(t)$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b^T = [b_0, b_1 \dots b_{n-1}], \quad c^T = [0, 0, \dots, 1]$$

$$q^T = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]$$

$$G(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1}}{a_0 + a_1 p + \dots + p^n}.$$

Entsprechend Gl. (4.60) lautet dann die Beobachternormalform:

$$\dot{\hat{q}}(t) = \hat{A}\hat{q}(t) + \hat{b}u(t) + Kx(t) \quad (4.73)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{c}^T \hat{q}(t)$$

mit

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\hat{a}_0 \\ 1 & & & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & -\hat{a}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{b}^T = [\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{n-1}]$$

$$\hat{q}^T = [\hat{q}_1(t), \dots, \hat{q}_n(t)].$$

Da die Koeffizienten  $\hat{a}_i$ ;  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , aufgrund der Vorgabe der Eigenwerte für die Matrix  $\hat{A}$  durch die Gl. (4.70) bekannt sind, können die Elemente des Vektors  $k$  aus der Bedingung in Gl. (4.64) einfach ermittelt werden:

$$\hat{A} = A - kc^T \quad (4.74)$$

und, ausgeschrieben für die einzelnen Elemente:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\hat{a}_0 \\ 1 & & & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & -\hat{a}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 - k_1 \\ 1 & & & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - k_n \end{bmatrix}.$$

Aus dem Vergleich beider Matrizen folgt die Bestimmungsvorschrift für die Elemente des Verstärkungsvektors  $k$  zu

$$\hat{a}_0 = a_0 + k_1$$

$$\vdots$$

$$\hat{a}_{n-1} = a_{n-1} + k_{n-1}.$$

Somit gilt allgemein

$$k_i = \hat{a}_{i-1} - a_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.75)$$

Damit sind alle Elemente eines Beobachters festgelegt. Seine Struktur ist im Bild 4.29 dargestellt.

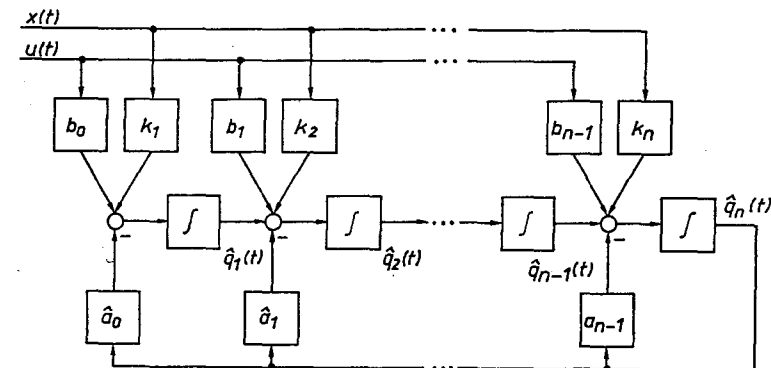
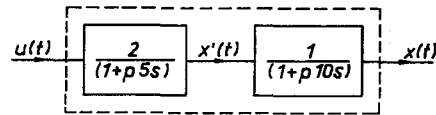


Bild 4.29. Struktur eines Luenberger-Beobachters für 1/1-System

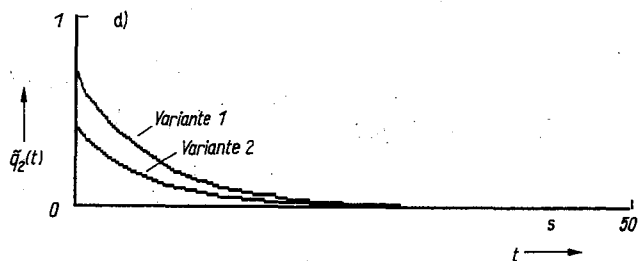
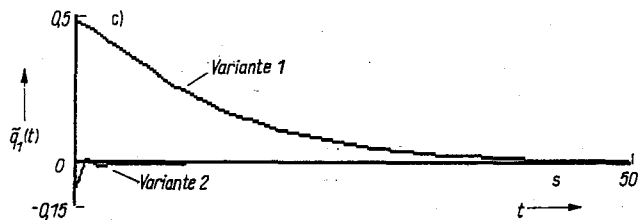
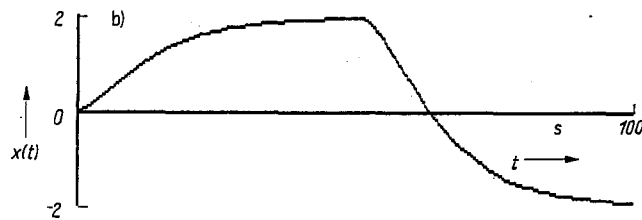
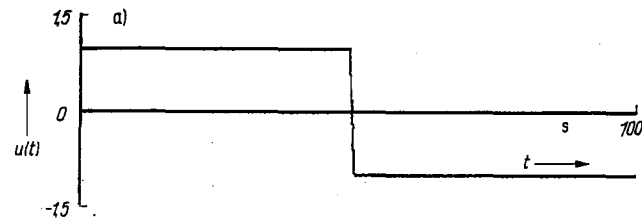
**Gegeben:** Abgetastete Werte des Eingangs- und Ausgangssignals des Systems (Bild a und Blockschaltbild)



Zustandsgleichungen mit  $q_1(t) \triangleq x(t)$ ,  $q_2(t) \triangleq x'(t)$ ,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 \text{ s}^{-1} & 0,1 \text{ s}^{-1} \\ 0 & -0,2 \text{ s}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4 \text{ s}^{-1} \end{bmatrix} u(t),$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix},$$



Abtastzeit  $T = 1 \text{ s}$ ,  
Beobachtungszeit: 100 s.

**Gesucht:** Verlauf der Zustandsfehler  $\bar{q}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , in Abhängigkeit von der Lage der Pole des Beobachters  $z_{iB}$  zu denen des Systems  $z_{iS}$  in der  $z$ -Ebene.

**Ergebnis:** Siehe Bilder b, c, d zu Beispiel 4.1.

1. Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgröße des Systems (Bild b),
2. Verlauf der Schätzfehler  $\bar{q}_i(t)$  bei gleicher Lage der Pole des Systems und des Beobachters, d.h.  $z_{iB} = z_{iS}$  (Bild c),
3. Verlauf des Zustandsfehlers  $\bar{q}_i(t)$ , wenn die Pole des Beobachters links von denen des Systems in der  $z$ -Ebene liegen (Bild d).

Die dargestellten Verläufe der Zustandsfehler  $\bar{q}_i(t)$  zeigen, daß bei gleicher Wahl der Lage der Pole von System und Beobachter (d.h. Verstärkungsfaktoren  $k_i = 0$ ) die Konvergenz sehr langsam erfolgt. Je weiter die Lage der Pole des Beobachters von denen des Systems nach links verschoben werden, um so größer werden die Verstärkungsfaktoren  $k_i$  und um so schneller konvergieren die Zustandsfehler zu Null. In dem dargestellten Fall tritt bereits beim Einschwingverhalten des Zustandsfehlers  $\bar{q}_1(t)$  ein differenzierendes Verhalten auf. Würden bei dieser gewählten Beobachterstruktur Störungen auf das System wirken, ist eine Zustandsermittlung nicht mehr möglich.

Im diskontinuierlichen Fall kann der Beobachter in analoger Weise entworfen werden. Wenn wieder von in die Beobachternormalform übergeführten Zustandsgleichungen ausgegangen wird, sind die Elemente des Verstärkungsvektors in Gl. (4.67) aus der Beziehung

$$k_i = \hat{a}_{i-1} - a_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

zu ermitteln. Die Parameter  $a_i$  sind in diesem Fall durch die diskrete Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + z^{-n}} \quad (4.76)$$

und die Parameter  $\hat{a}_i$  durch die vorgegebenen Eigenwerte  $z_i$  in der charakteristischen Gleichung des Beobachters – s. Analogie in Gl. (4.70) und Gl. (4.74) – gegeben [3.24]:

$$\det [zI - A^*] = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 z + \dots + z^n. \quad (4.77)$$

In [3.24] ist eine rechentechnisch sehr günstige Entwurfsstrategie, die auf der Anwendung spezieller Transformationsmatrizen beruht, enthalten.

Das Verhalten des Luenberger-Beobachters bei der Ermittlung der Zustandsgrößen ist für einen einfachen Testfall im Beispiel 4.1 für den diskontinuierlichen Fall dargestellt.

Die Bestimmung der Verstärkungsmatrix  $K$  bei Mehrgrößensystemen ist wesentlich unübersichtlicher. Im Rahmen dieses Buches soll auf dieses Problem nicht weiter eingegangen und auf weiterführende Literatur hingewiesen werden [1.52, 4.14, 4.15]. Dies gilt auch für das Problem des Entwurfs von Beobachtern reduzierter Ordnung (wenn einige Zustandsgrößen direkt meßbar sind) und für die Zustandsbeobachtung zeitvarianter Systeme.

Sind die Zustandsgrößen durch bekannte Störgrößen verfälscht, so kann man diesen Einfluß durch den klassischen Weg einer „Störgrößenaufschaltung“ eliminieren. Für die Zustandsgleichung mit Störung  $v(t)$  gilt dann

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bu(t) + Ev(t). \quad (4.78)$$

Durch Addition eines Terms der Größe

$$Bu^*(t) = -Ev(t)$$

in Gl. (4.78) bzw. von  $u^*(t)$  zum Eingangsvektor  $u(t)$  kann dieser Störeinfluß kompensiert werden. Treten nichtmeßbare Störungen auf Zustände und Ausgänge auf, versagt das Beobachterprinzip, und die Zustände müssen mit einer Schätzvorschrift (Kalman-Bucy-Filter) ermittelt werden (s. Abschn. 6.5).

## 4.5. Übungsaufgaben zum Abschnitt 4

### Aufgabe 4.1

Gegeben sind die in Tafel 4.8 dargestellten Werte der Sprungantwort eines ungestörten Systems. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion durch Approximation mit zwei unterschiedlichen Zeitkonstanten! Die Sprunghöhe der Testsignale beträgt  $u_0 = 1$ .

| t/s | x(t) | t/s | x(t) | t/s | x(t) |
|-----|------|-----|------|-----|------|
| 2   | 0    | 24  | 3,97 | 46  | 4,91 |
| 4   | 0,16 | 26  | 4,15 | 48  | 4,93 |
| 6   | 0,54 | 28  | 4,30 | 50  | 4,95 |
| 8   | 1,02 | 30  | 4,43 | 52  | 4,97 |
| 10  | 1,52 | 32  | 4,54 | 54  | 4,98 |
| 12  | 2,00 | 34  | 4,62 | 56  | 4,99 |
| 14  | 2,44 | 36  | 4,70 | 58  | 5,00 |
| 16  | 2,84 | 38  | 4,76 | 60  | 5,00 |
| 18  | 3,19 | 40  | 4,81 | 62  | 5,00 |
| 20  | 3,49 | 42  | 4,85 | 64  | 5,00 |
| 22  | 3,75 | 44  | 4,88 | 66  | 5,00 |

Tafel 4.8  
Funktionswerte der Sprungantwort  
zu Aufgabe 4.1

### Aufgabe 4.2

Gegeben sind die in Tafel 4.9 dargestellten Meßwerte der Sprungantwort eines gestörten Systems. Die Sprunghöhe des Testsignals beträgt  $u_0 = 1$ . Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion für die Struktur

a) 
$$G(p) = \frac{K}{(1 + pT)^n}$$

b) 
$$G(p) = \frac{K}{\prod_{i=1}^n \left(1 + p \frac{T_i}{i}\right)}$$

Überprüfen Sie die erhaltenen Modelle an den Stellen  $t_1 = 20$  s und  $t_2 = 40$  s!

| t/s | x(t)  | t/s | x(t) | t/s | x(t) |
|-----|-------|-----|------|-----|------|
| 0   | 0     | 30  | 3,93 | 60  | 5,11 |
| 2   | -0,43 | 32  | 4,04 | 62  | 4,71 |
| 4   | 0,16  | 34  | 4,30 | 64  | 4,93 |
| 6   | 0,44  | 36  | 4,35 | 66  | 4,86 |
| 8   | 1,02  | 38  | 4,55 | 68  | 4,83 |
| 10  | 0,82  | 40  | 4,58 | 70  | 4,96 |
| 12  | 1,27  | 42  | 4,64 | 72  | 4,94 |
| 14  | 1,43  | 44  | 4,29 | 74  | 5,34 |
| 16  | 1,85  | 46  | 4,66 | 76  | 5,27 |
| 18  | 2,57  | 48  | 4,70 | 78  | 5,06 |
| 20  | 2,71  | 50  | 4,95 | 80  | 4,99 |
| 22  | 2,87  | 52  | 4,76 | 82  | 4,54 |
| 24  | 3,23  | 54  | 4,66 | 84  | 5,05 |
| 26  | 3,29  | 56  | 4,60 | 86  | 5,00 |
| 28  | 3,75  | 58  | 4,58 |     |      |

Tafel 4.9  
Funktionswerte der Sprungantwort  
zu Aufgabe 4.2

### Aufgabe 4.3

Gegeben ist in Tafel 4.10 der Kurswinkelverlauf eines Schiffes als Reaktion auf eine Änderung des Steuerruders um  $10^\circ$ . Bestimmen Sie Struktur und Parameter dieses Systems

- a) mit dem Verfahren nach Schwarze;  
b) mit dem Verfahren nach Sporer!

| t/s | x(t) | t/s | x(t) |
|-----|------|-----|------|
| 0   | 0    | 12  | 19,9 |
| 2   | 1,0  | 14  | 24,4 |
| 4   | 3,2  | 16  | 28,8 |
| 6   | 6,7  | 18  | 33,3 |
| 8   | 11,0 | 20  | 37,7 |

Tafel 4.10  
Funktionswerte der Sprungantwort zu Aufgabe 4.3

### Aufgabe 4.4

Ermitteln Sie aus den in Tafel 4.11 gegebenen Stützwerten der Impulsantwort die Parameter der Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{K}{(1 + pT)^n}$$

Überprüfen Sie die Güte des Modells an den Stellen  
 $t = 3$  s,  $6$  s,  $9$  s,  $12$  s!

| t/s | x(t)  | t/s | x(t)  |
|-----|-------|-----|-------|
| 0   | 0     | 10  | 0,11  |
| 1   | 0,12  | 11  | 0,08  |
| 2   | 0,30  | 12  | 0,06  |
| 3   | 0,385 | 13  | 0,05  |
| 4   | 0,405 | 14  | 0,03  |
| 5   | 0,375 | 15  | 0,02  |
| 6   | 0,315 | 16  | 0,015 |
| 7   | 0,25  | 17  | 0,010 |
| 8   | 0,195 | 18  | 0,007 |
| 9   | 0,15  | 19  | 0,005 |

Tafel 4.11  
Funktionswerte der Impulsantwort zu Aufgabe 4.4

## Aufgabe 4.5

Aus den Meßwerten der Impulsantwort eines gestörten Systems (s. Tafel 4.12) ist unter Beachtung der Parameter des realen Eingangsimpulses ( $\Delta T = 5 \text{ s}$ ,  $u_0 = 4$ ) ein Modell mit gestaffelten Zeitkonstanten zu ermitteln. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den wahren Parametern des Systems  $K = 5$ ,  $T_1 = 10 \text{ s}$ ,  $T_2 = 5 \text{ s}$ !

| t/s | x(t)  | t/s | x(t) | t/s | x(t)  |
|-----|-------|-----|------|-----|-------|
| 0   | -0,25 | 22  | 2,65 | 44  | 0,24  |
| 2   | 0,63  | 24  | 2,45 | 46  | 0,27  |
| 4   | 2,02  | 26  | 1,73 | 48  | 0,55  |
| 6   | 4,06  | 28  | 1,69 | 50  | -0,27 |
| 8   | 4,54  | 30  | 1,19 | 52  | 0,23  |
| 10  | 4,59  | 32  | 1,02 | 54  | -0,09 |
| 12  | 4,98  | 34  | 1,09 | 56  | -0,05 |
| 14  | 4,28  | 36  | 1,04 | 58  | 0,12  |
| 16  | 3,87  | 38  | 0,32 | 60  | -0,09 |
| 18  | 3,80  | 40  | 0,56 | 62  | 0,26  |
| 20  | 2,88  | 42  | 0,51 | 64  | -0,25 |

Tafel 4.12  
Funktionswerte der Impulsantwort  
zu Aufgabe 4.5

## Aufgabe 4.6

Ermitteln Sie durch eine Geradenapproximation des Amplitudenfrequenzgangs die Übertragungsfunktion eines Phasenminimumsystems aus den in Tafel 4.13 dargestellten Meßwerten!

| $\omega/\text{s}^{-1}$ | $ G /\text{dB}$ | $\omega/\text{s}^{-1}$ | $ G /\text{dB}$ |
|------------------------|-----------------|------------------------|-----------------|
| 0,1                    | 40,0            | 4,0                    | -0,5            |
| 0,14                   | 37,0            | 5,6                    | -5,0            |
| 0,2                    | 34,0            | 8                      | -9,0            |
| 0,28                   | 31,0            | 10                     | -12,0           |
| 0,4                    | 27,0            | 14                     | -17,0           |
| 0,56                   | 24,0            | 20                     | -22,5           |
| 0,8                    | 20,0            | 28                     | -28,0           |
| 1,0                    | 17,5            | 40                     | -34,0           |
| 1,4                    | 13,5            | 56                     | -39,5           |
| 2,0                    | 8,5             | 80                     | -45,5           |
| 2,8                    | 4,0             | 100                    | -49,5           |

Tafel 4.13  
Funktionswerte des Amplitudenfrequenzgangs  
zu Aufgabe 4.6

## Aufgabe 4.7

Bei einer Frequenzgangmessung an einem System, das aus einer Reihenschaltung von I- und/oder P-T<sub>n</sub>-Gliedern bestehen kann, wurden folgende Werte ermittelt:

|                                                |                                      |
|------------------------------------------------|--------------------------------------|
| $\omega_0 = 0$                                 | bei $\varphi(\omega_0) = 0$          |
| $\omega_1 = 5,97 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ | bei $\varphi(\omega_1) = -45^\circ$  |
| $\omega_2 = 15,1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ | bei $\varphi(\omega_2) = -90^\circ$  |
| $\omega_3 = 69 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$   | bei $\varphi(\omega_3) = -180^\circ$ |
| $\omega_4 \rightarrow \infty$                  | bei $\varphi(\omega_4) = -270^\circ$ |

Bei der Frequenz  $\omega_0$  betrug das Verhältnis  $x(t)/u(t) = 2,7$ . Bestimmen Sie die Beschreibung des Frequenzgangs nach dem Verfahren von Szweda!

## 5. Bestimmung des statischen Verhaltens von gestörten Systemen

## 5.1. Ausgewählte Grundlagen der Schätztheorie

## 5.1.1. Aufgabe der Schätzmethoden

In den Abschnitten 5 und 6 soll das statische und das dynamische Verhalten von gestörten Systemen ermittelt werden. Entsprechend den Vereinbarungen im Abschnitt 1.4 besteht die Aufgabe der Schätzmethoden darin, ein Modell an das System auf der Grundlage der gemessenen Eingangs- und Ausgangsgrößen und von A-priori-Informationen so anzupassen, daß eine gewählte Zielfunktion  $Q$  minimal oder maximal wird. Das Grundschema der Schätzaufgabe ist im Bild 5.1 dargestellt. Durch die auftretende Störung werden die Struktur ( $\hat{f}$ ) und die Parameter ( $\hat{s}$ ) von Ein-/Ausgangs-Modellen der Form

$$\hat{x} = \hat{f}(m, \hat{s}) \quad (5.1)$$

oder die Zustandsgrößen ( $\hat{q}$ ) bei Zustandsmodellen der Form

$$\dot{\hat{q}}(t) = \hat{A}\hat{q}(t) + \hat{B}u(t) \quad (5.2)$$

selbst Zufallsgrößen. Damit ist eine Beschreibung mit den Methoden der mathematischen Statistik (s. Abschn. 2) notwendig. Beschränken wir die Aufgabe auf die wertmäßige Ermittlung von  $r$  Parametern (Parameterschätzung) für ein System mit  $l$  Eingängen und einem Ausgang, so ist der Parametervektor aus  $n$  Beobachtungen zu ermitteln. Es gilt

$$\hat{s} = \hat{s}\{m(1T), \dots, m(nT); x(1T), \dots, x(nT)\}. \quad (5.3)$$

Die Güte der Schätzung hängt damit u. a. von der Anzahl der Beobachtungen, den vorhandenen A-priori-Informationen und der gewählten Zielfunktion ab.

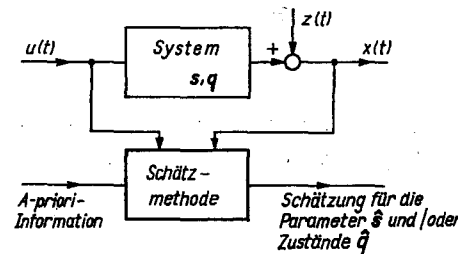


Bild 5.1  
Grundschema der Schätzaufgabe

Es werden deshalb in den folgenden Abschnitten die Grundideen wesentlicher Schätzmethoden, Kriterien zur Beurteilung der Schätzung, Möglichkeiten zur Fehlerbildung zwischen System- und Modellsignalen und die Grundstrategien zur Minimierung der Zielfunktion vorgestellt. Alle Ausführungen werden für Modelle des statischen Systemverhaltens durchgeführt. Eine Erweiterung auf Modelle für das dynamische Verhalten erfolgt im Abschnitt 6.

### 5.1.2. Grundideen wesentlicher Schätzmethoden

Den Ausgangspunkt für die Herleitung der wesentlichen Schätzmethoden bilden in diesem Buch der Umfang an A-priori-Wissen über Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Störungen, der Parameter und der Ausgangsgrößen sowie über die Kosten/den Verlust, der durch den Schätzfehler entsteht. Damit stehen als A-priori-Informationen maximal zur Verfügung:

1. die Kosten- oder Verlustfunktion  $C(\hat{s}, s)$ ,
2. die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x/s)$ ,
3. die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x)$ ,
4. die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(z)$  und die Kovarianzmatrix  $Z = E\{zz^T\}$  der Störung.

Als wesentliche Schätzmethoden, die die genannten A-priori-Informationen unterschiedlich verwenden, sind

- die Bayes-Schätzung,
- die Maximum-Likelihood-Schätzung
- die Markov-Schätzung
- die Regression

entwickelt worden. Es wird im folgenden gezeigt, daß der Umfang der verwendeten A-priori-Information von der Bayes-Schätzung zur Regression abnimmt und daß alle Hauptmethoden unter bestimmten Annahmen ineinander übergeführt werden können.

#### 5.1.2.1. Bayes-Schätzung

Bei der *Bayes-Schätzung* wird davon ausgegangen, daß der bedingte Erwartungswert der Kostenfunktion  $C(\hat{s}, s)$ , das Risiko für die Wahl von  $\hat{s}$  unter Berücksichtigung der Beobachtungen  $x$ , minimal werden soll. Es gilt damit

$$E_{x/s}\{C(\hat{s}, s)\} = \int_n C(\hat{s}, s) p(x/s) d^n x \quad (5.4)$$

mit

$$\int_n \dots d^n x, \quad n\text{-faches Integral,}$$

$$d^n x = dx_1, dx_2, \dots, dx_n.$$

Unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit für die Werte der Systemparameter  $p(s)$  erhält man aus Gl. (5.4) das durchschnittliche Risiko für die Schätzsituation zu

$$R(\hat{s}) = E_s\{E_{x/s}\{C(\hat{s}, s)\}\} \quad (5.5)$$

und somit

$$R(\hat{s}) = \int_r \int_n C(\hat{s}, s) p(x/s) p(s) d^n x d^r s.$$

Durch Anwendung der Bayes-Regel, die der Methode den Namen gab, kann mit den Beziehungen

$$p(x/s) p(s) = p(x, s) = p(s/x) p(x) \quad (5.6)$$

Gl. (5.5) umgeschrieben werden in

$$R(\hat{s}) = p(x) \int_r C(\hat{s}, s) p(s/x) d^r s \int_n d^n x. \quad (5.7)$$

Beachtet man nun, daß  $p(x) \geq 0$ , kann Gl. (5.7) minimiert werden, indem das zweite Integral bei den beobachteten Werten  $x = c$  minimiert wird. Damit gilt als Bestimmungsvorschrift

$$\min_s \int_r C(\hat{s}, s) p(s/c) d^r s \quad (5.8)$$

und als notwendige Bedingung

$$\left. \frac{\partial}{\partial \hat{s}} \int_r C(\hat{s}, s) p(s/c) d^r s \right|_{\hat{s}=s} = 0. \quad (5.9)$$

Für einen Parameter  $s$  und eine quadratische Kostenfunktion  $C(\hat{s}, s) = c(\hat{s} - s)^2$  sind im Bild 5.2 die Werte des Integrals von Gl. (5.8) dargestellt. Es ist zu sehen, daß das durchschnittliche Risiko an der Stelle  $\hat{s} = s$  minimal wird. Damit benötigt die Bayes-Schätzung folgende A-priori-Informationen

- die Kosten-/Risikofunktion  $C(\hat{s}, s)$
- die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x/s)$
- die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(s)$ .

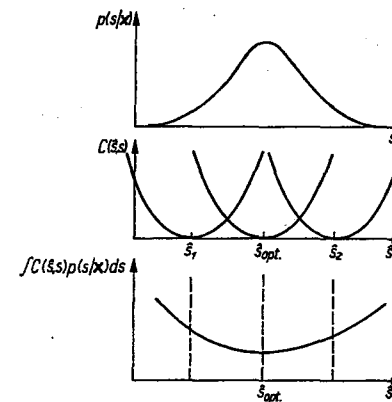


Bild 5.2  
Parameterermittlung mit dem Bayes-Verfahren

#### 5.1.2.2. Maximum-Likelihood-Schätzung

Wird die Kenntnis der Kostenfunktion  $C(\hat{s}, s)$  fallengelassen, so ist grundsätzlich der Parametervektor  $s$  so zu wählen, daß die bedingte Wahrscheinlichkeit  $p(s/x)$  ein Maximum annimmt. Aus Gl. (5.6) ergibt sich dann

$$\max_s p(s/x) = p(x/s) p(s)/p(x). \quad (5.10)$$

Wird nun ferner angenommen, daß die Verteilung des Parametervektors  $p(s)$  nicht bekannt ist und durch eine Gleichverteilung  $p(s) = \text{const}$  ersetzt wird, geht die Aufgabe von Gl. (5.10) in die Vorschrift

$$\max_s p(s/x) = \frac{\text{const}}{p(x)} \max_s p(x, s) \quad (5.11)$$

über. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x, s)$  wird nach Einsetzen der Beobachtungen für  $x$  in der Form

$$x(1T) = c_1, \dots, x(nT) = c_n \quad \text{bzw.} \quad x = c$$

und des zu schätzenden Parametervektors  $s$  als *Likelihood-Funktion*  $L$  bezeichnet:

$$L(c_1, \dots, c_n, s) = L(c, s). \quad (5.12)$$

Für das Auffinden des Maximums dieser Funktion, d.h. der Bestimmung des Parametervektors  $\hat{s} = s$ , müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} L(c, s) \right|_{s=\hat{s}} = 0 \quad (5.13)$$

oder als logarithmische Funktion

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \ln L(c, s) \right|_{s=\hat{s}} = 0.$$

Damit benötigt die *Maximum-Likelihood-Schätzung* nur die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x, s)$  als A-priori-Information.

### 5.1.2.3. Markov-Schätzung – ein Spezialfall der verallgemeinerten Regression

Werden von den möglichen A-priori-Informationen nur noch die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p(z)$  und die Kovarianzmatrix  $Z = E\{zz^T\}$  benutzt, kann eine Schätzvorschrift abgeleitet werden, die folgende Eigenschaften besitzt:

- Die Schätzung ist erwartungstreu, d.h.  $E\{\hat{s}\} = s$ .
- Die Schätzung der Parameter erfolgt mit minimaler Varianz.

Wenn angenommen wird, daß der Störvektor eine  $n$ -fache Normalverteilung ist, gilt analog zu Abschnitt 2.2.2

$$p(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |Z|^{1/2}} \exp - \frac{1}{2} (z^T Z^{-1} z) \quad (5.14)$$

mit

$$E\{z\} = 0, \quad E\{zz^T\} = Z.$$

Wird der Logarithmus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für  $z = x - M\hat{s}$  von Gl. (5.14) gebildet, erhält man

$$\ln p(x - M\hat{s}) = -\frac{1}{2} \ln \{(2\pi)^n |Z|\} - \frac{1}{2} \{(x - M\hat{s})^T Z^{-1} (x - M\hat{s})\}. \quad (5.15)$$

$M$  ist eine allgemeine Meßwertmatrix, die für die speziellen Probleme jeweils nachfolgend präzisiert wird (s. auch Abschn. 1.4).

Das Maximum aus Gl. (5.15) erhält man entsprechend Gl. (5.13) zu

$$\frac{\partial}{\partial \hat{s}} (x - M\hat{s})^T Z^{-1} (x - M\hat{s}) = 0 \quad (5.16)$$

und mit dem Fehlervektor  $e$  zwischen System- und Modellausgang  $e = (x - M\hat{s})$  zu

$$\frac{\partial}{\partial \hat{s}} e^T Z^{-1} e = 0.$$

Wenn die Inverse der Matrix  $M^T Z^{-1} M$  existiert, erhält man die Vorschrift für die *Markov-Schätzung* aus Gl. (5.16) zu

$$\hat{s} = [M^T Z^{-1} M]^{-1} M^T Z^{-1} x. \quad (5.17)$$

Damit ist auch gezeigt, daß die Markov-Schätzung die Eigenschaften der Maximum-Likelihood-Schätzung besitzt, wenn die Störung normal verteilt und ihre Kovarianzmatrix  $Z$  bekannt ist.

Setzt man für die Kovarianzmatrix  $Z$  eine allgemeine Wichtungsmatrix  $W$  ein, erhält man aus den Gln. (5.16) und (5.17) die Schätzvorschrift der verallgemeinerten Regression zu

$$\hat{s} = [M^T W^{-1} M]^{-1} M^T W^{-1} x. \quad (5.18)$$

### 5.1.2.4. Methode der kleinsten Fehlerquadrate – Regression

Wird davon ausgegangen, daß die Störung  $z$  als „weißes Rauschen“ (s. Abschn. 3) angesehen werden kann, ergibt sich die Kovarianzmatrix  $Z$  zu

$$Z = cI. \quad (5.19)$$

Damit geht die Schätzvorschrift der Markov-Schätzung Gl. (5.17) in die der *Regression* über:

$$\hat{s} = [M^T M]^{-1} M^T x. \quad (5.20)$$

Die Methode der Regression besitzt unter den oben genannten Bedingungen die Eigenschaften der Maximum-Likelihood-Schätzung. Ist die Störung nicht normalverteilt und korreliert, wird zwar der mittlere Ausgangsfehler minimal, aber die Varianz der Parameter ist größer als bei der Markov-Schätzung (s. Abschn. 5.2.3).

Damit wurde gezeigt, daß die vier grundlegenden Verfahren der Schätztheorie über die A-priori-Informationen verknüpft werden können. Von der Bayes-Schätzung bis zur

Tafel 5.1. Zusammenstellung der grundsätzlichen Schätzmethoden

| Methode                      | A-priori-Informationen                | Zielfunktion                    | Ziel    |
|------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|---------|
| Bayes-Schätzung              | $C(\hat{s}, s)$<br>$p(x/s)$<br>$p(s)$ | $\int C(\hat{s}, s) p(s/c) d's$ | Minimum |
| Maximum-Likelihood-Schätzung | $p(x, s)$                             | $L(c, \hat{s})$                 | Maximum |
| Markov-Schätzung             | $Z$                                   | $e^T Z^{-1} e$                  | Minimum |
| Regression                   | –                                     | $e^T e$                         | Minimum |

Regression nimmt der Umfang an notwendiger A-priori-Information ab. In Tafel 5.1 sind für die vier Grundschätzverfahren das verwendete Zielkriterium, die A-priori-Informationen und das Ziel der Schätzung in einer Übersicht dargestellt. Da die Ermittlung der Kostenfunktion  $C(\hat{s}, s)$  und der mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $p(x/s)$  und  $p(s)$  selten möglich ist, wird im Rahmen dieses Buches auf die weitere Betrachtung der Bayes- und der Maximum-Likelihood-Schätzung verzichtet. Weiterführende Darstellungen dieser Schätzverfahren sind in [1.35, 1.36, 1.38, 1.47] enthalten.

### 5.1.3. Kriterien zur Beurteilung der Schätzung

Durch die auftretende Störung  $z(t)$  werden die zu schätzenden Parameter  $\hat{s}$  und/oder Zustandsgrößen  $\hat{q}$  selbst Zufallsgrößen und unterliegen damit den Gesetzen der Statistik. In diesem Abschnitt sollen die wesentlichsten Kriterien zur Beurteilung der Schätzung bzw. des Schätzverlaufs vorgestellt werden. Wie bereits im Abschnitt 2 gezeigt, kann das Verhalten von Zufallsgrößen statisch durch ihre Verteilung oder durch die entsprechenden Momente beschrieben werden.

#### 5.1.3.1. Verwendung von Verteilungen

Die meiste Information über die Güte der Schätzung (des Schätzverlaufs) ist in der Verteilung der geschätzten Parameter

$$p(\hat{s}, T_0) \text{ bzw. } p(\hat{s}, n);$$

$T_0$  Beobachtungsintervall

$n$  Anzahl der Beobachtungen

enthalten. Zur Beurteilung der Güte der Schätzung wird die Lage der Verteilung, besonders ihr Schwerpunkt  $E\{\hat{s}\}$ , betrachtet.

Wenn der Erwartungswert der Schätzung gleich dem richtigen Parametervektor ist, spricht man von einer *unverschobenen Schätzung*. Dann gilt

$$E\{\hat{s}\} = s. \quad (5.21)$$

Ist Gl. (5.21) nicht erfüllt, liegt eine *verschobene Schätzung* vor. Für den eindimensionalen Fall sind diese beiden Fälle im Bild 5.3 dargestellt.

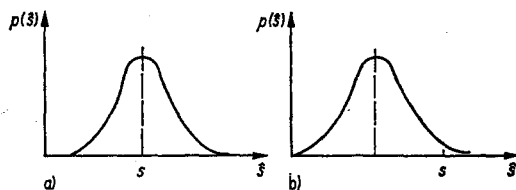


Bild 5.3  
Wahrscheinlichkeitsverteilungen  
für einen geschätzten Parameter

- a) unverschobene Schätzung  
b) verschobene Schätzung

Da die Schätzung in der Regel auch eine Funktion der Beobachtungszeit  $T_0$ /Beobachtungsanzahl  $n$  ist, muß das Konvergenzverhalten der Verteilungen der geschätzten Parameter untersucht werden. Eine Schätzung wird asymptotisch unverschoben bezeichnet, wenn unabhängig von der Beobachtungszeit/Beobachtungsanzahl Gl. (5.21) gilt. Für den eindimensionalen Fall ist dieses Verhalten im Bild 5.4a dargestellt. Nähert sich der Schwerpunkt der Verteilung der geschätzten Parameter mit größer werdender Beobachtungszeit/Beobachtungsanzahl immer mehr dem wahren Parametervektor, wird der Schätzverlauf als asymptotisch verschoben bezeichnet. Er ist im Bild 5.4b dargestellt.

Das Problem der Beurteilung der Güte der Schätzung anhand der Verteilungen der geschätzten Parameter liegt in ihrer Bestimmung und Darstellung. Einfacher und bei Annahme einer Normalverteilung der Parameterschwankungen ausreichend ist die Beschreibung der Schätzung durch die Momente.

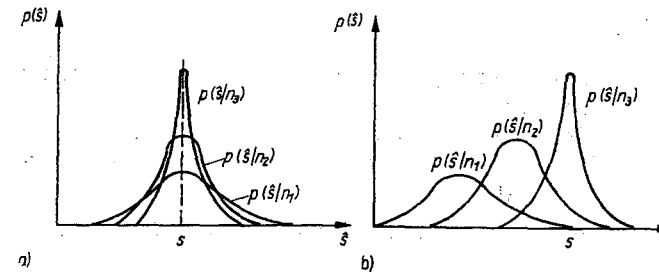


Bild 5.4  
Wahrscheinlichkeitsverteilungen  
für einen geschätzten Parameter

- a) asymptotisch unverschobene Schätzung  
b) asymptotisch verschobene Schätzung mit  $n_1 < n_2 < n_3$

#### 5.1.3.2. Verwendung von Momenten

Zur Beurteilung der Schätzungsgüte werden das erste normale Moment (d. h. der Erwartungswert  $E\{\dots\}$ ) und das zweite zentrale Moment (d. h. die Varianz  $\sigma^2\{\dots\}$ ) verwendet.

Eine Schätzung wird als *erwartungstreu* bezeichnet, wenn für jede Beobachtungslänge  $(T_0, n)$  gilt

$$E\{\hat{s}\} = s.$$

Konvergiert der Parametervektor  $\hat{s}$  mit Zunahme der Beobachtungslänge  $(T_0, n)$  gegen den wahren Parametervektor, wird die Schätzung als *asymptotisch erwartungstreu* bezeichnet. Es gilt damit

$$\lim_{T_0, n \rightarrow \infty} E\{\hat{s}\} = s. \quad (5.22)$$

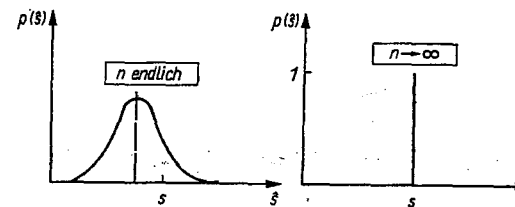


Bild 5.5  
Verhalten der Wahrscheinlichkeitsverteilung des geschätzten Parameters bei einer konsistenten Schätzung

Die bis jetzt betrachteten Kriterien enthalten keine Aussage über die Varianz der Schätzungen. Neben einer guten Übereinstimmung des mittleren Modellparametervektors mit dem Systemparametervektor soll die Varianz um den Erwartungswert der Schätzung minimal sein. Diese Bedingung erfüllt eine *konsistente Schätzung*. Für sie gilt

$$P\left(\lim_{T_0, n \rightarrow \infty} |\hat{s} - s| = 0\right) = 1 \quad (5.23)$$

mit den hinreichenden Bedingungen (Bild 5.5)

$$\lim_{T_0, n \rightarrow \infty} E\{\hat{s}\} = s$$

$$\lim_{T_0, n \rightarrow \infty} \sigma^2\{\hat{s}\} = 0.$$

Soll beurteilt werden, ob durch die Hinzunahme von neuen Daten die Güte der Schätzung weiter verbessert wird, muß ein Vergleich der erzielten Kovarianzen für den Zeitpunkt  $k$  und  $k + 1$  erfolgen. Eine Schätzung wird als *effektiv* (wirksam) bezeichnet, wenn die folgende Gleichung gilt:

$$\text{cov} \{\hat{s}_{k+1}\} \leq \text{cov} \{\hat{s}_k\}. \quad (5.24)$$

Mit den auf der Verteilung und den Momenten beruhenden Kriterien kann die Güte der Schätzung und ihr Verlauf hinreichend beschrieben werden.

Die vorgestellten Kriterien zur Beurteilung der Güte der Schätzung sind vom Standpunkt des Entwurfs und der Realisierung von Steuerungsaufgaben nur bedingt zu verwenden. Die Probleme bestehen darin, daß

1. ein System nicht unendlich lange beobachtet werden kann, bevor eine Entscheidung getroffen wird,
2. die Modelle zur Diagnose, Steuerung und Vorhersage überwiegend stark aggregierte Approximationen der Realität sind und deshalb keine „erwartungstreue Abbildung“ möglich ist,
3. die notwendige Modellgüte wesentlich durch das Steuerkonzept festgelegt wird (z. B. benötigen adaptive Steuerkonzepte keine Modelle einer erwartungstreuen Schätzung).

#### 5.1.4. Möglichkeiten zur Fehlerbildung zwischen System- und Modellsignalen

Eine der wesentlichen Grundlagen für die Schätzung der Parameter eines Modells ist die Festlegung des Fehlersignals  $e(k)$  zwischen System- und Modellsignalen. Folgende Möglichkeiten existieren:

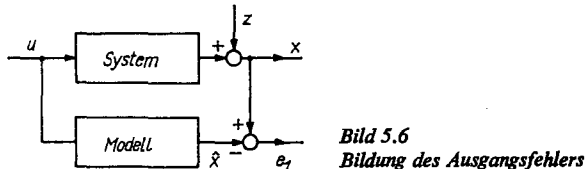


Bild 5.6  
Bildung des Ausgangsfehlers

**Ausgangsfehler** (Bild 5.6). Der Ausgangsfehler  $e_1(k)$  zum Zeitpunkt  $kT$  wird durch die Gleichung

$$e_1(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (5.25)$$

festgelegt. Er wird angewendet bei der Schätzung von Parametern statischer Modelle (Abschnitte 5.2 und 5.3), bei der Bestimmung der Stützstellen der Volterra-Reihe (Abschn. 6.2) und bei der Zustandsschätzung (Abschn. 6.5). Bei dynamischen parametrischen Modellen (z. B. der Differenzengleichung) wird der Fehler  $e_1(k)$  nichtlinear von den zu schätzenden Parametern abhängig. Wird als diskrete Übertragungsfunktion des Modells

$$\hat{G}(z^{-1}) = \hat{B}(z^{-1})/\hat{A}(z^{-1}) \quad (5.26)$$

mit

$$\hat{B}(z^{-1}) = [\hat{b}_0 + \hat{b}_1 z^{-1} + \dots + \hat{b}_m z^{-m}]$$

$$\hat{A}(z^{-1}) = [\hat{a}_0 + \hat{a}_1 z^{-1} + \dots + \hat{a}_n z^{-n}]$$

angenommen, erhält man für den Ausgangsfehler im Bildbereich

$$E_1(z) = X(z) - \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})} U(z).$$

Diese nichtlineare Abhängigkeit erschwert die Schätzung der Parameter dieses Modelltyps. Neben einer iterativen Lösung der Schätz Aufgabe (s. Abschn. 5.3) wird der Weg der Bildung eines verallgemeinerten Fehlers besprochen.

**Eingangsfehler** (Bild 5.7). Der Eingangsfehler  $e_2(k)$  zum  $k$ -ten Zeitpunkt entsteht dadurch, daß das über ein inverses Systemmodell gebildete Eingangssignal  $\hat{u}(k)$  vom realen Eingangssignal  $u(k)$  entsprechend der Gleichung

$$e_2(k) = u(k) - \hat{u}(k) \quad (5.27)$$

subtrahiert wird. Dieser Fehler wird selten verwendet, weil das inverse Systemmodell in der Regel ein stark differenzierendes Verhalten aufweisen muß (das bedeutet Störungsverstärkung) und außerdem auch bei dynamischen parametrischen Modellen der Fehler nichtlinear mit den Parametern zusammenhängt.

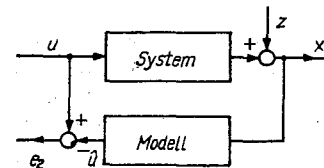


Bild 5.7. Bildung des Eingangsfehlers

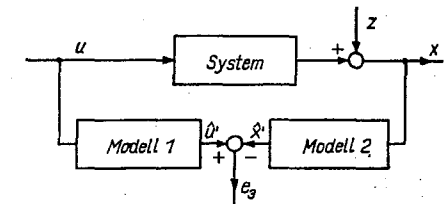


Bild 5.8. Bildung des verallgemeinerten Fehlers

**Verallgemeinerte Fehler** (Bild 5.8). Aus der Bildungsvorschrift des Ausgangs- und Eingangsfehlers kann der verallgemeinerte Fehler abgeleitet werden, wenn das Systemmodell  $M$  in die Teilmodelle  $M_1$  und  $M_2$  aufgetrennt werden kann. Der verallgemeinerte Fehler  $e_3(k)$  ergibt sich dann aus

$$e_3(k) = \hat{u}'(k) - \hat{x}'(k) \quad (5.28)$$

mit

$$\hat{u}'(k) = f(M_1, u(k)), \quad \hat{x}'(k) = f(M_2, x(k)).$$

Diese Fehlerart ist besonders bei der Schätzung von dynamischen parametrischen Modellen (Differenzengleichung) vorteilhaft, weil die Fehlergleichung linear von den zu schätzenden Parametern abhängt. Es gilt im Bildbereich für Gl. (5.28)

$$E_3(z) = \hat{B}(z^{-1}) U(z) - \hat{A}(z^{-1}) X(z). \quad (5.29)$$

Auf weitere Probleme der Anwendung dieser auch als Gleichungsfehler bezeichneten Fehlerart wird im Abschnitt 6.3 eingegangen.

Auf die Indizierung des Fehlers wird in den folgenden Abschnitten verzichtet, da überwiegend der Ausgangsfehler verwendet wird.

## 5.1.5. Grundstrategien zur Minimierung der Zielfunktion

Das Problem der Schätzung der Parameter auf der Grundlage der beobachteten Eingangs- und Ausgangsgrößen, der A-priori-Information und der gewählten Zielfunktion ist eine Optimierungsaufgabe. Es sind mit Hilfe eines Schätzverfahrens die Parameter des Modells so zu bestimmen, daß ein minimales Risiko oder eine maximale Wahrscheinlichkeit oder ein minimaler mittlerer quadratischer Fehler erzielt wird. Damit sind prinzipiell alle Methoden der mathematischen Optimierung anwendbar, die in [5.6 bis 5.19] ausführlich dargestellt sind. Im Rahmen dieses Buches wird nur auf Optimierungsmethoden eingegangen, die für die Lösung der Schätz Aufgabe verwendet werden.

Generell vereinfacht sich die Optimierungsaufgabe durch die quadratische Form der Zielfunktion beim Verfahren der Regression und der verallgemeinerten Regression. Die optimale Lösung ist bei linearen Fehlergleichungen ein analytischer Ausdruck in Form der Schätzvorschrift. Die Aufgabe besteht dann in der Anwendung einer günstigen numerischen Lösungsvariante für die Schätzvorschrift (s. Abschn. 5.1.5.1). Besteht zwischen dem Fehler und den zu schätzenden Parametern ein nichtlinearer Zusammenhang, müssen die optimalen Parameter durch eine iterative Lösung mittels Suchverfahren bestimmt werden. Dies ist auch erforderlich, wenn die Lösung der Zielfunktion unter der Beachtung von Gleichungs- oder Ungleichungsbeschränkungen ermittelt werden muß (s. Abschnitt 5.1.5.2).

Die bis jetzt genannten Wege zur Ermittlung der Parameter gehen davon aus, daß aus einem Datenblock mit  $n$  Beobachtungen die Lösung direkt oder durch eine Iteration gefunden wird. In vielen Fällen stehen aber laufend neue Informationen zur Verfügung, die zur weiteren Verbesserung des Modells benutzt werden können. Die Schätzverfahren, die in der Lage sind, die Zielfunktion durch Verarbeitung neuer Informationen über die Eingangs- und Ausgangsgrößen zu minimieren, werden als rekursive Verfahren bezeichnet (s. Abschn. 5.1.5.3).

## 5.1.5.1. Direkte Lösung der Schätz Aufgabe

Die direkte Lösung der Schätz Aufgabe erfolgt anhand der Gleichung

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{s}} = 0 \quad (5.30)$$

in einem Schritt aufgrund von  $n$  Beobachtungen. Das allgemeine Schema dieser Verfahren ist im Bild 5.9 dargestellt. Für die Methode der Regression ergibt sich aus Gl. (5.30) so die direkte analytische Lösung zu (s. Abschn. 5.2.2)

$$\hat{s} = [M^T M]^{-1} M^T x. \quad (5.31)$$

Als numerische Lösungsverfahren der Gl. (5.31) haben sich u. a. die in Tafel 5.2 genannten bewährt.

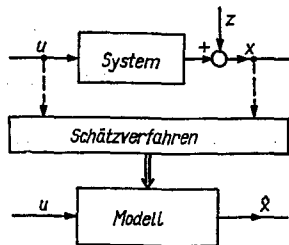


Bild 5.9  
Struktur der direkten und der iterativen Schätzmethoden

Tafel 5.2. Zusammenstellung von Lösungen der direkten Schätzmethoden

| Numerisches Verfahren                                            | Lösungsgleichung für $\hat{s}$                                                                                                                                                     | Name des Verfahrens                                                   |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Matrizeninversion<br>– direkt<br>– Zerlegung in Dreiecksmatrizen | $\hat{s} = [M^T M]^{-1} M^T x$                                                                                                                                                     | – Gauß<br>– Gauß–Banachiewicz [5.1, 5.2, 5.3]<br>– Cholesky–Zerlegung |
| Auflösung linearer Gleichungssysteme                             | $M^T M \hat{s} = M^T x$                                                                                                                                                            | – Gauß–Jordan [5.1, 5.2]<br>– Cholesky–Zerlegung [5.4, 5.5, 5.6]      |
| Transformationen<br>– orthonormal<br>– orthogonal                | $M^T M = I$<br>$M^T M = \begin{bmatrix} m_1^{*T} m_1^* & \dots & 0 \\ 0 & \dots & m_n^{*T} m_n^* \end{bmatrix};$<br>$m_i^*$ i-te Spalte der orthogonalisierten Meßwertmatrix $M^*$ | – Householder [5.7]                                                   |

## 5.1.5.2. Iterative Lösung der Schätz Aufgabe

Eine iterative Lösung der Schätz Aufgabe auf der Grundlage der  $n$  Beobachtungen wird erforderlich, wenn die zu schätzenden Parameter nichtlinear in die Fehlergleichung eingehen oder wenn Beschränkungen in der Zielfunktion berücksichtigt werden müssen.

Tafel 5.3. Zusammenstellung von iterativen Schätzverfahren

| Verfahrensgruppe          | Lösungsgleichung für $\hat{s}$                                                                                                                                                                                    | Name des Verfahrens/Literatur                                                                                                                     |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                           | $\hat{s}^{i+1} = \hat{s}^i + \Delta \hat{s}^{i+1}$                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                   |
| Gradientenfreie Verfahren | $\Delta \hat{s}^{i+1} = \alpha(i) \Delta \hat{s}$<br>$\alpha(i) = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$ für $Q(i) = \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} Q(i-1);$<br>$\Delta \hat{s}$ vorgegebener Vektor | Powell [5.8, 5.9]<br>Rosenbrock [5.10]<br>Fibonacci [5.11]                                                                                        |
| Gradientenverfahren       | $\Delta \hat{s}^{i+1} = -\gamma(i+1) R(i+1) \nabla Q(i);$<br>$\gamma(i)$ Schrittweitenvektor<br>$R(i)$ Richtungsmatrix<br>$\nabla Q(i)$ Gradient zum i-ten Schritt                                                | steilster Abstieg [5.9, 5.11]<br>Newton [5.9, 5.12]<br>Newton–Raphson [5.9, 5.11]<br>Marquardt–Levenberg [5.13, 5.14, 5.15]<br>Powell [5.9, 5.11] |
| Zufallssuchverfahren      | $\Delta \hat{s}^{i+1} = \beta(i+1) R(i+1) \Delta \hat{s}$ mit<br>$\beta(i+1) = \begin{cases} 0 & \text{für } Q(i+1) \geq Q(i) \\ 1 & \text{für } Q(i+1) < Q(i) \end{cases};$<br>$\Delta \hat{s}$ Zufallsvektor    | Brooks [5.16]<br>Rastrigin [5.17]<br>White [5.18]<br>Schwefel [5.19]                                                                              |

Damit ist eine analytische Lösung von Gl. (5.30) nicht mehr möglich, und die Schätz-aufgabe muß mittels Suchverfahren über die Beziehung

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{s}} \rightarrow 0 \quad (5.32)$$

erfolgen. Das Minimum entsprechend Gl. (5.32) wird bei allen Verfahren durch die Ermittlung des geschätzten Parametervektors in der  $(i+1)$ -ten Iteration nach der Beziehung

$$\hat{s}^{i+1} = \hat{s}^i + \Delta \hat{s}^{i+1} \quad (5.33)$$

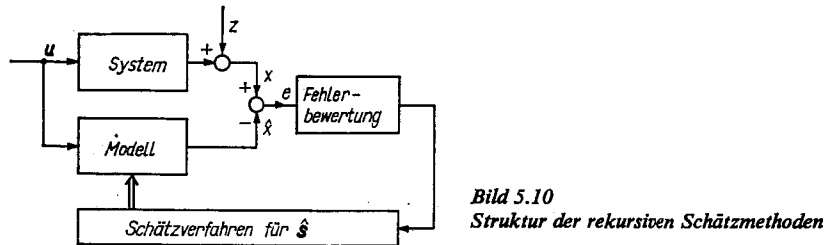
erhalten. Dabei unterscheiden sich die in Tafel 5.3 dargestellten Suchverfahren in der Ermittlungsvorschrift für die Parameteränderung  $\Delta \hat{s}^{i+1}$  zwischen der  $i$ -ten und  $(i+1)$ -ten Iteration.

### 5.1.5.3. Rekursive Lösung der Schätz-aufgabe

Die rekursive Lösung der Schätz-aufgabe besteht in der Ermittlung des Minimums der Zielfunktion entsprechend Gl. (5.22) mittels Korrektur des alten Parametervektors  $\hat{s}(k)$  zum  $k$ -ten Zeitpunkt durch Addition einer Parameteränderung  $\Delta \hat{s}(k+1)$  nach der Vorschrift

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + \Delta \hat{s}(k+1). \quad (5.34)$$

Damit ist eine laufende Modell-anpassung und -nachführung leicht möglich. Das Grund-schemata der rekursiven Verfahren ist im Bild 5.10 dargestellt.



Erfolgt die Parametereinstellung kontinuierlich, so gilt folgende Parametereinstell-vorschrift:

$$\dot{\hat{s}}(t) = -\gamma \mathbf{R}' \nabla Q(\hat{s}, t); \quad (5.35)$$

$\gamma$  Schrittweitenvektor  
 $\mathbf{R}'$  Richtungsmatrix.

Diese Strategien haben durch die breite Anwendung von digitaler Rechentechnik an Bedeutung verloren und werden hier nur aus pädagogischen Gründen angeführt.

In Tafel 5.4 sind einige Verfahren dieser Gruppe vorgestellt, wobei der Zusammenhang mit der iterativen Lösung sichtbar wird. Diese Gruppe von Verfahren ist besonders für den Echtzeitbetrieb, die Verwendung von Mikrorechnern und bei adaptiven Konzepten geeignet. Die Nachteile der direkten Lösungsmethoden, die in der Inversion und den jedesmal zu berechnenden Matrizen bei neuen Meßwerten bestehen, entfallen.

Tafel 5.4. Zusammenstellung von rekursiven Schätzverfahren

| Verfahrensgruppe                             | Lösungsgleichung für $\hat{s}$                                                                                                    | Name des Verfahrens/<br>Literatur                                                                                                                           |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                              | $\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + \Delta \hat{s}(k+1)$                                                                                 |                                                                                                                                                             |
| Rekursive Lösung<br>der Regression           | $\hat{s}(k+1) = \mathbf{k}(k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{m}^T(k+1) \hat{s}(k)]$                                                 | rekursive Regression<br>[1.34, 1.38, 1.31]<br>rekursive verallgemei-<br>nerte Regression<br>[1.34, 1.38, 5.20]                                              |
| Gradientenverfahren<br>– analog<br>– diskret | $\dot{\hat{s}}(t) = -\gamma \mathbf{R}' \nabla Q(\hat{s}, t)$<br>$\Delta \hat{s}(k+1) = -\gamma(k+1) \mathbf{R}(k+1) \nabla Q(k)$ | Osborn [5.26]<br>Rake [5.27]<br>Relaxation [5.21, 5.22]<br>steilster Abstieg<br>[5.9, 5.11]<br>stochastische Appro-<br>ximation [1.41, 5.23,<br>5.24, 5.25] |

## 5.2. Direkte Schätzverfahren

### 5.2.1. Voraussetzungen

Ausgehend von der im Abschnitt 5.1 formulierten Schätz-aufgabe ist auf der Grundlage der zu den Zeitpunkten  $kT$  gewonnenen Meßwerte der Eingangsgrößen

$$\mathbf{m}^T(k) = [m_1(k), m_2(k), \dots, m_l(k)]$$

und der Ausgangsgröße

$$x(k)$$

sowie einer angenommenen oder a priori bekannten Struktur und einer gewählten Ziel-funktion ein Modell in seinen Parametern und seiner Struktur so dem realen Prozeß an-zupassen, daß die Zielfunktion minimal (maximal) wird. Für die Ableitungen in diesem Abschnitt werden folgende Voraussetzungen gemacht:

- Die Werte der Signale  $m_i(k)$  und  $x(k)$  sind zeitlich unkorreliert, z. B.  
 $E\{x(k)x(k+l)\} = 0; l \neq 0.$
- Die Eingangssignale  $m_i(k)$  werden fehlerfrei gemessen.
- Zwischen den Eingangssignalen und der Störung besteht kein Zusammenhang, d. h.  
 $E\{m_i(k)z(k)\} = 0.$
- Die Störung ist stationär mit  $\mu_z = 0$  und  $\sigma_z^2 = \text{const.}$
- Der Zusammenhang zwischen dem Fehler und den zu schätzenden Parametern ist linear.

Es wird weiterhin von der Prozeßbeschreibung im Abschnitt 1.4, Gl. (1.3), ausgegangen und mit dem allgemeinen Eingangssignalvektor  $\mathbf{m}$  gearbeitet. Diese Vorgehensweise wird gewählt, weil die in den folgenden Abschnitten abgeleiteten Verfahren als Grundlage verschiedenster Schätz-aufgaben im Rahmen dieses Buches Anwendung finden.

Bei der Lösung der Schätz Aufgabe für Modelle des statischen Systemverhaltens haben besonders Polynommodelle der Form

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^l \hat{a}_i u_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^l \hat{a}_{ij} u_i u_j + \sum_{i=1}^l \hat{a}_{ii} u_i^2 + \dots \quad (5.36)$$

eine große Bedeutung erlangt, weil durch sie jeder analytische Zusammenhang durch eine geeignete Wahl der Ordnung hinreichend genau approximiert werden kann. Im einfachsten Fall hat der Eingangsgrößenvektor  $m$  die Gestalt

$$m^T = [1, u_1, \dots, u_l]. \quad (5.37)$$

In den jeweiligen Anwendungen der Verfahren im Rahmen dieses Buches wird die spezifische Bedeutung des allgemeinen Eingangssignalvektors  $m$  und des Parametervektors  $s$  angegeben.

### 5.2.2. Direkte Methode der Regression

Die *Methode der kleinsten Quadrate* (MKQ), die Regression, ist das älteste und zugleich robusteste Verfahren zur Schätzung der Parameter eines allgemeinen Modells der Form

$$\hat{x}(k) = m^T(k) s \quad (5.38)$$

mit

$$m^T(k) = [m_1(k), m_2(k), \dots, m_l(k)]$$

$$s^T = [s_1, s_2, \dots, s_l].$$

Für die Beschreibung des Systems gilt analog für eine Beobachtung

$$x(k) = m^T(k) s + z(k). \quad (5.39)$$

Zur Schätzung der unbekannten Parameter  $s$  sind  $n$  Beobachtungen ( $n \geq l$ ) erforderlich, die das folgende Gleichungssystem für  $k = j, j+1, \dots, j+(n-1)$  ergeben:

$$\begin{aligned} x(j) &= s_1 m_1(j) + \dots + s_l m_l(j) + z(j) \\ x(j+1) &= s_1 m_1(j+1) + \dots + s_l m_l(j+1) + z(j+1) \\ &\vdots \\ x(j+n-1) &= s_1 m_1(j+n-1) + \dots + s_l m_l(j+n-1) + z(j+n-1). \end{aligned} \quad (5.40)$$

In Vektorschreibweise kann Gl. (5.40) geschrieben werden:

$$x(n) = M(n) s + z(n) \quad (5.41)$$

mit den Komponenten

$$x^T(n) = [x(j), x(j+1), \dots, x(j+n-1)]$$

$$z^T(k) = [z(j), z(j+1), \dots, z(j+n-1)]$$

$$s^T = [s_1, s_2, \dots, s_l]$$

$$M(n) = \begin{bmatrix} m_1(j), & \dots, & m_l(j) \\ \vdots & & \vdots \\ m_1(j+n-1), & \dots, & m_l(j+n-1) \end{bmatrix}.$$

Entsprechend Gl. (5.41) gilt für die Modellgleichung

$$\hat{x}(n) = M(n) s \quad (5.42)$$

und damit als Fehlergleichung

$$e(n) = x - M(n) s. \quad (5.43)$$

Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate beruht nun darauf, daß die Parameter  $s_i$  des Modells mit Hilfe des Gütekriteriums

$$Q = \|e(n)\|^2 = \sum_{k=j}^{j+n-1} e(k)^2 \quad (5.44)$$

so ermittelt werden, daß das Gütekriterium  $Q$  minimal wird (Bild 5.11). Durch Einsetzen von Gl. (5.43) in Gl. (5.44) erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} Q &= (x(n) - M(n) s)^T (x(n) - M(n) s) \\ Q &= x(n)^T x(n) - 2s^T M(n)^T x(n) + s^T M(n)^T M(n) s. \end{aligned} \quad (5.45)$$

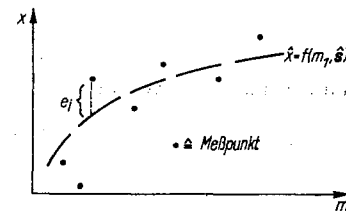


Bild 5.11  
Lösung der Schätz Aufgabe für ein System  
mit einem Eingang und einem Ausgang

Das Minimum des Gütekriteriums  $Q$  wird durch Nullsetzen der ersten partiellen Ableitung

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -2M(n)^T x(n) + 2M(n)^T M(n) s = 0 \quad (5.46)$$

analytisch bestimmt.

Wenn die Inverse der Matrix  $M(n)^T M(n)$  existiert, erhält man aus Gl. (5.46) als direkte analytische Lösung die Parameterschätzvorschrift der *Regression* zu

$$\hat{s} = [M(n)^T M(n)]^{-1} M(n)^T x(n). \quad (5.47)$$

Unter den Annahmen, daß

1.  $E\{m(k) z(k+i)\} = 0$  für alle  $i$ ,
2.  $E\{z(k) z(k+i)\} = 0$  für alle  $i \neq 0$ ,
3.  $E\{z(k)\} = 0$  für alle  $k$ ,

besitzt das Schätzverfahren die folgenden Eigenschaften:

*Erwartungstreue*, d. h.  $E\{\hat{s}\} = s$

*Beweis:*

$$E\{\hat{s}\} = E\{[M(n)^T M(n)]^{-1} M(n)^T x(n)\}.$$

Mit Gl. (5.41) gilt

$$E\{\hat{s}\} = E\{[M(n)^T M(n)]^{-1} M(n)^T M(n) s + z(n)\}.$$

Mit den getroffenen Annahmen gilt somit

$$E\{\hat{s}\} = E\{s\} = s.$$

Beste lineare Schätzung, d.h. minimale Parametervarianz

Voraussetzungen: Annahme 1. bis 3.

$z(k)$  normalverteilt

$$\sigma_z^2 = \text{const}$$

Beweis s. Abschnitt 5.2.4.

Zur Beurteilung der Güte der Schätzung dienen folgende Kriterien:

#### 1. Restquadratsumme

$$S_R = \sum_{k=j}^{j+n-1} (x(k) - \hat{x}(k))^2 \quad (5.48)$$

#### 2. Reststreuung

$$s_R^2 = \frac{S_R}{n - (l + 1)} \quad (5.49)$$

#### 3. Varianzen der geschätzten Parameter

Aus der Beziehung für die Kovarianzmatrix des geschätzten Parametervektors

$$\text{COV}\{\hat{s}\} = E\{(s - \hat{s})(s - \hat{s})^T\} \quad (5.50)$$

erhält man durch Einsetzen von Gl. (5.41) in Gl. (5.47)

$$\text{COV}\{\hat{s}\} = E\{[M(n)^T M(n)]^{-1} M(n)^T z(n) z(n)^T M(n) [M(n)^T M(n)]^{-1}\}.$$

Mit der Annahme, daß

$$E\{z(n) z(n)^T\} = \sigma_z^2 I$$

ist, ergibt sich für die Kovarianzmatrix des Parametervektors  $\hat{s}$

$$\text{COV}\{\hat{s}\} = P(n) \sigma_z^2 \quad (5.51)$$

mit

$$\sigma_z^2 = E\{z^T(n) z(n)\}, P(n) = [M^T(n) M(n)]^{-1}.$$

Im einzelnen:

$$\text{die Kovarianzen } \text{cov}\{\hat{s}_i, \hat{s}_j\} = p_{ij} \sigma_z^2$$

$$\text{die Varianzen } \text{var}\{\hat{s}_i\} = p_{ii} \sigma_z^2.$$

#### 4. Varianzen des geschätzten Ausgangs $\hat{x}$

Die Varianz des geschätzten Ausgangs ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \text{var}\{\hat{x}\} &= E\{(x - \hat{x})^2\} \\ &= E\{[(s - \hat{s})^T m^2]\} \\ &= E\{m^T (s - \hat{s})(s - \hat{s})^T m\} \end{aligned}$$

mit den Beziehungen in Gl. (5.51) zu

$$\text{var}\{\hat{x}\} = \sigma_z^2 m^T [M^T M]^{-1} m. \quad (5.52)$$

#### Beispiel 5.1 Einfluß der Beobachtungszahl und der Störgröße auf die Parametergüte bei der Schätzung mit der MKQ

Gegeben: Systemgleichung

$$x = \sum_{i=1}^4 a_i u_i + z,$$

$$a^T = [1, -2, 4, -10],$$

Eingangssignale  $u_i \approx \text{NV}(0, 1)$ ,

Störung  $z \approx \text{NV}(0, \dots)$  (Störverhältnis  $\sqrt{\sigma_z^2/\sigma_x^2} 100$ ).

Gesucht: Schätzwerte der Parameter und die Reststreuung.

Ergebnis:

| n   | Stör-<br>verhältnis<br>% | Parameter |        |       |        |         |
|-----|--------------------------|-----------|--------|-------|--------|---------|
|     |                          | $a_1$     | $a_2$  | $a_3$ | $a_4$  | $s_R^2$ |
| 10  | 10                       | 1,268     | -2,206 | 3,930 | 9,457  | 3,576   |
|     | 50                       | 1,835     | -2,144 | 3,391 | 12,256 | 29,613  |
| 100 | 10                       | 1,045     | -2,009 | 3,961 | 9,942  | 1,066   |
|     | 50                       | 1,134     | -2,189 | 4,430 | 10,547 | 26,104  |
| 500 | 10                       | 1,027     | -2,013 | 4,017 | 9,940  | 1,082   |
|     | 50                       | 1,231     | -2,032 | 4,200 | 10,445 | 23,139  |

Die erzielten Ergebnisse machen deutlich, daß

1. die Güte der Schätzung mit zunehmender Beobachtungszahl zunimmt,
2. die Güte der Schätzung mit wachsender Störung abnimmt,
3. der Fehler der kleinen Parameter gegenüber den größeren Parametern wesentlich stärker von der Störung abhängt.

#### 5. Konfidenzintervall für $s_i$ mit dem $t$ -Test (s. Abschn. 2.3.4)

Mit dem Freiheitsgrad  $f = n - l - 1$ , der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und der Näherung von  $\sigma_z^2 \approx s_R^2$  ergibt sich für das Konfidenzintervall

$$|\hat{s}_i - s_i| = t_{\alpha/2, f} s_R \sqrt{p_{ii}}. \quad (5.53)$$

#### 6. Hypothesentest: $H_0: s_i = 0$ ( $t$ -Test; s. Abschn. 2.3.3)

Der geschätzte Parameter  $\hat{s}_i$  ist mit der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  statistisch ungleich null, wenn

$$|\hat{s}_i| \geq t_{\alpha/2, f} s_R \sqrt{p_{ii}}. \quad (5.54)$$

Das typische Verhalten der MKQ ist im Beispiel 5.1 bezüglich des Einflusses des Stichprobenumfangs und der Störampplitude für einen Testfall dargestellt.

Zur Lösung der Schätzgleichung von Gl. (5.47) kommen verschiedene numerische Verfahren zur Anwendung. Ist die in der Gl. (5.47) zu invertierende Matrix  $M(n)^T M(n)$  nichtsingulär und symmetrisch, ist die Anwendung des Cholesky-Verfahrens vorteilhaft. Wenn die zu invertierende Matrix schlecht konditioniert ist, kann die Inversion durch eine Umstellung der Gl. (5.47) in

$$M(n)^T M(n) \hat{s} = M(n)^T x(n) \quad (5.55)$$

umgangen werden. Für die Lösung dieses Gleichungssystems können dann die Gauß-Elimination, die Zerlegung in Dreiecksmatrizen nach *Gauß-Banachiewicz* oder die Spaltenpivotsuche nach *Gauß-Jordan* zur Anwendung (s. Tafel 5.2) kommen. Die Methode der Regression liefert unter den eingangs genannten Voraussetzungen gute und robuste Parameterschätzungen. In den folgenden Abschnitten sollen Methoden vorgestellt werden, die unter den Bedingungen einer starken Korrelation zwischen den Eingangsgrößen, der sog. Multikollinearität oder einer korrelierten Störung Schätzungen mit minimalen Varianzen der Parameter erlauben. Es sind dies die Methode der Kammlinien- und der verallgemeinerten Regression.

### 5.2.3. Methode der Kammlinienregression

Die Methode der Kammlinienregression (KLR), auch als Ridge-Regression bezeichnet, ist von *Hörl* ursprünglich zur Interpretation von Gütefeldern entwickelt worden [5.28]. Erst später wurde sie zur Parameterschätzung bei korrelierten Eingangsgrößen eingesetzt [5.24].

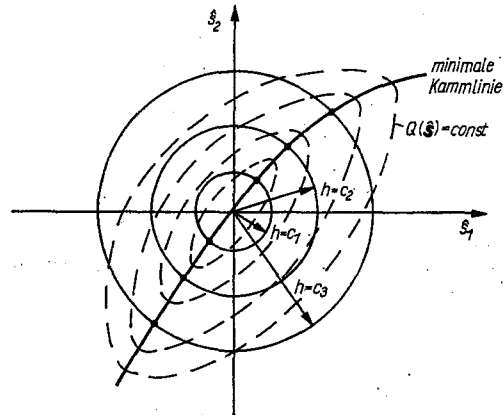


Bild 5.12  
Gütefeldanalyse mit Hilfe  
der Kammlinienregression

Die Methode geht von der Annahme aus, daß jedes Gütefeld durch eine Kammlinie gekennzeichnet werden kann, die bei vorgegebenen Radien  $h^2$  im Parameterraum die Punkte minimaler Werte der Gütefunktion  $Q(s)$  verbindet (Bild 5.12). Diese Kammlinie wird als minimale Kammlinie bezeichnet. Die Ermittlung der minimalen Kammlinie unter der Nebenbedingung konstanter Radien um das Zentrum des Gütefelds der Form

$$\varphi(s) = h^2 - s^T s = \text{const} \quad (5.56)$$

mit

$$h = \|s\| = \sqrt{s_1^2 + \dots + s_i^2}$$

erfolgt durch eine Erweiterung der quadratischen Gütefunktion. Die in Gl. (5.56) formulierte Nebenbedingung wird über den Lagrange-Multiplikator  $\lambda$  in der erweiterten Gütefunktion

$$Q(s, \lambda) = Q(s) + \lambda \varphi(s) \quad (5.57)$$

berücksichtigt.

Wird in Gl. (5.57) für

$$Q(s) = (x - Ms)^T (x - Ms)$$

eingesetzt, erhält man für

$$Q(s, \lambda) = (x - Ms)^T (x - Ms) + \lambda (h^2 - s^T s). \quad (5.58)$$

Aus Gl. (5.58) gewinnt man durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen als Ausgangsbeziehung für die Lösung der Minimierungsaufgabe:

$$Q(s, \lambda) = x^T x - 2s^T M^T x + s^T M^T M s + \lambda h^2 - \lambda s^T s. \quad (5.59)$$

Das Minimum der Gütefunktion  $Q(s, \lambda)$  wird wiederum durch die Bildung der partiellen Ableitungen und anschließendes Nullsetzen ermittelt. Mit

$$\frac{\partial Q(s, \lambda)}{\partial s} = 0$$

und Gl. (5.59) erhält man

$$\frac{\partial Q(s, \lambda)}{\partial s} = 2 [M^T M s - \lambda s - M^T x] = 0. \quad (5.60)$$

Wenn die Inverse der Matrix  $M^T M - D(\lambda)$  mit  $D(\lambda) = \lambda I$  existiert, kann der Parametervektor nach der Beziehung

$$s = [M^T M - D(\lambda)]^{-1} M^T x \quad (5.61)$$

geschätzt werden. Die Vorschrift von Gl. (5.61) wird als *Kammlinienregression* bezeichnet. Die minimale Kammlinie ist nach [5.28] durch  $\lambda$ -Werte definiert, die kleiner sind als der minimale Eigenwert der Matrix  $[M^T M]$ . Da der minimale Eigenwert dieser Matrix bei Multikollinearität gegen Null strebt, d.h.  $\lambda_{\min} \approx 0$ , sind die  $\lambda$ -Werte in Gl. (5.61) von Null in Richtung negativer Werte,  $\lambda < 0$ , zu wählen. Als günstig hat sich bei vielen simulierten Testfällen der Bereich

$$0 > \lambda > -1$$

zur Suche eines zweckmäßigen  $\lambda$ -Wertes erwiesen. Die Anwendung der Kammlinienregression ist gegenüber der Regression nur sinnvoll, wenn

– zwei oder mehr Eingangsgrößen stark korreliert sind

$$\hat{\rho}(u_i, u_j) \geq 0,85,$$

– das System stärker gestört ist ( $> 10\%$ ).

Unter diesen Bedingungen wird die Varianz der Parameter durch das Verfahren der Kammlinienregression stark reduziert. Im Beispiel 5.2 wird dieses Verhalten an ausgewählten Testfällen aufgezeigt.

Ein Problem bleibt das Kriterium zur Beurteilung der Modellgüte, d.h. die Festlegung eines  $\lambda$ -Wertes aus dem Kompromiß zwischen der Reduzierung der Parametervarianz und der Erhöhung der Restquadratsumme. Die minimale Restquadratsumme liefert das

**Beispiel 5.2** Vergleich der Schätzverfahren MKQ und KLR bei verschiedener Korrelation von  $m$ 
**Gegeben:** Systemgleichung

$$x = \sum_{i=1}^5 a_i u_i + z,$$

$$a^T = [3, 2, -2, 1, -4],$$

 Eingangssignale  $u_i \triangleq NV(0, 1)$  mit den Korrelationsmatrizen

| Fall |       | $u_1$  | $u_2$  | $u_3$  | $u_4$  | $u_5$ |
|------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|
| I    | $u_1$ | 1      |        |        |        |       |
|      | $u_2$ | 0,947  | 1      |        |        |       |
|      | $u_3$ | 0,024  | 0,023  | 1      |        |       |
|      | $u_4$ | -0,076 | -0,063 | 0,160  | 1      |       |
|      | $u_5$ | -0,110 | -0,201 | -0,173 | -0,125 | 1     |
| II   | $u_1$ | 1      |        |        |        |       |
|      | $u_2$ | 0,820  | 1      |        |        |       |
|      | $u_3$ | 0,937  | 0,968  | 1      |        |       |
|      | $u_4$ | 0,960  | 0,947  | 0,997  | 1      |       |
|      | $u_5$ | 0,986  | 0,903  | 0,982  | 0,993  | 1     |

 Störung  $z \triangleq NV(0, \alpha)$ , 10%  
 (mit Störverhältnis  $\sqrt{\sigma_z^2/\sigma_x^2} = 100$ ),

Modellgleichung

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^5 a_i u_i.$$

**Gesucht:** Schätzwerte der Parameter  $a_i$ .

**Ergebnis:** Für  $n = 200$ 

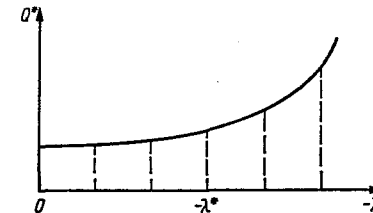
| Testfall |                         | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|----------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| I        | MKQ                     | 3,18  | 1,75  | -2,06 | 1,11  | -4,01 |
|          | KLR                     | 3,01  | 1,96  | -1,96 | 1,06  | -3,96 |
|          | ( $\lambda^* = -0,5$ )  |       |       |       |       |       |
| II       | MKQ                     | -60   | 169   | -59   | 554   | 268   |
|          | KLR                     | 3,24  | 1,15  | -0,81 | 2,68  | -3,52 |
|          | ( $\lambda^* = -0,25$ ) |       |       |       |       |       |

Die vorgelegten Ergebnisse zeigen, daß

1. der Parameterfehler im Testfall I, d.h. bei einer relativ geringen Korrelation zwischen den Komponenten des Meßwertvektors  $m$  (nur  $u_1$  ist mit  $u_2$  stark korreliert) der Methode der KLR nur geringfügig besser als der der MKQ ist,
2. bei einer starken Korrelation zwischen den Komponenten des Meßwertvektors  $m$  (Testfall II) das Versagen der MKQ deutlich wird; dagegen die Parameterwerte der KLR noch in Vorzeichen und Betrag sinnvoll sind.

 Verfahren der Regression, d.h.  $\lambda = 0$ . Als günstig hat sich folgende heuristische Vorgehensweise bewährt [5.30]:

1. Schätzung mittels Regression ( $\lambda = 0$ )
2. Schätzung mittels Kammlinienregression bei verschiedenen  $\lambda_i$
3. Wahl des negativsten  $\lambda_i$ -Wertes, bei dem noch kein wesentlicher Anstieg der Restquadratsumme vorliegt (s. Bild 5.13 und Beispiel 5.1).


 Bild 5.13  
 Prinzipieller Verlauf der Reststreuung in Abhängigkeit von den  $\lambda$ -Werten

 Der rechentechnische Aufwand jeder einzelnen Schätzung ist bei der Kammlinienregression und der Regression nahezu gleich (Tafel 5.5). Zur Suche eines günstigen Kompromisses zwischen Reststreuung und Parametervarianz erhöht sich der Aufwand linear mit der Anzahl der gewählten  $\lambda$ -Werte. Weitere Wege zur iterativen Suche günstiger  $\lambda$ -Werte sind in [5.30] dargestellt.

| Verfahren | Rechenzeit bestimmt durch                                                      | Speicherplatz            |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| MKQ       | Inversion $[M^T M]$ mit $l \times l$                                           | $l^2 + l(1+n) + n$       |
| KLR       | Inversion von $[M^T M]$ mit $l \times l$                                       | $l^2 + l(2+n) + n$       |
| VMKQ      | Inversion von<br>- $W$ mit $n \times n$<br>- $[M^T W^{-1} M]$ mit $l \times l$ | $l^2 + n^2 + n + l(1+n)$ |

 Tafel 5.5  
 Vergleich rechentechnischer Parameter direkter Schätzverfahren

**5.2.4. Direkte Methode der verallgemeinerten Regression/Markov-Schätzung**

Die verallgemeinerte Methode der kleinsten Quadrate (VMKQ) geht von einer Zielfunktion

$$Q = e^T W^{-1} e \quad (5.62)$$

 aus, bei der der Fehlervektor durch eine Wichtungsmatrix  $W^{-1}$  beeinflusst wird. Die Wichtung des Fehlers wird z.B. bei korrelierten Störungen  $z$  oder bei der Schätzung zeitvarianter Systeme angewendet. Analog zur MKQ gilt für die VMKQ die Fehlergleichung (5.43) und damit

$$Q = (x - M\hat{s})^T W^{-1} (x - M\hat{s}). \quad (5.63)$$

Über die Gleichung

$$Q = x^T W^{-1} x - 2\hat{s}^T M^T W^{-1} x + \hat{s}^T M^T W^{-1} M \hat{s} \quad (5.64)$$

erhält man das Minimum von  $Q$  aus der Beziehung

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{s}} = -2M^T W^{-1}x + 2M^T W^{-1}M\hat{s} = 0. \quad (5.65)$$

Wenn die Inverse der Matrix  $M^T W^{-1}M$  existiert, gilt für die Schätzvorschrift der VMKQ

$$\hat{s} = [M^T W^{-1}M]^{-1} M^T W^{-1}x. \quad (5.66)$$

Das Schätzverfahren der VMKQ besitzt folgende Eigenschaften:

- Die Schätzung ist erwartungstreu unter Beachtung der Bedingungen von Abschnitt 5.2.1.
- Die Parametervarianzen sind minimal, da

$$\text{cov}\{\hat{s}_{\text{VMKQ}}\} = E\{[M^T W^{-1}M]^{-1} M^T W^{-1}z^T z W^{-1}M [M^T W^{-1}M]^{-1}\} \quad (5.67)$$

und somit

$$\text{cov}\{\hat{s}_{\text{VMKQ}}\} \leq \text{cov}\{\hat{s}_{\text{MKQ}}\}$$

gilt.

Das Hauptproblem der Methode besteht in der Festlegung der Elemente der Wichtungsmatrix  $W$  und ihrer Inversion. Die Dimension der Wichtungsmatrix ist  $n \times n$  bei  $n$  Beobachtungen. Eine der leistungsfähigsten Methoden zur Festlegung der Wichtungsmatrix  $W$  ist die Verwendung der Kovarianzmatrix  $Z$  der Störung (s. Abschn. 5.1.2.3). Die mit dieser Festlegung erhaltene Schätzvorschrift wird als Markov-Schätzung bezeichnet und lautet:

$$\hat{s} = [M^T Z^{-1}M]^{-1} M^T Z^{-1}x. \quad (5.68)$$

Diese Schätzung besitzt auch bei korrelierten Störungen die für die VMKQ angegebenen Eigenschaften.

Da die Kovarianzmatrix  $Z$  der Störung eine doppelt symmetrische Matrix ist, ist durch eine Transformation der Meßwerte eine Rückführung auf die Regression möglich. Die Lösung erfolgt in den Schritten [1.31, 5.31]:

1. Cholesky-Zerlegung von  $Z$  in

$$Z = R^T R,$$

2. Einsetzen der Zerlegung in Gl. (5.68)

$$\hat{s} = [M^T (R^T R)^{-1} M]^{-1} M^T (R^T R)^{-1} x,$$

3. Transformation der Meßwerte

$$\tilde{M} = (R^{-1})^T M \quad (5.69)$$

$$\tilde{x} = (R^{-1})^T x,$$

4. Einsetzen der transformierten Meßwerte

$$\hat{s} = [\tilde{M}^T \tilde{M}]^{-1} \tilde{M}^T \tilde{x}. \quad (5.70)$$

Somit ist rechentechnisch immer der gleiche Modul der Regression verwendbar. Da die Störung selten meßbar ist und häufig auch A-priori-Informationen über die Kovarianzmatrix fehlen, wurde neben Schätzverfahren eine Strategie erfolgreich erprobt, die die

### Beispiel 5.3 Vergleich der Schätzverfahren MKQ und der Markov-Schätzung bei verschiedenen Störampplituden

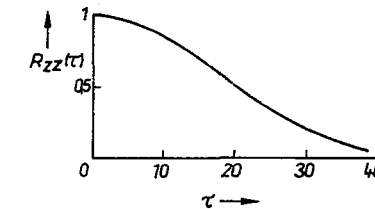
Gegeben: Systemgleichung

$$x = \sum_{i=1}^5 a_i \mu_i + z,$$

$$a^T = [1, -2, 3, 8, 10],$$

Eingangssignale  $u_i \triangleq \text{NV}(0, 1)$ ,

Störung  $z \triangleq \text{NV}(0, \dots)$ ,



$$\text{Modellgleichung } \hat{x} = \sum_{i=1}^5 a_i \mu_i.$$

Gesucht: Schätzwerte der Parameter  $a_i$ .

Ergebnis: Für  $n = 90$

| Störung % |                  | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|-----------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 25        | MKQ              | 1,42  | -1,75 | 2,91  | 8,05  | 9,92  |
|           | Markov-Schätzung | 1,01  | -2,01 | 2,99  | 8,02  | 9,98  |
| 50        | MKQ              | 1,78  | -1,55 | 2,84  | 8,12  | 9,80  |
|           | Markov-Schätzung | 1,03  | -1,99 | 2,98  | 8,02  | 9,96  |
| 100       | MKQ              | 2,58  | -1,11 | 2,73  | 8,23  | 9,62  |
|           | Markov-Schätzung | 1,05  | -1,96 | 2,95  | 8,03  | 9,95  |
| 150       | MKQ              | 3,42  | -0,64 | 2,61  | 8,31  | 9,50  |
|           | Markov-Schätzung | 1,15  | -1,93 | 2,93  | 8,03  | 9,92  |

Die dargestellten Ergebnisse zeigen, daß

- die kleinsten Parameter mit dem größten relativen Fehler geschätzt werden,
- die Überlegenheit der Markov-Schätzung gegenüber der MKQ bei stärkeren Störungen noch zunimmt,
- erst bei einer relativ starken Korrelation der Störung die Überlegenheit der Markov-Schätzung merklich wird.

Kovarianzmatrix der Störung durch die des Fehlers annähert. Damit gilt die Annahme

$$\mathbf{Z} \approx \mathbf{E} = \mathbf{E}\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\}. \quad (5.71)$$

Die Kovarianzmatrix des Fehlers kann durch eine zweistufige Schätzstrategie entsprechend dem im Bild 5.14 dargestellten Schema gewonnen und verwendet werden. Die erste Stufe besteht in einer MKQ-Schätzung. Aus dem Fehlervektor wird eine erste Schätzung der Kovarianzmatrix des Fehlers vorgenommen. In der zweiten Stufe wird dann die Markov-Schätzung durchgeführt, und über den neugebildeten Fehlervektor erfolgt in Iterationen eine weitere Anpassung, bis Abbruchschranken für die Parameterwerte und/oder Parametervarianzen erreicht sind. Weiterführende Untersuchungen sind in [5.31] enthalten.

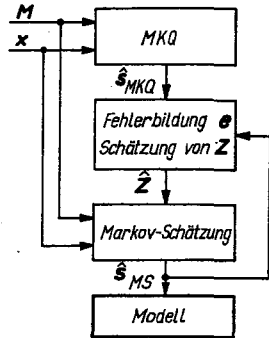


Bild 5.14  
Schema der zweistufigen Markov-Schätzung

Im Vergleich zur MKQ liefert die Markov-Schätzung wesentlich bessere Schätzergebnisse für den Parametervektor, d.h. eine geringere Parametervarianz, wenn

1. die Störung stark korreliert ist, d.h. die Korrelationstiefe größer als  $5T$  bis  $10T$  ist,
2. eine große Stör-Amplitude ( $> 10\%$ , bezogen auf die Ausgangsgröße  $x$ ) vorhanden ist,
3. die aus der Stichprobe ermittelte oder für die Stichprobe geltende Schätzung der Kovarianzmatrix der Störung verwendet wird.

Die Reststreuung der Markov-Schätzung erhöht sich dagegen im Vergleich zur Regression. Diese Aussagen werden deutlich sichtbar im Beispiel 5.3.

Die Rechenzeit und der Speicherplatz werden bei der MKQ durch die Dimension der Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $[\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1}$  dominierend bestimmt. Bei der Markov-Schätzung steigt mit wachsender Beobachtungszahl  $n$  der Rechenaufwand zusätzlich enorm an, da die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Z}$  als eine  $n \times n$ -Matrix zu invertieren ist (Tafel 5.5).

## 5.3. Iterative Schätzverfahren

### 5.3.1. Allgemeine Grundstruktur

Ist der Zusammenhang zwischen dem Schätzfehler und den Parametern des Modells nichtlinear, so ist eine analytische Lösung der Schätz Aufgabe durch Nullsetzen der Ableitung der Gütefunktion direkt in einem Schritt nicht mehr möglich. Einen Ausweg bilden iterative Schätzverfahren der Grundstruktur (s. Abschn. 5.1.5.2)

$$\mathbf{s}^{i+1} = \mathbf{s}^i + \Delta \mathbf{s}^{i+1}. \quad (5.72)$$

Von den verschiedenen möglichen Varianten der

- gradientenfreien Verfahren
- Gradientenverfahren (einschließlich der Benutzung der zweiten Ableitungen)
- Zufallssuchverfahren

und ihren Kombinationen (s. Tafel 5.3) sollen im Rahmen dieses Buches nur die Gradientenverfahren nach *Newton-Raphson* [5.9, 5.11] und nach *Marquardt-Levenberg* [5.13, 5.14, 5.15] vorgestellt werden. Sie haben im Rahmen der Parameterschätzung die breiteste Verwendung gefunden, besonders bei der Schätzung der Koeffizienten der Differenzengleichung nach der Maximum-Likelihood-Methode (s. Abschn. 6).

### 5.3.2. Newton-Raphson-Verfahren

Beim *Newton-Raphson-Verfahren* wird der Gradient der Gütefunktion

$$\nabla Q(\mathbf{s}) = \partial Q(\mathbf{s}) / \partial \mathbf{s} \quad (5.73)$$

an der Stelle  $i$  des Parametervektors des Modells in eine Taylor-Reihe der Form

$$\nabla Q(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}^i + \Delta \mathbf{s}} = \nabla Q(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}^i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \nabla Q(\mathbf{s})^T|_{\mathbf{s}^i} (\mathbf{s}^{i+1} - \mathbf{s}^i) + \dots \quad (5.74)$$

entwickelt. Wird in Gl. (5.74)

$$\nabla Q(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}^i + \Delta \mathbf{s}} = 0$$

gesetzt und die Reihenentwicklung nach dem zweiten Glied abgebrochen, erhält man nach einer einfachen Umstellung die iterative Schätzvorschrift für die *Newton-Raphson-Verfahren* zu

$$\mathbf{s}^{i+1} = \mathbf{s}^i - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \nabla Q(\mathbf{s})^T|_{\mathbf{s}^i} \right]^{-1} \nabla Q(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}^i}. \quad (5.75)$$

Die partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial Q(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q(\mathbf{s})}{\partial s_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q(\mathbf{s})}{\partial s_i} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 Q(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q(\mathbf{s})}{\partial s_1 \partial s_1} & \dots & \frac{\partial^2 Q(\mathbf{s})}{\partial s_1 \partial s_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q(\mathbf{s})}{\partial s_i \partial s_1} & \dots & \frac{\partial^2 Q(\mathbf{s})}{\partial s_i \partial s_i} \end{bmatrix}$$

Mit der Gütefunktion

$$Q(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \sum_{k=j}^{j+n-1} e^2(k)$$

erhält man für die ersten und zweiten Ableitungen folgende Ausdrücke:

$$\frac{\partial Q(\mathbf{s})}{\partial s_i} = \sum_{k=j}^{j+n-1} e(k) \frac{\partial e(k)}{\partial s_i} \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial^2 Q(\mathbf{s})}{\partial s_i \partial s_m} = \sum_{k=j}^{j+n-1} \frac{\partial e(k)}{\partial s_i} \frac{\partial e(k)}{\partial s_m} + \sum_{k=j}^{j+n-1} \frac{\partial^2 e(k)}{\partial s_i \partial s_m}.$$

Die Realisierung der Schätzvorschrift in Gl. (5.75) erfolgt mit diesen Gleichungen in folgenden Schritten:

1. Wahl günstiger Startparameterwerte  $\hat{s}^0$ .
2. Berechnung der ersten und zweiten Ableitungen mit den Werten der Beobachtungen  $e(k); k = j, \dots, j + n - 1$ .
3. Ermittlung des neuen Parametervektors  $\hat{s}^{i+1}$  nach Gl. (5.75).
4. Test, ob ein vorgegebenes Abbruchkriterium erfüllt ist.
5. Wenn Abbruchkriterium nicht erfüllt ist, Wiederholung ab Schritt 2.

Für dieses Verfahren muß vorausgesetzt werden, daß die Gütefunktion  $Q(\hat{s})$  in jedem Punkt  $\hat{s} \in S (S \in R^l)$  stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung besitzt. Da i. allg. nicht sichergestellt ist, daß  $\hat{s}^{i+1} \in S$ , wird der Algorithmus von Gl. (5.75) zur Sicherung der Konvergenz um einen Dämpfungsfaktor  $\beta^i (\beta^i > 0)$  in der Form

$$\hat{s}^{i+1} = \hat{s}^i - \beta^i \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{s}} \nabla Q(\hat{s})^T \Big|_{\hat{s}=\hat{s}^i} \right]^{-1} \nabla Q(\hat{s}) \Big|_{\hat{s}=\hat{s}^i} \quad (5.77)$$

erweitert. Wenn der Faktor  $\beta^i$  genügend klein gewählt wird, ist nach [5.32] gesichert, daß der neue Parametervektor  $\hat{s}^{i+1} \in S$  ist. Damit ist die Konvergenz garantiert. Der Rechenaufwand des Verfahrens ist durch die Bildung und Inversion der Matrix der zweiten Ableitungen, d.h. der Hesse-Matrix, relativ hoch. Für stärker gestörte Systeme ist dieses Verfahren ungeeignet.

### 5.3.3. Levenberg-Marquard-Verfahren

Um die Konvergenz unabhängig von den Startwerten  $\hat{s}^0$  und der Größe der Störung zu sichern, wurde von Levenberg-Marquard [5.13, 5.33] der erweiterte Algorithmus von Gl. (5.78) entworfen. Er geht davon aus, daß die Suche des Minimums der Gütefunktion unter der Nebenbedingung konstanter Radien  $h^2$  der Änderung des Parametervektors von Iteration zu Iteration erfolgt.

Das heißt, es gilt

$$\Delta \hat{s} = \hat{s}^{i+1} - \hat{s}^i \quad \text{und} \quad \Delta \hat{s}^T \Delta \hat{s} = h^2 = \text{const.}$$

Die Berücksichtigung der Nebenbedingung in Form einer Gleichungsbeschränkung erfolgt analog zu Abschnitt 5.2.3 über den Lagrange-Multiplikator  $\lambda$ . Die iterative Schätzvorschrift, die man über eine Reihe weiterer Ableitungen erhält (s. [5.13, 5.14]), hat folgende Gestalt:

$$\hat{s}^{i+1} = \hat{s}^i - \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{s}} \nabla Q(\hat{s})^T \Big|_{\hat{s}=\hat{s}^i} - D(\lambda) \right]^{-1} \nabla Q(\hat{s}) \Big|_{\hat{s}=\hat{s}^i}. \quad (5.78)$$

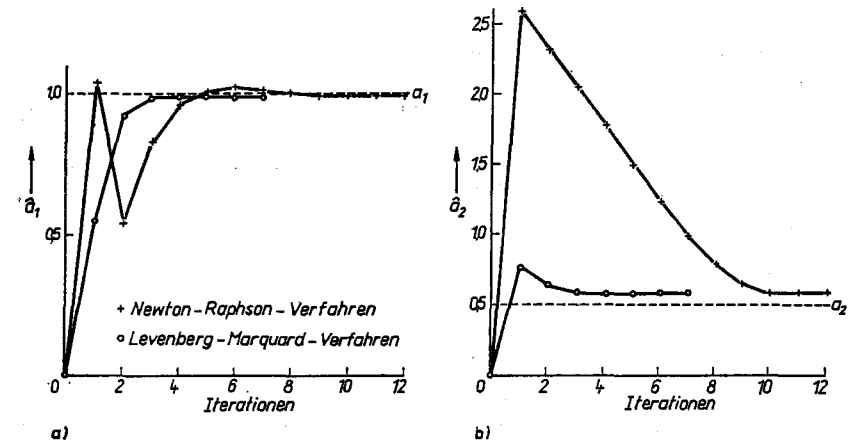
Da für alle  $\lambda < 0$  die zu invertierende Matrix positiv definit ist, ist damit auch für jeden Punkt  $\hat{s} \in S$  die Konvergenz des Verfahrens gesichert. Durch eine geeignete Wahl des Faktors  $\lambda$ , der als ein Maß für die Schrittweite angesehen werden kann, ist das Konvergenzverhalten des Verfahrens gut zu steuern. Im Beispiel 5.4 ist für die Schätzung eines gestörten nichtlinearen Systems das Konvergenzverhalten des Newton-Raphson-Verfahrens mit dem des Levenberg-Marquard-Verfahrens verglichen worden.

| Beispiel<br>5.4 | Untersuchung des Konvergenzverhaltens des Newton-Raphson-Verfahrens<br>mit dem Levenberg-Marquard-Verfahren |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Gegeben:** Systemgleichung  
 $x = 1u_1 + e^{+0,5u_2}$ ,  
 Eingangssignale NV (0, 1), unkorreliert,  
 Störsignal  $z \approx \text{NV}(0; 1, 4)$ ,  
 Modellgleichung  $\hat{x} = a_1 u_1 + e^{a_2 u_2}$ ,  
 Startparametervektor  $\hat{a}(0) = 0$ ,  
 Abbruchgrenze  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

**Gesucht:** Schätzverlauf für die Parameter  $a_1$  und  $a_2$ .

**Ergebnis:** Siehe Bild zu Beispiel 5.4.



Die Schätzverläufe für die Parameter  $a_1$  und  $a_2$  zeigen, daß bei einer geeigneten Wahl von  $\lambda$  die Konvergenz des Levenberg-Marquard-Verfahrens gegenüber dem Newton-Raphson-Verfahren besser ist. Beide Verfahren liefern gute Schätzergebnisse. Wird die Störampplitude noch größer, konvergiert das Newton-Raphson-Verfahren nicht mehr.

## 5.4. Indirekte/rekursive Schätzverfahren

### 5.4.1. Allgemeiner Ansatz

Die rekursiven Algorithmen haben besonders durch die Anwendung von Mikro- und Prozeßrechnern an Bedeutung gewonnen, weil sie einen geringen Speicherplatz benötigen, die Rechenzeit in einem Schritt gering ist und weil sie für die On-line-Datenverarbeitung und Steuerung sehr gut geeignet sind. Außerdem können sie durch geeignete Wahl der Korrekturfaktoren mit „Lerneigenschaften“ ausgerüstet werden, die eine aktuelle Parameter- und Zustandsschätzung zeitvarianter Systeme gestatten.

Sie beruhen darauf, daß die Zielfunktion  $Q$  schrittweise aufgrund neuer Beobachtungen

zum Minimum geführt wird. Die Vielfalt der entwickelten Verfahren kann durch die Grundstrukturen (s. Abschn. 5.1.5.3)

– für kontinuierliche Parameterschätzung

$$\dot{\hat{s}}(t) = -\gamma R' \nabla Q(\hat{s}, t) \quad (5.79)$$

– für diskontinuierliche Parameterschätzung

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + k(k+1) [x(k+1) - m^T(k+1) \hat{s}(k)] \quad (5.80)$$

neuer Parametervektor = alter Parametervektor + Korrekturvektor  $\times$  Vorhersagefehler

beschrieben werden (s. Tafel 5.4).

Entsprechend der üblichen Schreibweise kennzeichnen die in den runden Klammern stehenden Argumente wieder den Zeitpunkt der Abtastung.

In den folgenden Abschnitten sollen die Grundideen wesentlicher Verfahren hergeleitet und das Konvergenzverhalten der Schätzung untersucht und verglichen werden. Dabei werden Verfahren ausgewählt, die sich bei einer Vielzahl von Modelltypen und in der Praxis bewährt haben. Bei der Ableitung der Algorithmen wird von den Gradientenverfahren ausgegangen und gezeigt, daß auch die rekursiven Varianten der MKQ und der VMKQ durch die in Gl. (5.80) angegebene Grundstruktur beschrieben werden können.

## 5.4.2. Gradientenmethoden

### 5.4.2.1. Allgemeine Grundstrukturen

Die Verfahren dieser Gruppe beruhen darauf, daß die Parameteranpassung und -nachführung durch die laufende Korrektur eines zeitlich zurückliegenden Parameterwerts mit Hilfe der Bewertung des Gradienten in Betrag und Richtung erfolgt (s. Tafel 5.4 und Abschn. 5.1.5.3). Im Rahmen dieses Buches werden nur Verfahren vorgestellt, die auf eine Richtungskorrektur des Gradienten verzichten, d. h., es gilt immer  $R = I$ . Weiterhin wird für die Schrittweitenmatrix  $\Gamma$  gesetzt:

$$\Gamma = \gamma I = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_l \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Werden die Schrittweiten  $\gamma_i$  für alle Parameter gleich groß gewählt, gilt

$$\Gamma = \gamma I. \quad (5.82)$$

Damit erhält man für die Einstellvorschriften der Gradientenverfahren im

a) kontinuierlichen Fall

$$\dot{\hat{s}}(t) = -\Gamma \nabla Q(\hat{s}, t), \quad (5.83)$$

b) diskontinuierlichen Fall

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) - \Gamma(k+1) \nabla Q(\hat{s}, k). \quad (5.84)$$

Die kontinuierliche Ermittlung der Parameter erfolgt über eine Integration von Gl. (5.83), d. h. über die Vorschrift

$$\hat{s}(t) = -\Gamma \int_{-\infty}^t \nabla Q(\hat{s}, \tau) d\tau. \quad (5.85)$$

Im Bild 5.15 ist das Konzept der kontinuierlichen Parameterermittlung nach Gl. (5.85) für einen Parameter dargestellt. Es ist zu sehen, daß das Minimum der Zielfunktion  $Q$  und damit der richtige Parameter  $\hat{s} = s$  gefunden wird, indem die Parameteränderung entgegen der Richtung des Gradienten  $\nabla Q$  und mit einer Schrittweite  $\gamma$  erfolgt. Ferner wird sichtbar, daß die Konvergenzgeschwindigkeit bei diesen Verfahren mit der Abnahme des Gradienten auch abnimmt. Das bedeutet, daß theoretisch erst für  $t \rightarrow \infty$  das Minimum erreicht wird.

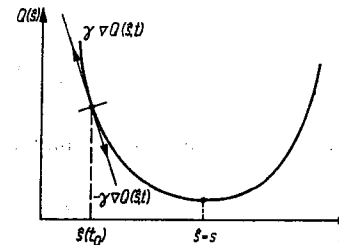


Bild 5.15. Schema der kontinuierlichen Parameterermittlung

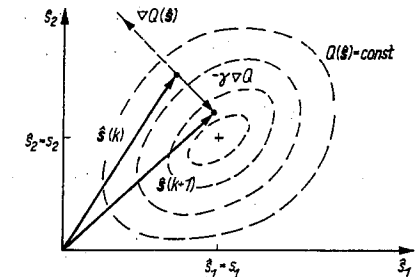


Bild 5.16. Schema der diskontinuierlichen Parameterermittlung

Die diskontinuierliche Parameterermittlung erfolgt direkt nach der Vorschrift in Gl. (5.84). Für die Ermittlung von zwei Parametern ist die Vorgehensweise im Bild 5.16 dargestellt. Typisch ist auch in diesem Fall, daß die Parameteranpassung, d. h. die Suche des Minimums im Gütefeld, von einem Startparametervektor ausgehend, entgegen der Richtung des Gradienten mit einer bestimmten Schrittweite erfolgt. Für die Ableitung der rekursiven Schätzverfahren und ihre einheitliche Darstellung ist es zweckmäßig, in Gl. (5.84) den Gradienten  $\nabla Q(\hat{s}, k)$  für eine vorgegebene Zielfunktion und eine Fehlergleichung analytisch zu berechnen.

Wird als Zielfunktion

$$Q(\hat{s}, i) = \frac{1}{2} e(i)^2; \quad i = k, \dots, k+n \quad (5.86)$$

und als Fehlergleichung der Ausgangsfehler im  $(k+1)$ -ten Schritt

$$e(k+1) = x(k+1) - m(k+1)^T \hat{s}(k) \quad (5.87)$$

verwendet, erhält man für den Gradienten der Zielfunktion den Ausdruck

$$\nabla Q(\hat{s}, k) = -m(k+1)^T [x(k+1) - m(k+1)^T \hat{s}(k)]. \quad (5.88)$$

Unter der Annahme, daß die Schrittweiten in allen Richtungen des Gradienten gleich gewählt werden, d. h.  $\gamma_1(k+1) = \gamma_2(k+1) = \dots = \gamma_l(k+1) = \gamma(k+1)$ , kann mit Gl. (5.88) die Grundstruktur von Gl. (5.84) in die Beziehung

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + \gamma(k+1) m(k+1) [x(k+1) - m(k+1)^T \hat{s}(k)] \quad (5.89)$$

als allgemeine Form der hier dargestellten Gradientenverfahren übergeführt werden. Der Zusammenhang zum Ansatz aller rekursiven Schätzverfahren – s. Gl. (5.80) – ist dann gegeben, wenn

$$\gamma(k+1) m(k+1) = k(k+1) \quad (5.90)$$

gesetzt wird.

Die in der Literatur vorgestellten reinen Gradientenverfahren unterscheiden sich dann nur noch in der Wahl der Schrittweite  $\gamma(k+1)$ . Aus diesem Grund werden in den weiteren Abschnitten typische Vertreter für die Wahl der Schrittweite vorgestellt.

#### 5.4.2.2. Methode der Relaxation

Die Methode der *Relaxation* (REL) wurde zur Lösung determinierter Gleichungssysteme entwickelt [1.36, 5.21]. Bei Vorliegen einer quadratischen Zielfunktion  $Q$  gilt für die Konvergenz des Verfahrens folgende Bedingung für den Korrekturfaktor  $\gamma(k+1)$ :

$$0 < \gamma(k+1) < \frac{c}{\lambda_1} \quad (5.91)$$

Dabei ist  $\lambda_1$  der größte Eigenwert der Matrix  $M^* = mm^T$  und  $c$  eine wählbare Konstante. Mit der Abschätzung

$$\lambda_1 \leq \|m(k+1) m^T(k+1)\| \leq \|m(k+1)\|^2 \quad (5.92)$$

und

$$0 < \gamma(k+1) < \frac{c}{\|m(k+1)\|^2} \leq \frac{c}{\lambda_1}$$

folgt die Schätzgleichung für das Verfahren der Relaxation:

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + \frac{c}{\|m(k+1)\|^2} m(k+1) [x(k+1) - m^T(k+1) \hat{s}(k)]. \quad (5.93)$$

Die Konstante  $c$  liegt nach Schwarz [5.5] für bestimmte Eigenschaften der Matrix  $M^*$  im Bereich  $0 < c < 2$ . Nach Untersuchungen in [1.31] ist die Wahl im Bereich  $0,9 < c < 1$  für viele Aufgaben der Identifikation ausreichend.

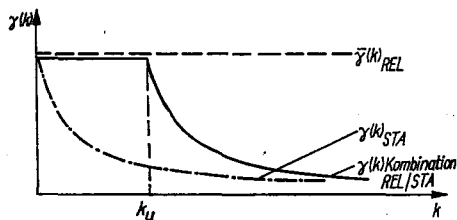


Bild 5.17  
Prinzipieller Verlauf der Schrittweiten  $\gamma(k)$   
bei verschiedenen Gradientenverfahren

Wenn die Streuung der Eingangssignalwerte konstant ist, ist der Mittelwert  $\bar{\gamma}(k)$  auch konstant (Bild 5.17). Dadurch ist das Konvergenzverhalten bei ungestörten bzw. gering gestörten Systemen gut. Die Parameterwerte sind bereits nach 5/ bis 10/ Beobachtungen praktisch konvergiert. Für gestörte Systeme ( $z \geq 10\%$ , bezogen auf die Ausgangsgröße) ist das Verfahren ungeeignet. In den Beispielen 5.5 und 5.6 sind diese Aussagen für einen Testfall dargestellt.

| Beispiel 5.5 | Vergleich des Konvergenzverhaltens von rekursiven Schätzverfahren – ungestörtes System |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------|

Gegeben: Systemgleichung

$$x = \sum_{i=1}^5 a_i u_i$$

$$a^T = [1, 2, -3, -10, 20],$$

Eingangssignale  $u_i \triangleq NV(0, 1)$ ,

$$\text{Modellgleichung } \hat{x} = \sum_{i=1}^5 \hat{a}_i u_i,$$

Startparametervektor  $\hat{a}(0) = 0$ .

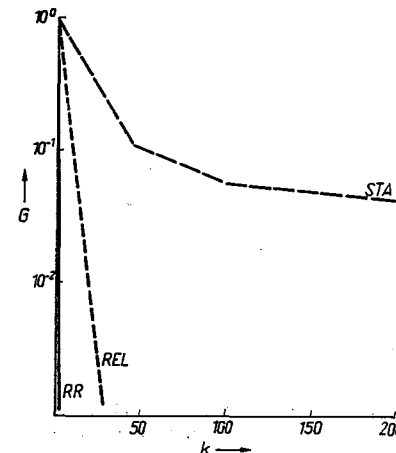
Gesucht: Verlauf des Modellparameterfehlers

$$G = \frac{\|a - \hat{a}(k)\|}{\|a - \hat{a}(0)\|} \quad \text{als Funktion von } k = 1, \dots, n.$$

Ergebnis: 1. Parameterwerte bei  $k = 20$

| Verfahren | $\hat{a}_1$ | $\hat{a}_2$ | $\hat{a}_3$ | $\hat{a}_4$ | $\hat{a}_5$ |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| RR        | 1,00        | 2,00        | -3,00       | -10,00      | 20,00       |
| STA       | 0,66        | 0,17        | 0,67        | -10,93      | 19,29       |
| REL       | 1,44        | 1,75        | -1,91       | -8,94       | 19,33       |

2. Verlauf des Modellfehlers  $G$ .



Die dargestellten Ergebnisse zeigen, daß

- das Konvergenzverhalten des Verfahrens der rekursiven Regression (RR) allen anderen Verfahren überlegen ist,
- das Konvergenzverhalten der Methode der Relaxation (REL) schlechter ist als das der rekursiven Regression, aber wesentlich besser als das der stochastischen Approximation (STA).

### Beispiel 5.6 Vergleich des Konvergenzverhaltens von rekursiven Schätzverfahren – gestörtes System

Gegeben:

Systemgleichung

$$x = \sum_{i=1}^5 a_i u_i + z,$$

$$a^T = [1, 2, -3, -10, 20],$$

Eingangssignale  $u_i \approx NV(0, 1)$ ,Störung  $z \approx NV(0, \alpha); 20\%$ ,

$$\text{Modellgleichung } \hat{x} = \sum_{i=1}^5 \hat{a}_i u_i,$$

Startparametervektor  $\hat{a}(0) = 0$ .

Gesucht:

Verlauf des Modellparameterfehlers  $G$  als Funktion von  $k = 1, 2, \dots, n$ .

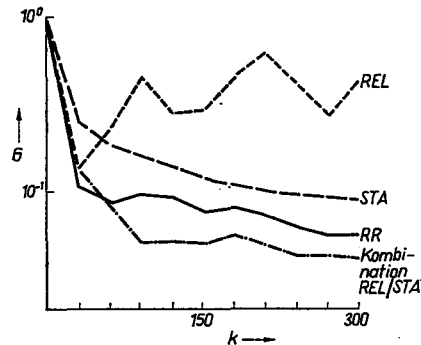
Ergebnis:

1. Parameterwerte  $k = 200$ 

| Verfahren    | $\hat{a}_1$ | $\hat{a}_2$ | $\hat{a}_3$ | $\hat{a}_4$ | $\hat{a}_5$ |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| REL          | 4,37        | 4,44        | -0,86       | -11,25      | 24,08       |
| STA          | 0,14        | 1,31        | -1,48       | -10,81      | 22,12       |
| KOMB/REL-STA |             |             |             |             |             |
| $k_0 = 20$   | 0,19        | 2,34        | -3,15       | -10,32      | 20,64       |
| RR           | 1,18        | 1,98        | -2,82       | -10,90      | 22,07       |

2. Verlauf des Modellfehlers  $G$ .

Siehe Bild zu Beispiel 5.6.



Die Ergebnisse zeigen, daß

1. das Verfahren der Relaxation (REL) für gestörte Systeme ungeeignet ist,
2. die Methoden der rekursiven Regression (RR) und der Kombination Relaxation – stochastische Approximation (REL/STA) konvergieren,
3. das Verfahren der stochastischen Approximation (STA) langsam, aber sicher konvergiert.

Ferner ist das Verfahren der Relaxation bei ungestörten und gering gestörten Systemen in der Lage, zeitvariante Parameter nachzuführen. Ein typischer Schätzverlauf ist im Bild 5.18 dargestellt. Bei tieffrequenten Änderungen der Parameter erreicht das Verfahren fast die Güte der gewichteten rekursiven Regression.

Der rechentechnische Aufwand ist im Vergleich zu den direkten Verfahren und der Methode der rekursiven Regression sehr gering.

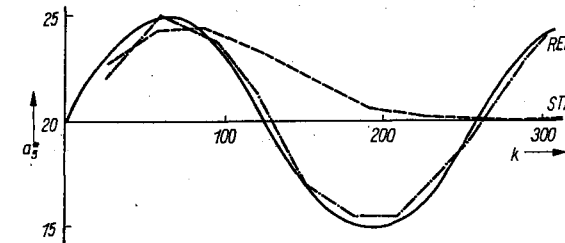


Bild 5.18 Konvergenzverhalten verschiedener Gradientenverfahren bei der Schätzung zeitvarianter Parameter

$$z = 0\%,$$

$$a^T = [\hat{a}_1(k), 2, -3, -10, a_5(k)],$$

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^5 \hat{a}_i u_i, \quad \hat{a}(0) = 0$$

### 5.4.2.3. Methode der stochastischen Approximation

Die Methoden der *stochastischen Approximation* (STA) zählen zu den rekursiven Schätzverfahren und beruhen auf den Arbeiten von *Robbins–Monro* [5.23] und *Kiefer–Wolfowitz* [5.24]. Sie stellen die Anwendung einfacher Gradientenverfahren zur Bestimmung des Extremums einer Zielfunktion unter Verwendung der Gln. (5.84) und (5.86) dar. Damit erhält man als Grundgleichungen für die Verfahren der stochastischen Approximation

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + \Gamma(k+1) m(k+1) [x(k+1) - m(k+1)^T \hat{s}(k)] \quad (5.94)$$

und bei gleicher Schrittweite  $\gamma(k+1)$  für alle Parameter

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + \gamma(k+1) m(k+1) [x(k+1) - m(k+1)^T \hat{s}(k)]. \quad (5.95)$$

Untersuchungen in [5.23, 5.24] haben ergeben, daß der in Gl. (5.94) dargestellte Algorithmus der stochastischen Approximation trotz stochastischer Störungen im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers konvergiert, wenn die Schrittweite  $\gamma(k)$  folgende Eigenschaften besitzt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k)^2 < \infty \quad (5.96)$$

(Dvoretzky-Theorem [5.21]).

Eine allgemeine Berechnungsvorschrift für  $\gamma(k)$  lautet:

$$\gamma(k) = \frac{C_1}{C_2 + C_3^{1-C_4}} \quad (5.97)$$

mit

$$C_1 \geq 1, \quad C_2 \geq 0, \quad C_3 > 0, \quad 0 \leq C_4 \leq 1/2.$$

Zumeist wird die in Gl. (5.97) auch enthaltene einfachste Form benutzt:

$$\gamma(k) = \frac{1}{k}.$$

Das Konvergenzverhalten der stochastischen Approximation ist sehr langsam, aber auch bei gestörten Systemen sicher (s. Beispiele 5.5 und 5.6). Die Ursache ist im Verlauf der Schrittweite  $\gamma(k)$  als Funktion der bereits verarbeiteten Datenmenge zu sehen (s. Bild 5.17). Durch die Abnahme von  $\gamma(k)$  mit Zunahme der Beobachtungsanzahl verliert der Algorithmus die Fähigkeit, Parameteränderungen des Systems zu erkennen und das Modell anzupassen. Daher ist das Verfahren für die Parameterschätzung zeitvarianter Systeme ungeeignet. Für einen Testfall ist dieses Verhalten im Bild 5.18 dargestellt.

#### 5.4.2.4. Kombinierte Methode der Relaxation und der stochastischen Approximation

Aus der Analyse des Konvergenzverhaltens der Methode der Relaxation und der der stochastischen Approximation ist zu erkennen, daß eine Kombination beider Verfahren für die Parameterschätzung zeitinvarianter Systeme sinnvoll ist. Dabei wird folgende Strategie als kombinierte Methode vorgeschlagen [1.31]:

1. Beginn der Schätzung mit der Relaxation, d. h.  $\gamma(k) = \text{const}$ ,
2. Umschalten auf die Methode der stochastischen Approximation nach 2l bis 4l Beobachtungen.

Damit erhält man den im Bild 5.17 dargestellten Verlauf der Schrittweite  $\gamma(k)$ . Als Schätzvorschrift gilt für die Kombination

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + \gamma'(k+1) m(k+1) [x(k+1) - m(k+1)^T \hat{s}] \quad (5.98)$$

mit

$$\gamma'(k+1) = \begin{cases} \frac{c}{\|m(k+1)\|^2} & \text{für } k \leq k_u \\ c_1/k + 1 - k_u & \text{für } k > k_u; \end{cases}$$

$k_u$  Umschaltzeitpunkt.

Die Schätzung konvergiert im Verhältnis zur normalen stochastischen Approximation bei kleiner und mittlerer Störung ( $z < 50\%$ ) wesentlich schneller und erreicht in vielen Fällen die Modellgüte der rekursiven Regression (s. Beispiel 5.6). Für starke Störungen ( $z > 100\%$ ) wird der günstige Umschaltzeitpunkt kleiner und die Güteverbesserung gegenüber der STA gering.

Insgesamt kann eingeschätzt werden, daß die Methode der Relaxation und der stochastischen Approximation sowie ihre Kombination nur dann angewendet werden sollten, wenn nicht genügend Rechenzeit und Speicherplatz für das leistungsstärkere Verfahren der rekursiven Regression zur Verfügung stehen.

### 5.4.3. Methode der rekursiven Regression

#### 5.4.3.1. Ungewichtete rekursive Regression

Die rekursive Methode der Minimierung der kleinsten Quadrate oder die rekursive Regression (RR) ist eines der leistungsstärksten indirekten Parameterschätzverfahren. Ihre Ableitung geht von der Schätzgleichung der Regression Gl. (5.47) aus. Es wird angenommen, daß der Parametervektor  $\hat{s}$  aus  $k$  Beobachtungen geschätzt wurde.

Damit gilt entsprechend Gl. (5.47) für die Schätzvorschrift zum  $k$ -ten Zeitpunkt

$$\hat{s}(k) = [M(k)^T M(k)]^{-1} M^T(k) x(k). \quad (5.99)$$

Steht eine  $(k+1)$ -te Beobachtung, d. h.  $m(k+1)$  und  $x(k+1)$ , zur Verbesserung der Schätzung zur Verfügung, kann von Gl. (5.99) ausgehend für die Schätzvorschrift geschrieben werden:

$$\hat{s}(k+1) = \left[ M(k)^T m(k+1) \right] \left[ \frac{M(k)}{m^T(k+1)} \right]^{-1} \times [M(k)^T m(k+1)] \left[ \frac{x(k)}{x(k+1)} \right]. \quad (5.100)$$

Für die Matrix  $P(k+1)$  gilt dann analog

$$\begin{aligned} P(k+1) &= [M(k+1)^T M(k+1)]^{-1} \\ &= [M(k)^T M(k) + m(k+1) m^T(k+1)]^{-1} \\ P(k+1) &= [P(k)^{-1} + m(k+1) m^T(k+1)]^{-1}. \end{aligned}$$

Unter Anwendung des Inversionslemmas für Matrizen

$$[A + BCB^T]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + B^T A^{-1}B]^{-1} B^T A^{-1}$$

kann Gl. (5.100) umgeformt werden in

$$P(k+1) = P(k) - k(k+1) m^T(k+1) P(k) \quad (5.101)$$

mit

$$k(k+1) = P(k) m(k+1) [1 + m^T(k+1) P(k) m(k+1)]^{-1}.$$

Damit steht eine Vorschrift zur rekursiven Berechnung der Präzisionsmatrix  $P(k)$  zur Verfügung, die die rechentechnisch aufwendige Inversion in Gl. (5.99) umgeht. Es gilt damit für Gl. (5.100)

$$\hat{s}(k+1) = P(k+1) [M(k)^T x(k) + m(k+1) x(k+1)] \quad (5.102)$$

und mit den eingesetzten Beziehungen von Gl. (5.101)

$$\begin{aligned} \hat{s}(k+1) &= P(k) - P(k) m(k+1) [1 + m^T(k+1) P(k) m(k+1)]^{-1} \\ &\quad \times m^T(k+1) P(k) [M(k)^T x(k) + m(k+1) x(k+1)]. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Durch Ausmultiplizieren und einige Umformungen erhält man aus Gl. (5.103)

$$\begin{aligned} \hat{s}(k+1) &= \hat{s}(k) \\ &\quad - P(k) m(k+1) [1 + m^T(k+1) P(k) m(k+1)]^{-1} \\ &\quad \times m(k+1) \hat{s}(k) \\ &\quad + P(k) m(k+1) x(k+1) \\ &\quad - P(k) m(k+1) [1 + m^T(k+1) P(k) m(k+1)]^{-1} \\ &\quad \times m^T(k+1) P(k) m(k+1) x(k+1). \end{aligned} \quad (5.104)$$

Durch Ausklammern der Ausdrücke

$$P(k) m(k+1) x(k+1) \quad \text{und} \quad [1 + m^T(k+1) P(k) m(k+1)]^{-1}$$

aus den letzten beiden Ausdrücken von Gl. (5.104) geht die Bestimmungsvorschrift für die Parameter in den Ausdruck

$$\begin{aligned} \hat{s}(k+1) &= \hat{s}(k) \\ &- P(k) m(k+1) [1 + m^T(k+1) P(k) m(k+1)]^{-1} m(k+1) \hat{s}(k) \\ &+ P(k) m(k+1) x(k+1) [1 + m^T(k+1) P(k) m(k+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (5.105)$$

über. Mit den Vereinbarungen in Gl. (5.101) kann dieser Zusammenhang in die rekursive Schätzvorschrift – *rekursive Regression* – umgeschrieben werden:

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + k(k+1) [x(k+1) - m^T(k+1) \hat{s}(k)]. \quad (5.106)$$

Damit ergibt sich der neue Parametervektor  $\hat{s}(k+1)$  des Modells aus dem alten Parametervektor  $\hat{s}(k)$  plus der mit einem Bewertungsvektor  $k(k+1)$  multiplizierten Differenz  $x(k+1) - \hat{x}(k+1)$  von aktuellem und vorhergesagtem Ausgangssignalwert.

Die Schätzvorschrift der rekursiven Regression ist besonders für On-line-Aufgaben geeignet, da die anfallenden Beobachtungen sofort verarbeitet werden können und die rechentechnisch sehr aufwendige Inversion der Matrix  $M(k)^T M(k)$  entfällt. Diesem Vorteil steht als Nachteil die Wahl geeigneter Startwerte für den Parametervektor  $\hat{s}(0)$  und der Präzisionsmatrix  $P(0)$  gegenüber, die die Konvergenzgeschwindigkeit der Schätzung beeinflussen. Bei Systemen mit zeitvariantem Verhalten konvergiert die Schätzung sicher, wenn

$$\det(M(k)^T M(k)) = \det(P(k)^{-1}) > 0. \quad (5.107)$$

Liegen keine A-priori-Informationen über den Prozeß vor, so ist es am zweckmäßigsten, daß auch die gesamte Information in der Matrix  $[M(k)^T M(k)]$  null ist. Das bedeutet, daß alle Elemente dieser Matrix, nämlich

$$\sum_{i=1}^k m_{ri} m_{ji}; \quad r, j = 1, 2, \dots, l,$$

zu null werden. Als Startmatrix  $P(0)$  würde sich damit ergeben

$$P(0) = [M(0)^T M(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (5.108)$$

Dieser Grenzfall ist nicht zu realisieren. Eine ausreichende Näherung ist gegeben, wenn als Startmatrix

$$P(0) = cI \quad (5.109)$$

mit einem hinreichend großen Wert für  $c$  gewählt wird. Umfangreiche Untersuchungen haben ergeben [1.31], daß bei einer Wahl des Faktors  $c$  im Bereich

$$10^{10} \leq c \leq 10^{15}$$

das Konvergenzverhalten im ungestörten Fall unabhängig vom Startparametervektor  $\hat{s}(0)$  und bei  $l$  Parametern nach  $l$  Schritten die Schätzung konvergiert ist (s. Beispiel 5.6). Bei gestörten Systemen ist je nach der Stärke der Störung der Faktor  $c$  im Bereich

$$10^3 \leq c \leq 10^6$$

zu wählen. Dies gilt auch für Rechner mit einer geringen Genauigkeit. Bei dieser Gestaltung der Startbedingungen für die rekursive Regression ist das Verfahren in der Lage, die Modellparameter sicher an die Systemparameter anzupassen. Auch im gestörten Fall ist die rekursive Regression als eines der leistungsfähigsten Verfahren einzustufen (s. Beispiel 5.6).

Insgesamt ist damit für die rekursive Regression im Vergleich zur Relaxation und stochastischen Approximation folgende Wertung zu geben:

- wesentlich besseres Konvergenzverhalten,
- wesentlich höherer rechentechnischer Aufwand je Datengruppe.

#### 5.4.3.2. Gewichtete rekursive Regression

Eine laufende Nachführung von Modellparametern  $\hat{s}_i$  bei zeitvariantem Systemverhalten ist mit der in Gl. (5.106) angegebenen Schätzvorschrift der rekursiven Regression nicht möglich, da der Algorithmus mit Zunahme der verarbeiteten Datengruppen die Fähigkeit der Modellanpassung verliert (Bild 5.19). Die Ursache liegt im Verhalten der Elemente der Matrix  $P(k)$ , die mit wachsender Datenanzahl gegen Null streben. Ihr prinzipieller Verlauf ist im Bild 5.20 dargestellt. Damit werden auch die Elemente des Bewertungsvektors  $k(k+1)$  zu null, und eine Korrektur des Parametervektors in Gl. (5.106) ist selbst bei einer erkannten Abweichung nicht mehr möglich.

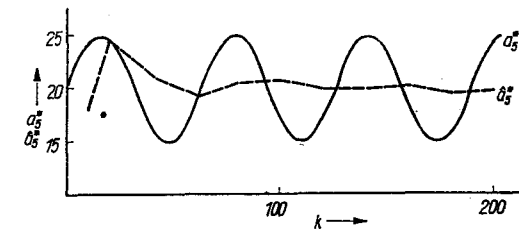


Bild 5.19. Parameternachführung der ungewichteten rekursiven Regression

$$\begin{aligned} z &= 0\%, & a^T &= [a_1(k), 2, -3, -10, a_5(k)], \\ \hat{a}(0) &= 0, & P(0) &= 10^{15} I \end{aligned}$$

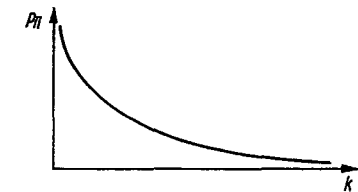


Bild 5.20. Verlauf der Elemente der Matrix  $P$  in Abhängigkeit von den verarbeiteten Datengruppen

Es besteht also die Aufgabe, das Absinken der Werte der Hauptdiagonalen der Matrix  $P(k)$  zu verhindern. Als mögliche Lösungswege bieten sich an

- a) Division der Matrix  $P(k)$  durch einen Wert  $c^2$  ( $0 < c < 1$ ) in jedem Schritt,

$$P^*(k) = \frac{1}{c^2} P(k), \quad (5.110)$$

- b) Addition einer Korrekturmatrix  $P^*$  zur Matrix  $P(k)$  in jedem Schritt,

$$P^*(k) = P(k) + P^*, \quad (5.111)$$

mit

$$P^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_{ll}^* \end{bmatrix}; \quad p_{ii}^* > 0.$$

|              |                                                                         |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Beispiel 5.7 | Einfluß der Änderungsgeschwindigkeit des Parameters auf den Folgefehler |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------|

Gegeben: Systemgleichung

$$x = \sum_{i=1}^5 a_i u_i$$

$$a^T = [1, 2, -3, a_4^*, 20]$$

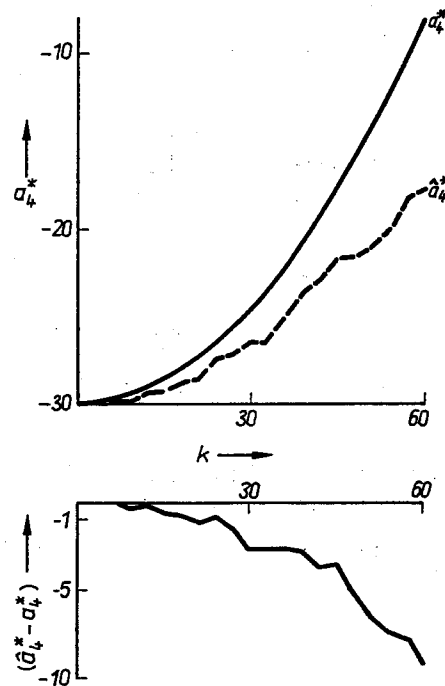
$$a_4^* = -30(1 - 2 \cdot 10^{-4} k),$$

Eingangssignale  $u_i \in \text{NV}(0, 1)$ ,

$$\text{Modellgleichung } \hat{x} = \sum_{i=1}^5 a_i u_i,$$

Wichtungsparameter  $c^2 = 0,95$ ,Startparametervektor  $\hat{a}(0) = 0$ .Gesucht: Schätzverlauf für den zeitvarianten Parameter  $a_4^*$ .

Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 5.7.



Der Schätzverlauf zeigt, daß bei einer konstanten Wichtung mit der Zunahme der Änderungsgeschwindigkeit der Folgefehler zunimmt. Damit wird sichtbar, daß im ungestörten Fall die Vergessensrate zunehmen muß, wenn die Änderungsgeschwindigkeit der Parameter wächst.

Damit erhält man aus den Gln. (5.101) und (5.106) für den Algorithmus der gewichteten rekursiven Regression die Beziehungen

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + k^*(k+1) [x(k+1) - m^T(k+1) \hat{s}(k)]$$

$$k^*(k+1) = P^*(k) m(k+1) [1 + m^T(k+1) P^*(k) m(k+1)]^{-1}$$

$$P^*(k) = \frac{1}{c^2} P(k), \quad P^*(k) = P(k) + P^*$$

$$P(k) = P^*(k-1) - P^*(k-1) m(k) [1 + m^T(k) P^*(k-1) m(k)]^{-1} \times m^T P^*(k-1). \quad (5.112)$$

Die Korrektur der Matrix  $P(k)$  nach den angegebenen Strategien bedeutet, daß die am weitesten zurückliegenden Daten mit dem kleinsten Gewicht in die Schätzung eingehen sollen. Für die Vorgehensweise in Gl. (5.110) soll dies kurz aufgezeigt werden. Multipliziert man in jedem Tastschritt die Meßwertmatrix  $M(k)$  mit der Konstanten  $c$ , so erhält man die gewichtete Matrix  $M^*(k)$ :

$$M^*(k) = \begin{bmatrix} c^k m_{11} & \dots & c^k m_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ c^2 m_{1k-1} & \dots & c^2 m_{ik-1} \\ c m_{1k} & \dots & c m_{ik} \end{bmatrix}. \quad (5.113)$$

Damit gilt für die Matrix  $P^*(k)$ :

$$P^*(k) = [cM(k)^T cM(k)]^{-1} = \frac{1}{c^2} P(k). \quad (5.114)$$

Die Wichtung der Datensätze kann durch sehr viele Formen vorgenommen werden [1.34, 1.31, 5.34]. Praktisch bewährt haben sich aufgrund der einfachen Realisierbarkeit und der hohen Leistungsfähigkeit die exponentielle, die blockweise und die gezielte Wichtung.

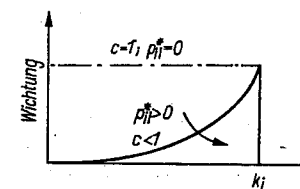


Bild 5.21  
Verlauf der Datenwichtung  
bei einer exponentiellen Wichtung

**Exponentielle Wichtung.** Wird der Wichtungsparameter  $c$  im Bereich  $0 < c < 1$  bzw. werden die Werte  $p_{ii}^* > 0$  gewählt und in allen  $k$  Schritten konstant gehalten, ergibt sich der im Bild 5.21 dargestellte prinzipielle Verlauf für die Datenwichtung. Als Grenzwert ist der ungewichtete Fall (d.h.  $c = 1$  oder  $p_{ii}^* = 0$ ) eingetragen. Je kleiner der Wert von  $c$  und je größer die Werte  $p_{ii}^*$  sind, um so größer ist das „Vergessen“ der weiter zurückliegenden Daten und um so größer ist die Fähigkeit, Änderungen der Systemparameter zu erkennen und diesen zu folgen (s. Beispiel 5.7). Auf der anderen Seite nimmt die Fähigkeit, Störungen herauszumitteln, bei dieser Gestaltung der Wichtungsfaktoren ab. Nimmt die Wichtung der zurückliegenden Daten zu stark ab, kann der Algorithmus der rekursiven Regression instabil werden, weil zuwenig Datensätze zur Lösung des Gleichungssystems vorhanden sind. Die exponentielle Wichtung ist immer dann anzuwenden, wenn sich die Systemparameter laufend ändern oder der Zeitpunkt des Beginns der Änderung nicht bekannt ist.

**Blockweise Wichtung.** Eine blockweise Wichtung wird dadurch erreicht, daß für die Wichtungsparameter in Gl. (5.110) und in Gl. (5.111) gesetzt wird (Bild 5.22)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad c &= \begin{cases} 0 & \text{für } k < k_i \\ 1 & \text{für } k \geq k_i, \end{cases} \\ \text{b)} \quad p_{ii}^* &= \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq k_i \\ 10^{15} \dots 10^6 & \text{für } k = k_i. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.115)$$

In Gl. (5.115) bedeutet  $k_i$  den Zeitpunkt einer einmaligen Parameteränderung oder der letzten zyklischen Aktualisierung des Modells. Der prinzipielle Verlauf der Datenwichtung ist im Bild 5.22 dargestellt. Ihre Anwendung ist dann sinnvoll, wenn eine Modellanpassung zyklisch in größeren Abständen erfolgen oder nach Überschreiten von Toleranzbändern des Fehlers ausgelöst werden soll.

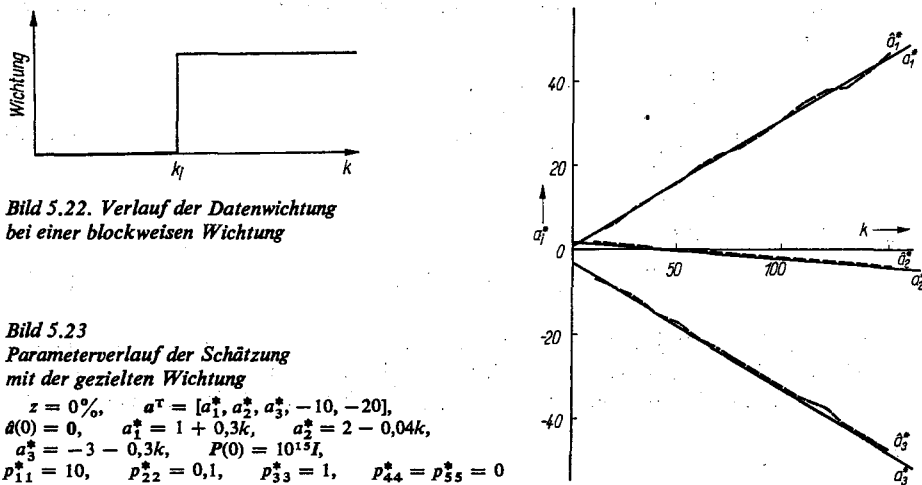


Bild 5.23  
Parameterverlauf der Schätzung  
mit der gezielten Wichtung

$$\begin{aligned} z &= 0\%, \quad a^T = [a_1^*, a_2^*, a_3^*, -10, -20], \\ \hat{a}(0) &= 0, \quad a_1^* = 1 + 0,3k, \quad a_2^* = 2 - 0,04k, \\ a_3^* &= -3 - 0,3k, \quad P(0) = 10^{15}I, \\ p_{11}^* &= 10, \quad p_{22}^* = 0,1, \quad p_{33}^* = 1, \quad p_{44}^* = p_{55}^* = 0 \end{aligned}$$

**Gezielte Wichtung.** Die Datenwichtung entsprechend Gl. (5.111) ermöglicht eine sehr einfache und selektive Wahl der Wichtung und damit des Vergessens, entsprechend der Änderung jedes einzelnen Parameters. Über die Beziehung der Kovarianzmatrix für die Parameter von Gl. (5.51) existiert eine feste Zuordnung der Elemente  $p_{ii}^*$  und der Varianz der Parameter. Sind einige Parameter nicht zeitvariant, sind die Wichtungswerte  $p_{ii}^*$  null zu setzen, da dann die Gesamtvarianz minimal wird. Für die zeitvarianten Parameter sind die Wichtungsparameter  $p_{ii}^*$  in Gl. (5.111) gezielt entsprechend der Änderungsgeschwindigkeit zu wählen, wobei für hohe Änderungsgeschwindigkeiten größere Werte für die Elemente  $p_{ii}^*$  zu nehmen sind.

Dabei ist nach [1.31] der Wertebereich von  $10^{-2} \leq p_{ii} \leq 10^2$  in den meisten Fällen ausreichend. Bild 5.23 zeigt aber auch, daß eine gewisse Unempfindlichkeit bei der Wahl der Wichtungsparameter besteht.

Dagegen wirken sich die gezielte und die ungezielte Wichtung enorm auf den Modellfehler aus. Im Beispiel 5.8 sind sowohl der Modellfehler  $G$  als auch die Parameterwerte der zeitinvarianten Parameter in Abhängigkeit von der Wichtungsart dargestellt. Deutlich ist die Überlegenheit der gezielten Wichtung in beiden Darstellungen zu erkennen.

Beispiel  
5.8

Einfluß einer gezielten und ungezielten Wichtung auf die Modellgüte

Gegeben:

Systemgleichung

$$x = \sum_{i=1}^5 a_i u_i + z,$$

$$a^T = [a_1^*, 2, -3, -10, a_5^*],$$

$$a_1^* = 1 + 0,25 \sin k/10, \quad a_5^* = 20 + 5 \sin k/10,$$

Eingangssignale  $u_i \triangleq NV(0, 1)$ ,

Störung  $z \triangleq NV(0, \alpha); 10\%$ ,

$$\text{Modellgleichung } \hat{x} = \sum_{i=1}^5 \hat{a}_i u_i,$$

$$\text{Startparameter } \hat{a}(0) = 0, P(0) = 10^{15}I.$$

Gesucht:

Einfluß der Wichtungsmatrix  $P^*$  auf den Modellfehler und die Parameterwerte.

Ergebnis:

1. Modellfehler

|                  |                                                                                               |                                                                                                              |                                                                                                     |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $P^*$            | $\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 10^2 & & & & \\ & 10^2 & & & \\ & & 10^2 & & \\ & & & 10^2 & \\ & & & & 10^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 10^2 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 10^2 \end{bmatrix}$ |
| Modellfehler $G$ | $2,2 \cdot 10^{-1}$                                                                           | $7,5 \cdot 10^{-2}$                                                                                          | $9 \cdot 10^{-3}$                                                                                   |

2. Parameterwerte bei  $k = 40$

|             |                                                                                                              |                                                                                                     |  |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $P^*$       | $\begin{bmatrix} 10^2 & & & & \\ & 10^2 & & & \\ & & 10^2 & & \\ & & & 10^2 & \\ & & & & 10^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 10^2 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 10^2 \end{bmatrix}$ |  |
| $\hat{a}_2$ | 1,77                                                                                                         | 1,99                                                                                                |  |
| $\hat{a}_3$ | -2,76                                                                                                        | -3,00                                                                                               |  |
| $\hat{a}_4$ | -9,77                                                                                                        | -10,00                                                                                              |  |

Die Ergebnisse zeigen, daß die Modellgüte durch eine gezielte Wichtung wesentlich verbessert werden kann. Dies gilt besonders für die Güte der zeitinvarianten Parameter.

#### 5.4.4. Methode der rekursiven verallgemeinerten Regression

Die im Abschnitt 5.2.4 vorgestellte Methode der verallgemeinerten Regression und ihres Spezialfalls, der Markov-Schätzung, sind für eine Echtzeitparameterschätzung ungeeignet. Deshalb soll in diesem Abschnitt ein Weg zur rekursiven Lösung der Schätz Aufgabe vorgestellt werden. Den Ausgangspunkt der rekursiven Variante der Verfahren bildet die Schätzvorschrift

$$\hat{s} = [M^T W^{-1} M]^{-1} M^T W^{-1} x, \quad (5.116)$$

die unter der Annahme, daß die Matrix  $W$  eine doppelt symmetrische Gestalt besitzt, durch eine Cholesky-Zerlegung der Art

$$W = R^T R$$

in die Form

$$\hat{s} = [\tilde{M}^T \tilde{M}]^{-1} \tilde{M}^T \tilde{x} \quad (5.117)$$

übergeführt werden kann; s. Abschnitt 5.2.4, Gln. (5.68) bis (5.70). Aus Gl. (5.117) kann in Analogie zur Ableitung des Verfahrens der rekursiven Regression (s. Abschn. 5.3.3) die rekursive Form der verallgemeinerten Regression hergeleitet werden. Als Ergebnis erhält man für die Schätzvorschrift folgende Beziehungen:

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + \tilde{k}(k+1) [\tilde{x}(k+1) - \tilde{m}(k+1)^T \hat{s}(k)] \quad (5.118)$$

$$\tilde{k}(k+1) = P'(k) \tilde{m}(k+1) [1 + \tilde{m}(k+1)^T P'(k) \tilde{m}(k+1)]^{-1}$$

$$P'(k+1) = P'(k) - \tilde{k}(k+1) \tilde{m}(k+1)^T P'(k).$$

Der rekursive Algorithmus ist in der Lage, das Modell dem System anzupassen und bei zusätzlicher entsprechender Wichtung der Daten durch eine der im Abschnitt 5.3.3.2 dargestellten Formen auch nachzuführen. Rechentechnisch hat er gegenüber der direkten Methode wesentliche Vorteile, weil eine Inversion entfällt. Problematisch bleibt die Ermittlung und die hohe Dimension der Wichtungsmatrix  $W$ .

Wird davon ausgegangen, daß die Wichtungsmatrix  $W$  durch die Kovarianzmatrix der Störung  $Z$  ersetzt wird (Markov-Schätzung), kann eine sehr günstige Strategie zur Ermittlung der Wichtungsmatrix gefunden werden [1.31, 5.31]. Wie bereits im Abschnitt 5.2.4 vorgestellt, ist es zweckmäßig, die häufig unbekannte Kovarianzmatrix der Störung  $Z$  durch die des Fehlers  $E$  zu approximieren. Der Fehler  $e$  steht bei den rekursiven Verfahren – s. Gl. (5.118) – in jedem Schritt zu Verfügung. Die Kovarianzmatrix des Fehlers hat dann folgende Gestalt:

$$E = \begin{bmatrix} \hat{R}_{ee}(0) & \dots & \hat{R}_{ee}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_{ee}(k) & \dots & \hat{R}_{ee}(0) \end{bmatrix} \quad (5.119)$$

Die Elemente der Kovarianzmatrix werden ebenfalls rekursiv nach folgenden Beziehungen berechnet:

Schritt 1

$$\hat{R}'_{ee, k+1}(i) = \hat{R}'_{ee, k}(i) + e(k+1) e(k+1-i); \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (5.120)$$

Schritt 2

$$\hat{R}_{ee, k+1}(i) = \frac{\hat{R}'_{ee, k+1}(i)}{\hat{R}'_{ee, k+1}(0)} \frac{k+1}{k+1-i}. \quad (5.121)$$

Als sehr erschwerend für den Echtzeitbetrieb bleibt nach wie vor die mit der Datenanzahl zunehmende Dimension der Kovarianzmatrix  $E$  des Fehlers. Wird davon ausgegangen, daß die Störung  $z$  keine periodischen Komponenten und keinen Gleichanteil enthält, werden die Elemente der Kovarianzmatrix  $R_{ee}(i)$  für eine endliche Verschiebung  $i_{\max}$

gegen Null streben, d. h.  $R_{ee}(i_{\max}) \approx 0$ . Dann geht die Matrix  $E$  in eine Bandmatrix der Form

$$E = \begin{bmatrix} \hat{R}_{ee}(0) & \dots & \hat{R}_{ee}(i_{\max}) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_{ee}(i_{\max}) & \dots & \hat{R}_{ee}(0) & \dots & \hat{R}_{ee}(i_{\max}) \\ 0 & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \hat{R}_{ee}(i_{\max}) & \dots & \hat{R}_{ee}(0) \end{bmatrix}$$

über. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die A-priori-Information in einer Fehlerkovarianzmatrix  $E$  der Dimension  $(i_{\max} + 1)(i_{\max} + 1)$  anstelle der Matrix  $Z$  der Dimension  $(k \times k)$  näherungsweise zu erfassen. Der Aufbau der angenäherten Kovarianzmatrix und die Einschränkung auf die Dimension der Korrelationstiefe  $i_{\max}$  führen aufgrund der Symmetrie der Matrix zu einfachen Prozeduren bei der Berechnung der für die Transformation benötigten Matrix  $(R^{-1})^T$ . Da die Transformationsmatrix auch die Dimension  $(i_{\max} + 1)$  hat, werden zur Realisierung der Transformation – s. Gl. (5.69) – des  $k$ -ten Meßwertsatzes von  $m$  und  $x$  außer der Transformationsmatrix noch die  $i_{\max}$  zurückliegenden Datensätze von  $x$  und  $m$  benötigt. Sie müssen in einem Meßwertpuffer gespeichert werden. Er arbeitet folgendermaßen:

1. Der älteste Meßwertsatz im Puffer wird durch den nächstältesten überschrieben.
2. Alle übrigen Meßwertsätze rücken nach.
3. Der Puffer wird mit dem jüngsten Meßwertsatz aufgefüllt.

Diese Stufen wiederholen sich in jedem Schritt. Die Berechnung des  $k$ -ten transformierten Meßwertsatzes erfolgt entsprechend Gl. (5.69) durch die Multiplikation der  $(i_{\max} + 1)$ -ten Zeile von  $(R^{-1})^T$  mit den Spalten des Meßwertpuffers. Damit gilt allgemein mit  $i_{\max} + 1 = j$

$$[\tilde{m}(k); \tilde{x}(k)] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1j} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{j1} & r_{j2} & \dots & r_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{k-j+1} & \dots & m_{k-j+1} & x_{k-j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{k-1} & \dots & m_{k-1} & x_{k-1} \\ m_{k,1} & \dots & m_{k,1} & x_k \end{bmatrix}. \quad (5.122)$$

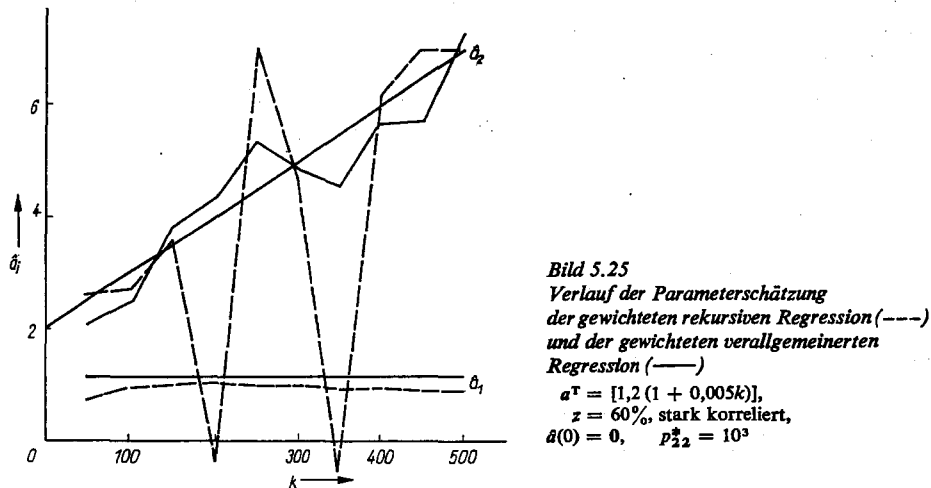
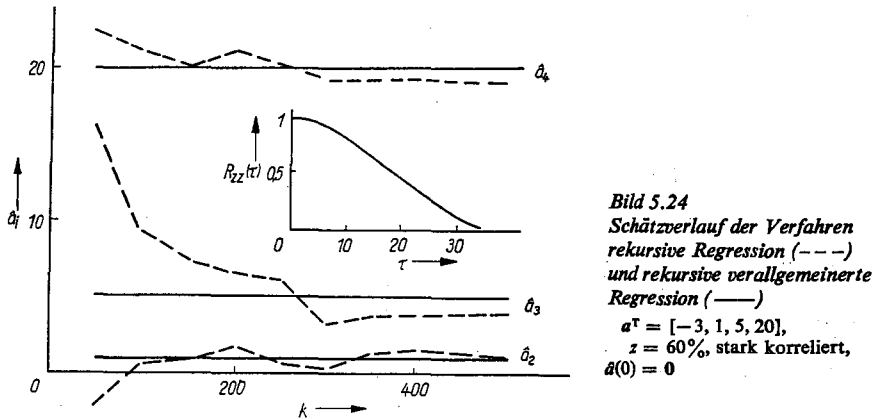
Mit Gl. (5.122) wird deutlich, daß zur Realisierung der erforderlichen Transformation nur noch  $i_{\max}$  zurückliegende Meßwerte anstelle der ständig wachsenden Meßwertzahl  $k$  benötigt werden. Außerdem ist zur Transformation von der Matrix  $(R^{-1})^T$  nur die letzte Zeile erforderlich. Diese mit der Näherung der Kovarianzmatrix erzielten Vorteile gestatten den effektiven Einsatz der rekursiven verallgemeinerten Regression [1.31, 5.31].

Da vor allem in der Startphase durch große Parameterabweichungen des Modells von denen des Systems auch der Fehler stark von der Störung  $z$  abweicht, ist es günstig, durch eine Versuche mit der Regression oder der rekursiven Regression über  $k \geq i_{\max}$  Beobachtungen ein Startmodell für die Parameter und die Kovarianzmatrix des Fehlers zu ermitteln. Danach erfolgt die Parameterschätzung nur mit der rekursiven verallgemeinerten Regression.

Das generelle Verhalten dieser Schätzmethode entspricht der rekursiven Regression. Bezüglich ihres Einsatzes gelten die im Abschnitt 5.2.4 zum Vergleich Regression-verallgemeinerte Regression getroffenen Aussagen.

Im Bild 5.24 ist der Schätzverlauf einiger Parameter für die rekursive Regression und für die rekursive verallgemeinerte Regression eines gestörten Systems dargestellt. Nach

relativ wenigen Beobachtungen ist die Schätzung der rekursiven verallgemeinerten Regression schon gut konvergiert; dagegen liegen noch relativ große Parameterfehler beim Verfahren der rekursiven Regression vor. Die gleiche Aussage kann für die Parameterschätzung zeitvarianter Systeme getroffen werden (Bild 5.25).



## 5.5. Methoden der optimalen Versuchsplanung

### 5.5.1. Zielstellung und ausgewählte Grundlagen

Die Methoden der optimalen Versuchsplanung [1.39, 1.42, 1.43, 1.48, 5.35 bis 5.42] zur Parameterschätzung statischer Systeme dienen dem Ziel, durch eine geeignete Wahl der Eingangsgrößen (Vorzeichen, Amplituden) die Güte der Schätzung weiter zu verbessern. Gleichzeitig soll durch die gezielte Planung der Experimente der Beobachtungs- und

Bearbeitungsaufwand minimiert werden. Als Optimalitätskriterien kommen somit in Frage

1. ein maximal nutzbarer Informationsgewinn,
2. eine möglichst geringe Anzahl von Experimenten,
3. eine statistische Unabhängigkeit der Parameterschätzungen,
4. ein geringer rechentechnischer Aufwand.

Es wird nun davon ausgegangen, daß als Parameterschätzverfahren die MKQ (s. Abschnitt 5.2) verwendet wird. Dieses Verfahren liefert unter bestimmten Bedingungen optimale Schätzungen für die Parameter. Wie bereits gezeigt wurde, hängt die zu erreichende Präzision der Schätzung wesentlich von der Wahl der Eingangsgrößen ab. Entsprechend den Betrachtungen im Abschnitt 5.2 ist der Zusammenhang zwischen der Modellgüte und den Werten der Eingangsgrößen durch die Beziehungen

$$\text{COV} \{\hat{s}\} = [M^T M]^{-1} \sigma_z^2 \quad (5.123)$$

und

$$\text{var} \{\hat{s}\} = \sigma_z^2 m^T [M^T M]^{-1} m \quad (5.124)$$

unmittelbar gegeben. Der Entwurf optimaler Werte der Eingangsgrößen erfolgt durch Ausnutzung einer der beiden Beziehungen u. a. mit dem Ziel, die Varianzen/Kovarianzen der Parameter und/oder Varianzen des geschätzten Ausgangs zu minimieren. Um das Problem des Entwurfs optimaler Versuchspläne lösen zu können, wird die Struktur des Systems als bekannt vorausgesetzt. Im allgemeinen wird das System hinreichend durch ein Polynom vom Grade  $d$  approximiert in der Form

$$\begin{aligned} \hat{x} = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^l \hat{a}_i u_i + \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=i+1}^l \hat{a}_{ij} u_i u_j \\ + \sum_{i=1}^l \hat{a}_{ii} u_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^l \hat{a}_{ii \dots i} u_i^d. \end{aligned} \quad (5.125)$$

In Vektorschreibweise und bei Verwendung der allgemeinen Systembeschreibung gilt somit

$$\hat{x} = m^T \hat{s}$$

mit

$$m^T = [1, u_1, \dots, u_l, u_1 u_2 \dots u_l^2, \dots, u_l^d]$$

$$\hat{s}^T = [\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_l, \hat{a}_{12} \dots \hat{a}_{ll}, \dots, \hat{a}_{ll \dots l}].$$

Von praktischer Bedeutung sind dabei folgende Strukturannahmen für das Modell:

a) Polynome 1. Ordnung

$$\hat{x} = m^T \hat{s} \quad (5.126)$$

mit

$$m^T = [1, u_1, u_2, \dots, u_l]$$

$$\hat{s}^T = [\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_l].$$

b) Polynom 2. Ordnung

$$\hat{x} = m^T \hat{s}$$

mit

$$M^T = [1, u_1, \dots, u_l; u_1 u_2, \dots, u_{l-1} u_l; u_1^2, \dots, u_l^2]$$

$$S^T = [\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_l; \hat{a}_{12}, \dots, \hat{a}_{l-1, l}; \hat{a}_{11}, \dots, \hat{a}_{ll}].$$

Ansätze höherer Ordnung werden selten benötigt und daher im Rahmen dieses Buches nicht weiter behandelt.

Bevor auf die Erstellung von Versuchsplänen für die in den Gln. (5.125) und (5.126) genannten Systemstrukturen eingegangen wird, soll auf einige Grundbegriffe der Versuchsplanung hingewiesen werden.

Unter einem Versuch wird im folgenden die Gewinnung eines Wertes der Ausgangsgröße  $x$  in einem vorgegebenen Versuchspunkt  $u_i$  bezeichnet. Alle Punkte  $u_i; i = 1, 2, \dots, n$ , in denen Versuche realisiert werden können, werden zum Versuchsbereich  $V$  zusammengefaßt. Die Gesamtheit aller zu realisierenden Versuche wird als Versuchsplan bezeichnet.

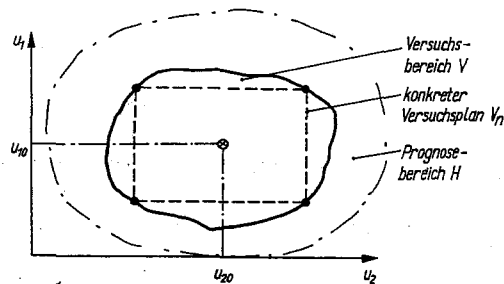


Bild 5.26  
Versuchsplangebiete  
für zwei Eingangsgrößen

● Versuche für  $u_1$  und  $u_2$   
⊗ Arbeitspunkt

Im Bild 5.26 ist für zwei Eingangsgrößen ein möglicher Versuchsbereich dargestellt. Eine Auswahl von  $n$  voneinander verschiedenen Punkten  $u_1, u_2, \dots, u_n$  aus dem Bereich  $V$ , in denen je ein Versuch durchgeführt werden soll, nennt man einen konkreten Versuchsplan  $V_n$  vom Umfang  $n$  (s. Bild 5.26). Um die mit einem konkreten Versuchsplan  $V_n$  zu erzielende Parametergüte zu beschreiben, wurde in Anlehnung an die für normalverteilte Ausgangsgrößen  $x$  geltende *Fishersche Informationsmatrix*

$$J = \sigma_x^2 (M^T M) \quad (5.127)$$

für die Schätzung  $\hat{s}$  der Begriff der *Informationsmatrix* des konkreten Versuchsplans  $V_n$  eingeführt:

$$J(V_n) = \frac{1}{n} M^T M. \quad (5.128)$$

Damit gilt für die Kovarianzmatrix der Parameter – s. Gl. (5.123) –

$$\text{COV} \{\hat{s}\} = \frac{\sigma_x^2}{n} J(V_n)^{-1}. \quad (5.129)$$

Insgesamt wird deutlich, daß die für die Beurteilung der Güte des konkreten Versuchsplans verwendeten Beziehungen der Gln. (5.123), (5.124) und (5.129) nur von den Meßpunkten  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , d.h. vom konkreten Versuchsplan  $V_n$ , abhängen. Jede Optimierung der Genauigkeit setzt damit voraus, daß eine Möglichkeit geschaffen wird, die Matrizen  $M^T M$  oder ihre Inversen für verschiedene Versuchspläne miteinander zu vergleichen.

Die Möglichkeit ist durch die Verwendung von Funktionalen gegeben, mit denen die Matrix  $M^T M$  auf die reelle Achse abgebildet wird. Bei  $n$  Versuchen des Planes ist die Informationsmatrix  $J(V_n)$  proportional zur Matrix  $M^T M$ . Die Optimierung muß sich damit über alle konkreten Versuchspläne  $V_n$  erstrecken. Die Menge der Pläne wird mit  $\{V_n\}$  gekennzeichnet. Durch die Beziehung von  $J(V_n)^{-1}$  mit der Kovarianzmatrix  $\text{COV} \{\hat{s}\}$  entsprechend Gl. (5.129) ergeben sich auch gute Möglichkeiten für eine Interpretation der Optimalitätskriterien.

Aus der Vielzahl der in der Literatur [1.39, 1.42, 1.43] vorgeschlagenen und untersuchten Kriterien werden im Rahmen dieses Buches wegen ihrer Praxisrelevanz folgende ausgewählt:

### 1. D-Optimalität

Ein konkreter Versuchsplan  $V_n^*$  heißt *D-optimal*, wenn die Beziehung

$$\min_{V_n \in \{V_n\}} \det(J(V_n)^{-1}) = \det(J(V_n^*)^{-1}) \quad (5.130)$$

erfüllt ist. Ist der Ausgangsvektor  $x$  normalverteilt, wird damit auch das Volumen des Streuungsellipsoids der Parameterschätzung  $\hat{s}$  minimiert [1.42].

### 2. A-Optimalität

Ein konkreter Plan  $V_n^*$  heißt *A-optimal*, wenn gilt

$$\min_{V_n \in \{V_n\}} \text{Sp } J(V_n)^{-1} = \text{Sp } J(V_n^*)^{-1} \quad (5.132)$$

Die Elemente der Hauptdiagonalen von  $J(V_n)^{-1}$  sind bis auf einen konstanten Faktor die Varianzen der Schätzungen. Der A-optimale Versuchsplan minimiert die mittlere Varianz der Parameterschätzungen [1.42].

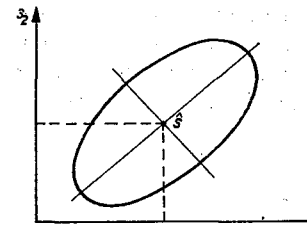


Bild 5.27  
Streuungsellipsoid für die Schätzung  
von zwei Parametern

Da die Spur auch gleich der Summe der Halbachsenlängen des Streuungsellipsoids ist, wird durch dieses Kriterium [1.42, 1.48] auch die mittlere Halbachsenlänge des Streuungsellipsoids der Parameterschätzungen  $\hat{s}$  minimiert (Bild 5.27). Die genannten Kriterien beziehen sich auf die Schätzung des Parametervektors  $s$  und sind daher unabhängig vom vorgegebenen Prognosebereich  $H$  (Bereich, der alle  $u$  enthält, für die Schätzwerte  $\hat{x}$  bzw.  $\hat{s}$  betrachtet werden sollen; s. Bild 5.27).

Wird die Ausgangsgröße  $x$  betrachtet, spielt der Bereich  $H$  eine Rolle. Damit gelangt man zum Begriff der G-Optimalität.

### 3. G-Optimalität

Ein konkreter Versuchsplan  $V_n^*$  heißt *G-optimal*, wenn gilt [1.42]

$$\min_{V_n \in \{V_n\}} \max_{u \in H} m^T J(V_n)^{-1} m = \max_{u \in H} m^T J(V_n^*)^{-1} m. \quad (5.133)$$

Ein  $G$ -optimaler Versuchsplan minimiert den maximalen Wert der Varianzfunktion des geschätzten Ausgangs, d.h.  $\text{var}\{\hat{x}\}$  im Bereich  $H$ .

Aus der Literatur (s. z.B. [1.39, 1.42, 1.43]) sind eine Reihe weiterer Optimalitätskriterien für den Entwurf von konkreten Versuchsplänen bekannt, die jedoch hier nicht näher betrachtet werden sollen.

Die Menge aller möglichen Versuchspläne mit einem Umfang  $n$  ist häufig von sehr unübersichtlicher und komplizierter Struktur. Deshalb werden aus praktischen Gründen nur gewisse Teilmengen der möglichen Versuchspläne mit einfacherer Struktur verwendet. Die Auswahl erreicht man, indem man von den Plänen zusätzliche Eigenschaften fordert. Diese sind die Orthogonalität und die Drehbarkeit.

**Orthogonalität.** Ein konkreter Versuchsplan  $V_n$  soll *orthogonal* genannt werden, wenn seine Informationsmatrix  $J(V_n)$  eine Diagonalmatrix ist. Die Zeilen von  $M^T$  sind dann paarweise orthogonale Vektoren. Die Schätzungen nach Gl. (5.47) sind für die einzelnen Koeffizienten des gewählten Ansatzes unkorreliert.

**Drehbarkeit.** Ein konkreter Versuchsplan  $V_n$  für einen zum Koordinatenursprung symmetrischen Versuchsbereich  $V$  soll *drehbar* genannt werden, wenn die Varianzfunktion  $\text{var}\{\hat{x}\}$  der Schätzung für  $x$  nur vom Abstand  $\varrho = |u|$  des Punktes  $u$  vom Ursprung abhängt, d.h. es gilt [1.41]:

$$\text{var}\{\hat{x}\} = \sigma_x^2 m^T [M^T M]^{-1} m = h(\varrho). \quad (5.134)$$

Die Realisierung der beiden genannten Eigenschaften führt zu sehr praktikablen Versuchsplänen. Die Güte der Parameterschätzung wird nicht verändert.

Der allgemeine Entwurf der Versuchspläne nach diesen Kriterien ist sehr aufwendig und der Spezialliteratur zu entnehmen (z.B. [1.42, 1.48, 5.36, 5.38, 5.43]). Im Rahmen dieses Buches wird nur der Entwurf von Versuchsplänen für Polynomansätze  $k$ -ter Ordnung, die auf den Arbeiten von *Box* und *Hunter* [5.44] beruhen, dargestellt.

Im folgenden Abschnitt werden deshalb orthogonale und drehbare Versuchspläne vorgestellt, die das Systemverhalten durch Polynomansätze 1. und 2. Ordnung – siehe Gl. (5.125) und (5.126) – annähern, weitere zusätzliche praktische Forderungen erfüllen und bezüglich eines oder mehrerer Kriterien ( $D$ -,  $A$ -,  $G$ -) optimal sind. Diese Versuchspläne werden als Mehrfaktorpläne bezeichnet.

## 5.5.2. Mehrfaktorpläne für lineare Modelle

### 5.5.2.1. Allgemeine Betrachtungen

Im Abschnitt 5.5.1 wurde ein wahres Modell vorausgesetzt. Bei einer praktischen Aufgabenstellung ist aber in den meisten Fällen die wahre Systemstruktur unbekannt. Daraus folgt, daß für diesen Fall nicht mehr die Aussage des Gauß-Markov-Theorems gilt, die MKQ sei die beste lineare erwartungstreue Schätzung. Es wird deshalb auch keine Optimierung der bisher betrachteten Kriterien durch den Versuchsplan mehr gefordert. Man versucht dagegen praktisch motivierte Forderungen an die verwendeten Versuchspläne zu erfüllen.

Wesentliche Forderungen sind [1.42, 5.44]:

1. Der Versuchsplan soll eine Schätzung des Modells – s. Gl. (5.125) und (5.126) – mit einer ausreichenden Genauigkeit im Prognosebereich  $H$  erlauben.
2. Die Güte der gefundenen Beschreibung soll über einen Test nachprüfbar sein. Ist das Modell nicht dem System adäquat, wird der Grad des Polynoms um 1 erhöht.

3. Jeder Versuchsplan soll bereits den Kern eines Versuchsplans für ein Modell nächsthöherer Ordnung bilden.
4. Die Anzahl der Versuchspunkte soll möglichst klein sein.
5. Die Versuchspläne sollen teilbar sein (Blockbildung), ohne daß wesentliche Eigenschaften verlorengehen.

Es besteht nun die Aufgabe, für das in Gl. (5.126) angenommene Modell einen  $l$ -dimensionalen Versuchsplan der Ordnung  $d$  zu entwerfen. Für den Entwurf wird angenommen, daß Versuchs- und Prognosebereich übereinstimmen sollen.

Da das allgemeinste Polynom  $d$ -ten Grades  $\binom{l+d}{d}$  Koeffizienten besitzt, muß ein  $l$ -dimensionaler Versuchsplan der Ordnung  $d$  wenigstens  $\binom{l+d}{d}$  Versuchspunkte enthalten, um jeden Koeffizienten schätzen zu können. Gleichzeitig muß jede einzelne Eingangsgröße – im weiteren entsprechend dem Sprachgebrauch der Theorie der optimalen Versuchsplanung mit dem Begriff „Faktor“ bezeichnet – im konkreten Versuchsplan  $V_n$  wenigstens  $d+1$  verschiedene Werte (Stufen/Niveaus) annehmen, um aus dem Plan die Koeffizienten eines Polynoms  $d$ -ten Grades ermitteln zu können.

Da stets  $l \geq 2$  Einflußgrößen (Faktoren) betrachtet werden, wird in der Literatur von Mehrfaktorplänen gesprochen.

In einem derartigen Versuchsplan nehmen damit die  $l$  stetig veränderlichen Faktoren nur  $\alpha_i$ ;  $i = 1, \dots, l$ , verschiedene feste Stufen an, die noch geeignet zu wählen sind. Durch die Festlegung der Niveaus wird der Versuchsbereich diskretisiert.

Ein Versuchsplan, der alle möglichen oder einen nach bestimmten Regeln festgelegten Teil (s. Abschn. 5.5.2.2) aller möglichen Kombinationen der endlich vielen Niveaus jedes Faktors ( $l \geq 2$ ) enthält, wird als faktorieller Versuchsplan bezeichnet [1.42].

Bei einem Strukturansatz vom Grade  $d$  in allen  $l$  Variablen muß stets  $\alpha_i = d+1$ ;  $i = 1, \dots, l$ , gewählt werden. Wird für alle Eingangsgrößen/Faktoren eine gleiche Anzahl von Niveaus verwendet, ist der Versuchsplan symmetrisch. Unsymmetrische Versuchspläne mit verschiedener Niveaunzahl für die einzelne Eingangsgröße werden verwendet, wenn a priori bekannt ist, daß der Strukturansatz nicht für alle Eingangsgrößen gleich gewählt zu werden braucht.

### 5.5.2.2. Vollständige Faktorpläne

Wird das statische Verhalten des Systems durch ein Polynom 1. Ordnung – Gl. (5.126) – hinreichend beschrieben, ist die Wahl von zwei Stufen für jede Einflußgröße/Faktor hinreichend. Damit gilt  $\alpha_i = 2$ ;  $i = 1, 2, \dots, l$ .

Für die weiteren Betrachtungen werden die Aussteuerungen der Eingangssignale/Faktoren um den Arbeitspunkt durch die Beziehung

$$u_{iN} = \frac{u_i - u_{i0}}{|u_i - u_{i0}|} \quad (5.135)$$

normiert. Unter Beachtung dieser Normierung auf die Aussteuerung um den Arbeitspunkt wird in den weiteren Ausführungen die vereinfachte Schreibweise  $u_i \triangleq u_{iN}$  beibehalten.

Als Versuchsbereich entsteht damit ein  $l$ -dimensionaler Würfel der Art

$$V: -1 \leq u_i \leq 1; \quad i = 1, \dots, l. \quad (5.136)$$

Für  $l = 2$  und  $l = 3$  ist der Versuchsbereich im Bild 5.28 dargestellt.

Da die Varianz der zu schätzenden Parameter für die Niveaus  $\pm 1$  minimal wird [1.42, 5.44], werden diese bei allen Plänen verwendet.

Die Versuchspunkte mit den Niveaus  $+1$  und  $-1$  entsprechen der maximal gewählten Aussteuerung und erzwingen somit die größte Parameterempfindlichkeit und den größten Störabstand. Damit sind die Versuchspunkte die Eckpunkte des  $l$ -dimensionalen Würfels  $V$  (Bild 5.28). In den weiteren Betrachtungen werden die Niveaus  $+1$  und  $-1$  symbolisch häufig mit  $+$  und  $-$  bezeichnet.

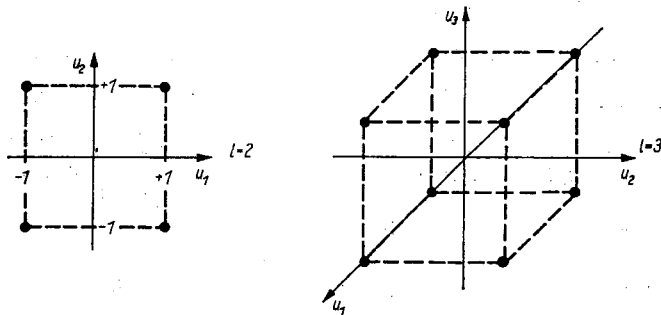


Bild 5.28  
Vollständige Faktorpläne  
für  $l = 2$  und  $l = 3$

Ein vollständiger faktorieller Versuchsplan des Typs  $2^l$  – im weiteren durch den Ausdruck VFV $2^l$  abgekürzt – enthält somit  $2^l$  Kombinationen der beiden Niveaus der  $l$  Einflußgrößen/Faktoren. Dabei wird die Basis des Exponentialausdrucks durch die Niveauezahl  $\alpha_i$  und der Exponent durch die Anzahl der Faktoren  $l$  festgelegt. Somit ergibt sich die gesamte Versuchsanzahl  $n$  zu  $n = 2^l$ .

An Beispielen soll nun im weiteren der Entwurf vollständiger faktorieller Versuchspläne aufgezeigt werden.

| Versuchs-Nr. | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_1 u_2$ |
|--------------|-------|-------|-------|-----------|
| 1            | +     | -     | -     | +         |
| 2            | +     | +     | -     | -         |
| 3            | +     | -     | +     | -         |
| 4            | +     | +     | +     | +         |

Tafel 5.6  
Vollständiger Faktorplan vom Typ  $2^2$

Ausgangspunkt soll der Versuchsplan für zwei unabhängige Einflußgrößen/Faktoren ( $l = 2$ ) sein. In Tafel 5.6 ist der VFV $2^2$  in einer für die Auswertung günstigen Form dargestellt. Dabei bilden die zweite und dritte Spalte den zu realisierenden Versuchsplan  $V_R$ . Es ist zu erkennen, daß neben den Koeffizienten des Arbeitspunktes ( $\hat{a}_0$ ) und der Einflußgrößen ( $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ ) immer der Einfluß der Wechselwirkung der Faktoren  $u_1$  und  $u_2$  durch den Koeffizienten  $\hat{a}_{12}$  ermittelt werden kann. Damit ist folgende Modellstruktur möglich:

$$\hat{x} = \hat{a}_0 u_0 + \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \hat{a}_{12} u_1 u_2; \quad u_0 = 1. \quad (5.137)$$

Wird ein Versuchsplan für zwei unabhängige Einflußgrößen ( $l = 3$ ) entworfen und realisiert, kann folgendes Modell ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \hat{x} = & \hat{a}_0 u_0 + \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \hat{a}_3 u_3 + \hat{a}_{12} u_1 u_2 \\ & + \hat{a}_{13} u_1 u_3 + \hat{a}_{23} u_2 u_3 + \hat{a}_{123} u_1 u_2 u_3. \end{aligned} \quad (5.138)$$

In Tafel 5.7 ist der entworfene VFV $2^3$  dargestellt, der sich als Erweiterung des VFV $2^2$  durch eine dritte Einflußgröße mit den Niveaus  $+$  und  $-$  ergibt.

Analog zu diesem Vorgehen werden für eine beliebige Anzahl von Einflußgrößen/Faktoren die VFV $2^l$  entworfen und realisiert.

| Versuchs-Nr. | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_1 u_2$ | $u_1 u_3$ | $u_2 u_3$ | $u_1 u_2 u_3$ |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| 1            | +     | -     | -     | -     | +         | +         | +         | -             |
| 2            | +     | +     | -     | -     | -         | -         | +         | +             |
| 3            | +     | -     | +     | -     | -         | +         | -         | +             |
| 4            | +     | +     | +     | -     | +         | -         | -         | -             |
| 5            | +     | -     | -     | +     | +         | -         | -         | +             |
| 6            | +     | +     | -     | +     | -         | +         | -         | -             |
| 7            | +     | -     | +     | +     | -         | -         | +         | -             |
| 8            | +     | +     | +     | +     | +         | +         | +         | +             |

Tafel 5.7  
Vollständiger Faktorplan  
vom Typ  $2^3$

Aufgrund der Eigenschaften der VFV $2^l$  vereinfacht sich die Schätzvorschrift der Regression – s. Abschnitt 5.2, Gl. (5.47) – wesentlich, und die Gütewerte für die Parameterstreuungen werden optimal. Da die VFV $2^l$  orthogonale Versuchspläne sind, wird die Matrix  $M^T M$  eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente den Wert  $n$  (d. h. der Versuchsanzahl) besitzen. Damit ergibt sich für die in der MKQ benötigte Matrix

$$[M^T M]^{-1} = \frac{1}{n} I. \quad (5.139)$$

Unter Verwendung der Schätzvorschrift für die MKQ – s. Gl. (5.47) – folgt damit für die Schätzvorschrift der Parameter

$$\hat{s} = \frac{1}{n} M^T x \quad (5.140)$$

und für die Gütewerte der Parameter

$$\text{var} \{\hat{s}_i\} = \frac{1}{n} \sigma_x^2; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.141)$$

$$\text{cov} \{\hat{s}_i, \hat{s}_j\} = 0; \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Damit wird deutlich, daß die Methode der Versuchsplanung garantiert, daß die Schätzung der Parameter des Modells unkorreliert ist. Als Probleme der vollständigen faktoriellen Versuchspläne sind zu nennen:

1. Die enorme Zunahme der Versuchsanzahl bei einer größer werdenden Anzahl von Einflußgrößen/Faktoren (z. B.  $l = 6$ , d. h. 64 Versuche;  $l = 10$ , d. h. 1024 Versuche). Einen praktikablen Ausweg stellt der Entwurf von unvollständigen Faktorplänen dar, die im Abschnitt 5.2.2.3 betrachtet werden.
2. Die häufig über zu große Zeiträume auf eines der beiden Niveaus ( $+1, -1$ ) zu halten der Einflußgrößen bei Einhaltung der normalen Reihenfolge bedingen systematische Fehler oder gefährden das System. Der Ausweg besteht in einer zufälligen Gestaltung der Versuchsreihenfolge (der „Randomisierung“).

3. Die konsequente Fortführung des Konstruktionsprinzips für VFV $2^l$  für Systemmodelle  $d$ -ten Grades ( $d \geq 2$ ) führt zu Plänen, die alle möglichen  $(d+1)^l$ -Kombinationen der  $(d+1)$  Niveaus der  $l$  Einflußgrößen/Faktoren enthalten. Ein vollständiger Versuchsplan für ein Modell 2. Grades ( $d=2$ ) wäre somit vom Typ  $3^l$ . Diese Pläne werden aufgrund der sehr hohen Versuchsanzahl und ihrer ungünstigen statistischen Eigenschaften nicht verwendet. Mögliche Entwurfsstrategien für diesen Modelltyp, die die genannten Nachteile nicht besitzen, werden im Abschnitt 5.5.3 vorgestellt.

### 5.5.2.3. Teilfaktorpläne

Wie bereits im Abschnitt 5.5.2.2 gezeigt wurde, nimmt mit der Zunahme der Anzahl der Einflußgrößen/Faktoren die Anzahl der Versuche nach dem Gesetz  $n = 2^l$  ebenfalls enorm zu. Der vollständige Versuchsplan ist erforderlich, wenn alle  $2^l$  Parameter (d.h. das Absolutglied  $a_0$ , die Parameter der einzelnen Einflußgrößen  $a_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, l$  und die Parameter aller Wechselwirkungen) ermittelt werden müssen. Dies ist in der Praxis selten der Fall. Auf der Grundlage von A-priori-Wissen wird deshalb immer davon ausgegangen, daß alle oder einige Wechselwirkungen nicht existieren. Damit wird es möglich, die Anzahl der notwendigen Versuche durch die Verwendung sog. teilweiser faktorieller Versuchspläne – im weiteren mit TFV bezeichnet – wesentlich zu reduzieren. Gleichzeitig sollen die TFV so gestaltet werden, daß die sehr guten statistischen Eigenschaften der VFV nicht verlorengehen.

| Versuchs-Nr. | $u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 (= u_1 u_2)$ |       |       |                   |
|--------------|-------------------------------------------------|-------|-------|-------------------|
|              | $u_0$                                           | $u_1$ | $u_2$ | $u_3 (= u_1 u_2)$ |
| 1            | +                                               | -     | -     | +                 |
| 2            | +                                               | +     | -     | -                 |
| 3            | +                                               | -     | +     | -                 |
| 4            | +                                               | +     | +     | +                 |

Tafel 5.8  
Teilfaktorplan vom Typ  $2^{3-1}$

Um das Grundprinzip des Entwurfs von TFV zu zeigen, soll von dem Beispiel in Gl. (5.138), d. h. von  $l = 3$  Einflußgrößen, ausgegangen werden. Es sei a priori bekannt, daß alle Wechselwirkungen nicht existieren. Dann reduziert sich die Modellgleichung von Gl. (5.138) auf den Ausdruck

$$\hat{x} = a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3. \quad (5.142)$$

Bei Verwendung des VFV $2^3$  würden die vier Parameter von Gl. (5.142) aus acht Versuchen ermittelt werden. Der Entwurf teilweiser faktorieller Versuchspläne geht nun davon aus, daß in VFV mit einer geringeren Anzahl von Einflußgrößen die Planungsniveaus der Wechselwirkungen für weitere Einflußgrößen zu verwenden sind. In dem hier gewählten Beispiel setzt man in einem VFV $2^2$  für die Wechselwirkung  $u_1 u_2$  die unabhängige Einflußgröße  $u_3$  ein. Der damit entstehende Versuchsplan für die Parameter des Modells ist, aufbauend auf den VFV $2^2$  (s. Tafel 5.6), in Tafel 5.8 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß die Schätzung der Parameter ebenfalls entsprechend Gl. (5.140) erfolgen kann und daß sich die statistischen Güterwerte bezogen auf die Versuchsanzahl nicht verändern. Dagegen hat sich die Anzahl der Versuche bei diesem einfachen Beispiel bereits um die Hälfte verringert. Als allgemeine Bildungsvorschrift für Teilfaktorpläne TFV $2^{l-p}$  gilt folgendes:

Zur Konstruktion eines TFV $2^{l-p}$  wird von dem  $(l-p)$  Einflußgrößen entsprechenden VFV $2^{l-p}$  ausgegangen. Dieser Plan wird durch  $p$  Spalten für  $p$  zusätzliche Einflußgrößen

ergänzt. Die zugefügten Spalten werden aus den elementweise gewonnenen Produkten von mindestens zwei und maximal  $(l-p)$  Spalten des VFV gebildet. Häufig wird die Einführung des Begriffs „Generator“ vorgenommen, der angibt, welche der möglichen Produkte für die  $p$  Spalten des TFV $2^{l-p}$  verwendet wurden (in Tafel 5.8 wird das Produkt  $u_1 u_2$  als Generator verwendet).

| Versuchs-Nr. | $u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 = ? \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7$ |       |       |       |           |       |       |       |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|
|              | $u_0$                                                                           | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4 = ?$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ |
| 1            | +                                                                               | -     | -     | -     | +         | +     | +     | -     |
| 2            | +                                                                               | +     | -     | -     | -         | -     | +     | +     |
| 3            | +                                                                               | -     | +     | -     | -         | +     | -     | +     |
| 4            | +                                                                               | +     | +     | -     | +         | -     | -     | -     |
| 5            | +                                                                               | -     | -     | +     | +         | -     | -     | +     |
| 6            | +                                                                               | +     | -     | +     | -         | +     | -     | -     |
| 7            | +                                                                               | -     | +     | +     | -         | -     | +     | -     |
| 8            | +                                                                               | +     | +     | +     | +         | +     | +     | +     |

Tafel 5.9  
Teilfaktorplan vom Typ  $2^{4-1}$

Durch die Wahl verschiedener Generatoren für die zusätzlichen Einflußgrößen können verschiedene Varianten von TFV mit gleichen Eigenschaften entworfen werden. In Tafel 5.9 ist dies für ein TFV $2^{4-1}$ , der auf ein VFV $2^3$  aufbaut, dargestellt. Es ist zu sehen, daß aus dem VFV $2^3$  mit den Generatoren

$$u_4 = \begin{cases} u_1 u_2 \\ u_1 u_3 \\ u_2 u_3 \\ u_1 u_2 u_3 \end{cases}$$

vier TFV $2^{4-1}$  entworfen werden können. Wie die VFV sind auch die TFV für lineare Modelle und Versuchsplangebiete in der Form des Hyperwürfels mit den Versuchspunkten  $\pm 1$  D-, A- und G-optimal und gestatten somit die Schätzung der Parameter mit maximal möglicher Genauigkeit.

Als Problem bleibt bei den TFV der Einfluß von nicht beachteten Wechselwirkungen auf die geschätzten Parameter der Einflußgrößen. Betrachtet man die Meßwertmatrix des TFV $2^{3-1}$  in Tafel 5.8, so kann man feststellen, daß  $u_3$  und  $u_1 u_2$  identisch sind. Das bedeutet, daß dieser Plan nur die gemeinsame (vermengte) Schätzung von  $a_3$  und  $a_{12}$  ermöglicht. Der geschätzte Parameter  $\hat{a}_3$  des TFV $2^{3-1}$  ergibt sich damit zu

$$\hat{a}_3' \rightarrow \hat{a}_3 + \hat{a}_{12}.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß der Parameter der Einflußgröße  $u_3$  nur im Fall der verschwindenden Wechselwirkung  $u_1 u_2$  richtig geschätzt werden kann. Um das sog. Vermengungsgesetz anzugeben, das den Zusammenhang der Parameter der Einflußgrößen mit denen der Wechselwirkungen beschreibt, wurde in der Theorie der Versuchsplanung [1.42] der Begriff der definierenden Beziehung eingeführt. Sie ergibt sich aus den Produkten der Elemente der Matrix  $M$ , die die Elemente der ersten Spalte ergeben. Die Elemente der ersten Spalte sind immer 1 (Planung für  $u_0$ ) und werden symbolisch mit  $I$  bezeichnet. Damit gilt für die definierende Beziehung des TFV $2^{3-1}$

$$I = u_1 u_2 u_3. \quad (5.143)$$

Aus der Gl. (5.143) ergeben sich durch Multiplikation mit den Einflußgrößen  $u_i$ ;  $i = 1, 2, 3$ , und bei Beachtung, daß  $u_i^2 = 1$  ist, folgende Vermengungen:

$$u_1 = u_2 u_3, \quad u_2 = u_1 u_3, \quad u_3 = u_1 u_2.$$

Für die vermengten Schätzwerte der Parameter gilt damit für den TFFV $2^{3-1}$ :

$$\begin{aligned} \hat{a}'_0 &\rightarrow \hat{a}_0 + \hat{a}_{123}, & \hat{a}'_1 &\rightarrow \hat{a}_1 + \hat{a}_{23} \\ \hat{a}'_2 &\rightarrow \hat{a}_2 + \hat{a}_{13}, & \hat{a}'_3 &\rightarrow \hat{a}_3 + \hat{a}_{12}. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Um die Wechselwirkungen erkennen und korrigieren zu können, wird ein alternativer TFFV $2^{3-1}$  mit der definierenden Beziehung

$$I = -u_1 u_2 u_3$$

realisiert, der folgende vermengte Schätzwerte liefert:

$$\begin{aligned} \hat{a}''_0 &\rightarrow \hat{a}_0 - \hat{a}_{123}, & \hat{a}''_1 &\rightarrow \hat{a}_1 - \hat{a}_{23} \\ \hat{a}''_2 &\rightarrow \hat{a}_2 - \hat{a}_{13}, & \hat{a}''_3 &\rightarrow \hat{a}_3 - \hat{a}_{12}. \end{aligned} \quad (5.145)$$

Damit können aus beiden TFFV $2^{3-1}$  die unvermengten Parameter der Einflußgrößen nach der Vorschrift

$$\hat{a}_i = \frac{\hat{a}'_i + \hat{a}''_i}{2}; \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

und die der Wechselwirkungen nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} \hat{a}_{123} &= \frac{\hat{a}'_0 - \hat{a}''_0}{2}, & \hat{a}_{12} &= \frac{\hat{a}'_3 - \hat{a}''_3}{2}, \\ \hat{a}_{13} &= \frac{\hat{a}'_2 - \hat{a}''_2}{2}, & \hat{a}_{23} &= \frac{\hat{a}'_1 - \hat{a}''_1}{2} \end{aligned}$$

ermittelt werden. Entsprechend dieser Strategie wird auch bei Versuchsplänen mit vier und mehr Einflußgrößen vorgegangen [1.42, 1.48, 5.39].

Von besonderem praktischem Interesse sind Versuchspläne, bei denen alle Wechselwirkungen der Einflußgrößen vernachlässigt und die Planungsniveaus durch neue Einflußgrößen belegt werden. Diese Versuchspläne, die als gesättigte Pläne bezeichnet werden, ermöglichen die Schätzung der Parameter aus  $n = l + 1$  Versuchen. So ist es z. B. möglich, auf der Grundlage der VFV $2^3$  mit acht Versuchen die Parameter von sieben Einflußgrößen/Faktoren zu schätzen (Tafel 5.10). Der VFV $2^7$  würde dagegen 128 Versuche

Tafel 5.10. Gesättigter Teilfaktorplan für  $l = 7$

| Versuchs-Nr. | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4 (= u_1 u_2)$ | $u_5 (= u_1 u_3)$ | $u_6 (= u_2 u_3)$ | $u_7 (= u_1 u_2 u_3)$ |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| 1            | +     | -     | -     | -     | +                 | +                 | +                 | -                     |
| 2            | +     | +     | -     | -     | -                 | -                 | +                 | +                     |
| 3            | +     | -     | +     | -     | -                 | +                 | -                 | +                     |
| 4            | +     | +     | +     | -     | +                 | -                 | -                 | -                     |
| 5            | +     | -     | -     | +     | +                 | -                 | -                 | +                     |
| 6            | +     | +     | -     | +     | -                 | +                 | -                 | -                     |
| 7            | +     | -     | +     | +     | -                 | -                 | +                 | -                     |
| 8            | +     | +     | +     | +     | +                 | +                 | +                 | +                     |

umfassen. Auf der Grundlage theoretischer Untersuchungen ist es Plackett und Burman [5.46] gelungen, für den Entwurf der gesättigten orthogonalen Versuchspläne eine einfach zu realisierende Strategie zu entwerfen, wenn die Anzahl der Versuche  $n$  ein Vielfaches von 4 ist.

In ihren Arbeiten sind Pläne von  $n = 4$  bis  $n = 100$  (außer 92) angegeben, die nach einer einfachen Vorschrift aus den in Tafel 5.11 angegebenen ersten Zeilen konstruiert werden können.

Tafel 5.11. Die erste Zeile der gesättigten Versuchspläne für den Entwurf nach Plackett-Burman für  $n = 8$  bis  $n = 84$  Versuche

| $n$ | 1. Zeile       |
|-----|----------------|
| 8   | +++-+--        |
| 12  | ++-++-+-       |
| 16  | ++++-+-+--     |
| 20  | ++-++-++-+-    |
| 24  | ++++-++-+-     |
| 32  | ---+--+--+--   |
| 36  | -++-++-++-+-   |
| 44  | ++-++-++-++-+- |
| 48  | ++-++-++-++-+- |
| 60  | ++-++-++-++-+- |
| 68  | ++-++-++-++-+- |
| 72  | ++-++-++-++-+- |
| 80  | ++-++-++-++-+- |
| 84  | ++-++-++-++-+- |

Die Versuchsmatrix  $M$  wird aus den in Tafel 5.11 angegebenen Zeilen nach folgender Vorschrift aufgebaut:

Ausgehend von der gewählten ersten Zeile wird die zweite Zeile durch Verschieben aller Elemente um eine Stelle nach rechts und Einsetzen des letzten Elements der ersten Zeile an die erste Stelle gewonnen. Diese Vorgehensweise wird bis zur  $(n - 1)$ -ten Zeile zyklisch wiederholt. Die Versuchsplanmatrix  $M$  wird komplettiert, indem noch

1. eine  $n$ -te Zeile mit negativen Niveaus,
2. eine erste Spalte mit positiven Niveaus

Tafel 5.12. Gesättigter Versuchsplan für  $l = 11$ 

| Versuchs-Nr. | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ | $u_9$ | $u_{10}$ | $u_{11}$ |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| 1            | +     | +     | +     | -     | +     | +     | +     | -     | -     | -     | +        | -        |
| 2            | +     | -     | +     | +     | -     | +     | +     | +     | -     | -     | -        | +        |
| 3            | +     | +     | -     | +     | +     | -     | +     | +     | +     | -     | -        | -        |
| 4            | +     | -     | +     | -     | +     | +     | -     | +     | +     | +     | -        | -        |
| 5            | +     | -     | -     | +     | -     | +     | +     | -     | +     | +     | +        | -        |
| 6            | +     | -     | -     | -     | +     | -     | +     | +     | -     | +     | +        | +        |
| 7            | +     | +     | -     | -     | -     | +     | -     | +     | +     | -     | +        | +        |
| 8            | +     | +     | +     | -     | -     | -     | +     | -     | +     | +     | -        | +        |
| 9            | +     | +     | +     | +     | -     | -     | -     | +     | -     | +     | +        | -        |
| 10           | +     | -     | +     | +     | +     | -     | -     | -     | +     | -     | +        | +        |
| 11           | +     | +     | -     | +     | +     | +     | -     | -     | +     | +     | -        | +        |
| 12           | +     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -        | -        |

hinzugefügt wird. In Tafel 5.12 ist diese Entwurfsstrategie für einen gesättigten Plan mit  $l = 11$  Einflußgrößen dargestellt.

Bei der Realisierung aller vorgestellten Versuchspläne ist es zweckmäßig, in den  $n$  Versuchspunkten  $u^i$  jeweils  $\theta$  Versuche ( $\theta = 2, 3, \dots$ ) zu realisieren, um aus den erhaltenen Ausgangsgrößen und den geschätzten Parametern Schätzwerte für die Streuung der Störung  $\sigma_z^2$  und die Reststreuung  $\sigma_R^2$  zu erhalten.

Beide Größen dienen als Ausgangspunkte für den Test auf Adäquatheit der gewählten Modellstruktur. Ist die Reststreuung groß gegenüber der Streuung der Störung, kann davon ausgegangen werden, daß die gewählte Modellstruktur nicht richtig ist.

Den Schätzwert für die Streuung der Störung erhält man aus den in den  $n$  Punkten des Versuchsplans zusätzlich durchgeführten Versuchen aus der Beziehung

$$s_z^2 = \frac{1}{n(\theta - 1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\theta} (x^{ij} - \bar{x}^i)^2 \quad \text{mit} \quad \bar{x}^i = \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^{\theta} x^{ij}. \quad (5.146)$$

Als Schätzwert für die Reststreuung  $\sigma_R^2$  wird der Ausdruck

$$s_R^2 = \frac{1}{n - l - 1} \sum_{i=1}^n (x^i - \hat{x}^i)^2 \quad \text{mit} \quad \hat{x}^i = m^T \hat{a} \quad (5.147)$$

angesehen; s. auch Gl. (5.47).

Für den Vergleich der Reststreuung mit der Streuung der Störung wird der  $F$ -Test (s. Abschn. 2.3.3) in der Form

$$F = \frac{s_R^2}{s_z^2} \quad (5.148)$$

mit den Freiheitsgraden

$$f_1 = n - l - 1, \quad f_2 = n(\theta - 1)$$

verwendet. Ist der in Gl. (5.148) berechnete Wert kleiner als der für ein gewähltes Signifikanzniveau aus Tafel A5 entnommene Wert  $F_{\alpha, f_1, f_2}$ , wird davon ausgegangen, daß die gewählte Modellstruktur der vorhandenen Systemstruktur mit einer Wahrscheinlichkeit von  $P = 1 - \alpha$  entspricht. Wird die Hypothese verworfen, ist z. B. von einer Modellstruktur 1. Grades zu der 2. Grades überzugehen und der Test zu wiederholen.

Im Beispiel 5.9 ist die Vorgehensweise für verschiedene Modellansätze dargestellt.

| Beispiel 5.9 | Ermittlung und Test von Modellen 1. und 2. Ordnung auf der Grundlage optimaler Versuchspläne |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|

Gegeben: Systemgleichung

$$x = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_{12} u_1 u_2 + a_{11} u_1^2 + a_{22} u_2^2 + z,$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = a_2 = a_{12} = 1, \quad a_{11} = a_{22} = 0,5,$$

Störung  $z \cong NV(0, \dots)$ .

Gesucht: Die Struktur und die Parameter des Systems auf der Grundlage der Methoden der optimalen Versuchsplanung.

Ergebnis: Schritt 1

– Modellannahme

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2$$

– Entwurf und Realisierung eines Versuchsplans vom Typ 2<sup>2</sup>

| $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $x^1$ |
|-------|-------|-------|-------|
| +1    | -1    | -1    | 2,05  |
| +1    | +1    | -1    | 1,95  |
| +1    | -1    | +1    | 2,025 |
| +1    | +1    | +1    | 5,975 |

– Schätzung der Parameter nach Gl. (5.140)

$$\hat{a}^T = [3; 0,9625; 10],$$

– Test auf Adäquatheit der gewählten Modellstruktur ( $F$ -Test).

1. Die Berechnung der Reststreuung nach Gl. (5.146) ergibt  $s_R^2 = 4,1$ .

2. Die Berechnung der Streuung der Störung auf der Grundlage eines zweiten Versuchs ( $\theta = 2$ ) in jedem Versuchspunkt

| $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $x^1$ | $x^2$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| +1    | -1    | -1    | 2,025 | 1,975 |
| +1    | +1    | -1    | 1,95  | 1,98  |
| +1    | -1    | +1    | 2,05  | 2,02  |
| +1    | +1    | +1    | 5,975 | 6,025 |

entsprechend Gl. (5.145) ergibt den Wert

$$s_z^2 = 8,5 \cdot 10^{-4}.$$

3. Die Überprüfung der Adäquatheit des Modellansatzes erfolgt mit der Hypothese  $H_0: \sigma_R^2 = \sigma_z^2$  für die Freiheitsgrade

$$f_z = n(\theta - 1) = 4, \quad f_R = n - l - 1 = 1$$

und den Tafelwert für ein Risiko von 5%

$$F_{f_R, f_z, \alpha} = 7,71$$

(s. Anhang Tafel A4). Aus dem Vergleich des berechneten  $F$ -Wertes entsprechend Gl. (5.147)

$$F = \frac{4,1}{0,00085} = 4823,5$$

mit dem Tafelwert  $F_{f_R, f_z, \alpha}$  wird ersichtlich, daß die Hypothese mit 95%iger Sicherheit abzulehnen ist. Damit ist der gewählte Ansatz zu verwerfen und die Modellordnung zu erhöhen.

**Beispiel 5.9** Ermittlung und Test von Modellen 1. und 2. Ordnung auf der Grundlage optimaler Versuchspläne

Schritt 2 (s. Abschn. 5.5.3)

– Neue Modellannahme

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \hat{a}_{12} u_1 u_2 + \hat{a}_{11} u_1^2 + \hat{a}_{22} u_2^2$$

– Entwurf und Realisierung eines orthogonal zentral zusammengesetzten Versuchsplans 2. Ordnung (Planungskern vom Typ 2<sup>2</sup>)

| $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_1 u_2$ | $u_1^2$            | $u_2^2$            | $x$   |
|-------|-------|-------|-----------|--------------------|--------------------|-------|
| +1    | -1    | -1    | +1        | +1 - f             | +1 - f             | 2,05  |
| +1    | +1    | -1    | -1        | +1 - f             | +1 - f             | 1,95  |
| +1    | -1    | +1    | -1        | +1 - f             | +1 - f             | 2,025 |
| +1    | +1    | +1    | +1        | +1 - f             | +1 - f             | 5,975 |
| +1    | +α    | 0     | 0         | α <sup>2</sup> - f | 0 - f              | 3,53  |
| +1    | -α    | 0     | 0         | α <sup>2</sup> - f | 0 - f              | 1,47  |
| +1    | 0     | +α    | 0         | 0 - f              | α <sup>2</sup> - f | 3,46  |
| +1    | 0     | -α    | 0         | 0 - f              | α <sup>2</sup> - f | 1,54  |
| +1    | 0     | 0     | 0         | 0 - f              | 0 - f              | 2,05  |

mit  $\alpha = 1$  aus Gl. (5.154)

$f = 0,66$  aus Gl. (5.152)

– Berechnung der Parameter des Modellansatzes mit Gl. (5.140) und Gl. (5.155) für  $\hat{a}_0$  mit dem Ergebnis

$$\hat{a}^T = [2,02; 0,985; 0,986; 1,0125; 0,485; 0,485]$$

– Erneuter Test auf Adäquatheit der Modellstruktur mit dem F-Test

1. Die Berechnung der Reststreuung ergibt

$$s_R^2 = 3,2 \cdot 10^{-3}$$

2. Die Überprüfung der Hypothese  $H_0: \sigma_R^2 = \sigma_z^2$  für die Freiheitsgrade

$$f_z = n(\theta - 1) = 3 \quad (\text{s. Schritt 1})$$

$$f_R = n - l - 1 = 3$$

und den Tafelwert für ein Risiko von 5%

$$F_{f_R, f_z, \alpha} = 6,59$$

(s. Anhang Tafel A4). Für den berechneten F-Wert erhält man

$$F = \frac{s_R^2}{s_z^2} = \frac{0,0032}{0,00085} = 3,76$$

Da in diesem Fall  $F < F_{f_R, f_z, \alpha}$  ist, wird die Hypothese angenommen. Dies bedeutet, daß kein Unterschied zwischen der Reststreuung und der Streuung der Störung mit 95%iger Sicherheit existiert. Damit ist die gewählte Modellstruktur der des Systems adäquat.

### 5.5.3. Mehrfaktorpläne für nichtlineare Modelle 2. Ordnung

#### 5.5.3.1. Problemstellung

Ist die Beschreibung des statischen Verhaltens eines Systems durch ein Polynom 1. Ordnung – s. Gl. (5.126) – nicht hinreichend, muß eine Beschreibung mit einem Polynom höherer Ordnung versucht werden. Von praktischer Bedeutung und in sehr vielen Fällen ausreichend ist die Verwendung von Polynomen 2. Ordnung – s. Gl. (5.126). Auf diesen Modelltyp beschränken sich die weiteren Betrachtungen. Bei einem Modell 2. Ord-

nung sind mindestens drei Versuchspunkte für jede der  $l$  unabhängigen Eingangsgrößen erforderlich. Das bedeutet mindestens  $n = 3^l$  Versuchspunkte. Im Bild 5.29 ist für eine Eingangsgröße  $u_1$  die Aussteuerung um den Arbeitspunkt dargestellt. Wird eine Normierung entsprechend Gl. (5.135) vorgenommen, erhält man als normierte Versuchspunkte die Werte  $-1, 0, +1$ . Für zwei Eingangsgrößen wird die Aussteuerung entsprechend diesen normierten Werten im Bild 5.30 gezeigt.

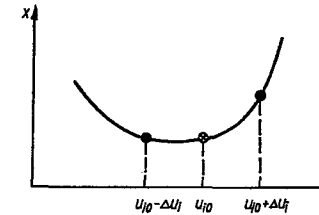


Bild 5.29. Aussteuerung einer nichtlinearen Kennlinie um den Arbeitspunkt

● Versuche um den Arbeitspunkt  
⊗ Arbeitspunkt = Nullpunktversuch

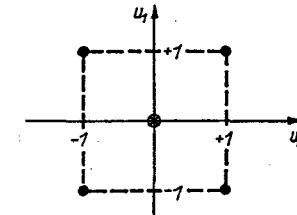


Bild 5.30. Versuchsplan des Typs 3<sup>2</sup>

Wird ein Versuchsplan nach diesen Prinzipien entworfen, erhält man z.B. für den Modellansatz

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \hat{a}_3 u_3 + \hat{a}_{11} u_1^2 + \hat{a}_{22} u_2^2 + \hat{a}_{33} u_3^2 \quad (5.149)$$

den in Tafel 5.13 angegebenen Versuchsplan. Eine Berechnung der Matrix  $M^T M$  für diesen Plan ergibt

$$M^T M \neq cI. \quad (5.150)$$

Aus der nichtdiagonalen Matrix von Gl. (5.150) folgt, daß ein derartig gestalteter Versuchsplan folgende Eigenschaften hat:

- keine unabhängige Schätzung der Parameter (d.h. keine Orthogonalität)
- Varianz der Parameter nicht unabhängig von der Lage des Planes (d.h. keine Drehbarkeit des Planes).

Die genannten Nachteile dieser Entwurfsstrategie werden dadurch beseitigt, daß Versuchspläne entworfen werden, die orthogonal (orthogonale zentrale Versuchspläne) bzw. drehbar (drehbare zentrale Versuchspläne) sind. Diese erlauben unabhängige Parameterschätzungen mit einer von der Lage des Versuchsplans unabhängigen minimalen Varianz der Parameter.

| Versuchs-Nr. | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_1^2$ | $u_2^2$ | $u_3^2$ |
|--------------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|
| 1            | 1     | 1     | 1     | 1     | 1       | 1       | 1       |
| 2            | 1     | 1     | 1     | 0     | 1       | 1       | 0       |
| 3            | 1     | 1     | 1     | -1    | 1       | 1       | 1       |
| 4            | 1     | 1     | 0     | 1     | 1       | 0       | 1       |
| ...          | ...   | ...   | ...   | ...   | ...     | ...     | ...     |
| 25           | 1     | -1    | -1    | 1     | 1       | 1       | 1       |
| 26           | 1     | -1    | -1    | 0     | 1       | 1       | 0       |
| 27           | 1     | -1    | -1    | -1    | 1       | 1       | 1       |

Tafel 5.13  
Versuchsplan vom Typ 3<sup>2</sup>  
für das Modell von Gl. (5.149)

## 5.5.3.2. Orthogonale zentrale Versuchspläne

Wie im Abschnitt 5.5.3.1 gezeigt wurde, liefern Versuchspläne vom Typ  $n = 3^l$  nicht die gewünschten statistischen Eigenschaften. Deshalb wurden Pläne entworfen, die für jede Einflußgröße fünf Versuchspunkte vorsehen, mit denen die Bedingung der Orthogonalität eingehalten werden kann [5.44, 5.45, 5.47]. Der Versuchsplan wird aus folgenden Teilen zusammengesetzt:

- ein Planungskern vom Typ  $2^l$  ( $2^{l-p}$ )
- $2^l$  Sternpunktversuche
- $n_0$  Nullpunktversuche ( $n_0 = 1$ ).

Damit ergibt sich die Gesamtversuchszahl zu  $n = 2^l + 2^{l+1}$ . Im Bild 5.31 ist die Lage der einzelnen Komponenten des Planes und des Gesamtplans für zwei Einflußgrößen dargestellt.

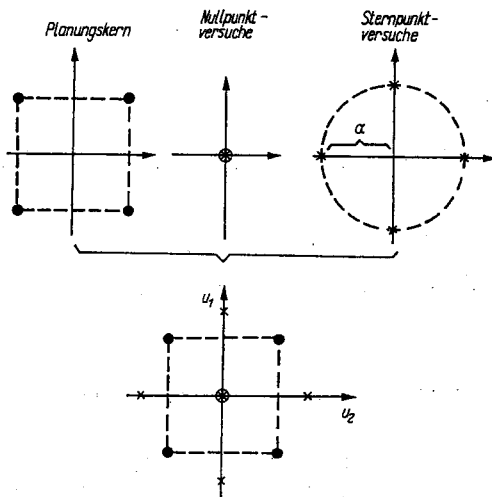


Bild 5.31  
Entwurf von zusammengesetzten  
zentralen Versuchsplänen  
● Versuche des Planungskerns  
⊗ Nullpunktversuche  
× Sternpunktversuche

Die angestrebte Orthogonalität wird über die Normierung aller quadratischen Größen  $u_i^2$ ;  $i = 1, 2, \dots, l$ , nach der Vorschrift

$$u_{iN}^2 = u_i^2 - f \quad (5.151)$$

mit

$$f = \overline{u_i^2} = \sum_{j=1}^n u_j^2 / n$$

und durch die Festlegung der Niveaus  $\pm \alpha$  erzwingen. Für den in Gl. (5.149) angegebenen Ansatz ergibt sich damit der in Tafel 5.14 dargestellte zusammengesetzte Versuchsplan. Es ist ersichtlich, daß bei Verwendung von Planungskernen vom Typ  $2^l$  der Wert für die Größe  $f$  allgemein aus der Beziehung

$$f = \frac{2^l + 2\alpha^2}{2^l + 2\alpha + 1} \quad (5.152)$$

bestimmbar ist. Der Wert für das Planungsniveau kann aus der Forderung abgeleitet werden, daß für orthogonale Versuchspläne die Summe der Produkte der Elemente

Tafel 5.14. Zusammengesetzter Versuchsplan mit einem Planungskern vom Typ  $2^l$  für das Modell von Gl. (5.149)

| Versuchs-Nr. | $u_0$ | $u_1$     | $u_2$     | $u_{1N}^2$   | $u_{2N}^2$   |                    |
|--------------|-------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------------|
| 1            | 1     | 1         | 1         | $1-f$        | $1-f$        | Planungskern       |
| 2            | 1     | 1         | -1        | $1-f$        | $1-f$        |                    |
| 3            | 1     | -1        | 1         | $1-f$        | $1-f$        |                    |
| 4            | 1     | -1        | -1        | $1-f$        | $1-f$        |                    |
| 5            | 1     | $\alpha$  | 0         | $\alpha^2-f$ | $0-f$        | Sternpunktversuche |
| 6            | 1     | $-\alpha$ | 0         | $\alpha^2-f$ | $0-f$        |                    |
| 7            | 1     | 0         | $\alpha$  | $0-f$        | $\alpha^2-f$ |                    |
| 8            | 1     | 0         | $-\alpha$ | $0-f$        | $\alpha^2-f$ |                    |
| 9            | 1     | 0         | 0         | $0-f$        | $0-f$        | Nullpunktversuch   |

zweier Spalten der quadrierten Größen  $u_{iN}^2$  und  $z_{kN}^2$  null sein muß:

$$\sum_{j=1}^n u_{iN,j}^2 u_{kN,j}^2 \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.153)$$

Aus Gl. (5.153) erhält man damit den Ausdruck (s. auch Tafel 5.14)

$$2^n (1-f)^2 - 2lf(\alpha^2-f) + f^2 = 0.$$

Durch Einsetzen von Gl. (5.152) und einige Umformungen erhält man für einen Plan vom Typ  $2^l$  das Planungsniveau der Sternpunktversuche zu

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{2^l (2^l + 2l + 1)} - 2^l]}. \quad (5.154)$$

Ist der Planungskern vom Typ  $2^{l-p}$ , so ist in Gl. (5.154) der Typ  $2^l$  durch  $2^{l-p}$  zu ersetzen. In Tafel 5.15 sind die Planungsniveaufwerte als Funktion der Anzahl der Eingangsgrößen entsprechend Gl. (5.154) für Versuchsplanungskerne vom Typ  $2^l$  und  $2^{l-p}$  angegeben. Es ist bei der orthogonalen zentralen Versuchsplanung zu beachten, daß sich durch die Normierung der quadratischen Größen der richtige Schätzwert für den Parameter des Arbeitspunktes aus der Beziehung

$$\hat{a}_0 = \hat{a}'_0 - \hat{a}_{11} u_1^2 - \hat{a}_{22} u_2^2 - \dots \quad (5.155)$$

ergibt; s. Gl. (5.151). Die Erstellung und Auswertung dieser Versuchspläne sind im Beispiel 5.9 (s. Abschn. 5.5.2.3) dargestellt.

Die vorgestellten zusammengesetzten Pläne sind orthogonal; die Varianz der geschätzten Parameter ist aber noch abhängig von der Lage des Planes.

| Typ $2^l$     | $2^2$     | $2^3$     | $2^4$     | $2^5$     | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ |
|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|-------|-------|
| $\alpha$      | 1,00      | 1,215     | 1,414     | 1,596     | 1,761 | 1,909 | 2,045 |
| Typ $2^{l-p}$ | $2^{5-1}$ | $2^{6-1}$ | $2^{7-1}$ | $2^{8-1}$ |       |       |       |
| $\alpha$      | 1,547     | 1,724     | 1,885     | 2,029     |       |       |       |

Tafel 5.15  
Planungsniveaus  $\alpha$   
der Sternpunktversuche  
für orthogonale zusammen-  
gesetzte Versuchspläne

## 5.5.3.3. Drehbare zentrale Versuchspläne

Durch das notwendige Hinzufügen der Sternpunktversuche zu den Versuchsplänen vom Typ  $2^l$  oder  $2^{l-p}$  geht die Drehbarkeit des normalen zusammengesetzten Planes verloren. Untersuchungen von *Box* und *Hunter* [5.44] haben ergeben, daß durch eine geeignete Wahl des Niveaus  $\pm\alpha$  die Eigenschaft der Drehbarkeit auch bei zusammengesetzten Plänen erreicht werden kann. Wenn der Gesamtplan wieder aus

- dem Planungskern vom Typ  $2^l$  ( $2^{l-p}$ )
- den  $2l$  Sternpunktversuchen
- $n_0$  Nullpunktversuchen;  $u_0 = f(I)$

besteht, kann aus Bedingungen für die Drehbarkeit [1.39, 1.42, 1.43, 5.39] das Niveau der Sternpunktversuche nach Vorschrift

$$\alpha = \sqrt[4]{2^l} \quad \text{bei Kern vom Typ } 2^l$$

$$\alpha = \sqrt[4]{2^{l-p}} \quad \text{bei Kern vom Typ } 2^{l-p} \quad (5.156)$$

bestimmt werden. Die Anzahl der Nullpunktversuche  $n_0$  wird am besten dadurch bestimmt, daß die Determinante der Informationsmatrix Gl. (5.128) maximiert wird [1.39]. In Tafel 5.16 sind für drehbare zusammengesetzte Versuchspläne die Planungsniveaus und die Anzahl der Nullpunktversuche angegeben. Für das in Gl. (1.49) gewählte Modell

| Typ $2^l$     | $2^2$     | $2^3$     | $2^4$     | $2^5$     | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ |
|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|-------|-------|
| $\alpha$      | 1,414     | 1,682     | 2,00      | 2,378     | 2,828 | 3,364 | 4,00  |
| $n_0$         | 8         | 9         | 12        | 17        | 24    | 35    | 52    |
| Typ $2^{l-p}$ | $2^{5-1}$ | $2^{6-1}$ | $2^{7-1}$ | $2^{8-1}$ |       |       |       |
| $\alpha$      | 2,00      | 2,378     | 2,828     | 3,364     |       |       |       |
| $n_0$         | 10        | 15        | 22        | 33        |       |       |       |

Tafel 5.16  
Planungsniveaus  $\alpha$   
der Sternpunktversuche  
für drehbare orthogonale  
zusammengesetzte  
Versuchspläne

| Versuchs-Nr. | $u_0$ | $u_1$  | $u_2$  | $u_1^2$ | $u_2^2$ |
|--------------|-------|--------|--------|---------|---------|
| 1            | 1     | 1      | 1      | 1       | 1       |
| 2            | 1     | 1      | -1     | 1       | 1       |
| 3            | 1     | -1     | 1      | 1       | 1       |
| 4            | 1     | -1     | -1     | 1       | 1       |
| 5            | 1     | 1,414  | 0      | 1,999   | 0       |
| 6            | 1     | -1,414 | 0      | 1,999   | 0       |
| 7            | 1     | 0      | 1,414  | 0       | 1,999   |
| 8            | 1     | 0      | -1,414 | 0       | 1,999   |
| 9            | 1     | 0      | 0      | 0       | 0       |
| 10           | 1     | 0      | 0      | 0       | 0       |
| ...          | ...   | ...    | ...    | ...     | ...     |
| 16           | 1     | 0      | 0      | 0       | 0       |

Tafel 5.17  
Drehbarer orthogonaler  
Versuchsplan für ein Modell  
mit zwei Eingangsgrößen  
(Gl. (5.149))

ist in Tafel 5.17 der entsprechende Versuchsplan dieser Strategie dargestellt (s. auch Tafel 5.14).

Ist die Zahl der Einflußgrößen  $l$  hoch, wächst die Anzahl der Versuche stark gegenüber der Anzahl der zu schätzenden Parameter an. Wird auf die exakte Einhaltung der Bedingungen für die Orthogonalität und die Drehbarkeit verzichtet, können nach *Hartley* [5.48] Versuchspläne entworfen werden, die bei einer wesentlich geringeren Versuchszahl für viele Aufgaben der Praxis noch hinreichend genaue Modelle liefern.

## 5.5.3.4. Vereinfachte zentrale Versuchspläne

Von *Hartley* [5.48] wurde auf dem Grundprinzip des Entwurfs zentral zusammengesetzter Pläne untersucht, welche Typen von Teilfaktorplänen  $TFV 2^{l-p}$  noch ausreichend sind, um eine nichtsinguläre Matrix  $M$  für die Versuchsplanung 2. Ordnung zu erhalten. Es gelang ihm, Pläne auf der Basis von  $TFV 2^{l-p}$  als Kernversuche zu entwerfen, die unter der Bedingung, daß von den Wechselwirkungen nur die paarweisen Beziehungen beachtet werden ( $u_i u_j$ ;  $i \neq j$ ), die Ermittlung der Parameter

$$\hat{a}_0, \hat{a}_i, \hat{a}_{ii}; \quad i = 1, 2, \dots, l$$

$$\hat{a}_{ij}; \quad i, j = 1, \dots, l, \quad i \neq j$$

gestatten. Damit wird als allgemeines Systemmodell das in Gl. (5.126) angenommene Polynom 2. Ordnung verwendet. Die allgemeine Struktur dieser zusammengesetzten zentralen Pläne ist in Tafel 5.18 dargestellt. Neben den üblichen  $2l$  Sternpunktversuchen wird in den Plänen von *Hartley* nur ein Nullpunktversuch ( $n_0 = 1$ ) verwendet. Für den Entwurf der Pläne, deren Planungskern  $2^{l-p}$  so gewählt werden muß, daß alle paarweisen Wechselwirkungen unverfälscht geschätzt werden können, ergeben sich für die Anzahl  $l$  der Einflußgrößen die in Tafel 5.19 angegebenen TFV als Kern des zusammengesetzten

Tafel 5.18. Allgemeine Form der Versuchsplanmatrix  $M$  für zusammengesetzte Pläne

| Versuchskomponenten | $u_0$ | $u_1 \dots u_l$   | $u_1^2 \dots u_l^2$ | $u_1 u_2 \dots u_{l-1} u_l$ |
|---------------------|-------|-------------------|---------------------|-----------------------------|
| Planungskern        | 1     | 1 ... 1           | 1 ... 1             | 1 ... 1                     |
| Typ $2^{l-p}$       | 1     | -1 ... 1          | 1 ... 1             | -1 ... 1                    |
|                     | ...   | ...               | ...                 | ...                         |
| Sternpunktversuche  | 1     | $\alpha \dots 0$  | $\alpha^2 \dots 0$  | 0 ... 0                     |
| $2l$                | 1     | $-\alpha \dots 0$ | $\alpha^2 \dots 0$  | 0 ... 0                     |
|                     | ...   | 0 ...             | 0 ...               | ...                         |
| Nullpunktversuch    | 1     | 0 ... 0           | 0 ... 0             | 0 ... 0                     |

| Anzahl der Einflußgrößen $l$ | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Versuchsplantyp $2^{l-p}$    | $2^{3-1}$ | $2^{4-1}$ | $2^{5-1}$ | $2^{6-2}$ | $2^{7-2}$ | $2^{8-2}$ |
| Versuchszahl $n$             | 11        | 17        | 27        | 29        | 47        | 81        |

Tafel 5.19  
Versuchskerne für  
vereinfachte zusammen-  
gesetzte Pläne nach *Hartley*

Versuchsplans. Für drei Einflußgrößen ist der zu realisierende zentrale zusammengesetzte Plan 2. Ordnung nach *Hartley* in Tafel 5.20 entworfen worden. Aus dem Plan wird die Meßwertmatrix  $M$  entsprechend der Modellstruktur von Gl. (5.126) entworfen. Für die Wahl des Planungsniveaus der 2/ Sternpunktversuche gibt es keine allgemeine Festlegung. Weit verbreitet ist die Berechnung der Werte aus Gl. (5.154) oder Gl. (5.156).

| Versuchs-Nr. | $u_0$ | $u_1$  | $u_2$  | $u_3$  |
|--------------|-------|--------|--------|--------|
| 1            | 1     | 1      | 1      | 1      |
| 2            | 1     | 1      | -1     | -1     |
| 3            | 1     | -1     | 1      | -1     |
| 4            | 1     | -1     | -1     | 1      |
| 5            | 1     | 1,147  | 0      | 0      |
| 6            | 1     | -1,147 | 0      | 0      |
| 7            | 1     | 0      | 1,147  | 0      |
| 8            | 1     | 0      | -1,147 | 0      |
| 9            | 1     | 0      | 0      | 1,147  |
| 10           | 1     | 0      | 0      | -1,147 |
| 11           | 1     | 0      | 0      | 0      |

Tafel 5.20  
Zusammengesetzter zentraler  
Versuchsplan für drei Einflußgrößen  
nach *Hartley*

Werden TFV verwendet, die nicht auf die Zweierpotenz aufbauen (sie werden nicht-reguläre TFV genannt), kann die Anzahl der Versuche noch weiter gesenkt werden, ohne daß wesentliche Güteverluste auftreten [5.49].

Insgesamt wird durch diese Versuchsplanstrategien die Anzahl der Experimente vor allem bei vielen Einflußgrößen stark reduziert (z. B. für  $l = 6$  von 45 auf 29, für  $l = 7$  von 79 auf 47).

## 5.6. Übungsaufgaben zum Abschnitt 5

### Aufgabe 5.1

An einem System im stationären Zustand wurden die in Tafel 5.21 dargestellten Werte der Eingangs- und der Ausgangsgröße gemessen. Schätzen Sie mit dem Verfahren der Regression die Parameter  $a_i$  folgender Modellansätze:

a)  $\hat{x} = a_0 + a_1 u$

b)  $\hat{x} = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$

Ermitteln Sie für die Modellansätze die Restquadratsumme, die signifikanten Parameter und die Konfidenzintervalle für die Parameter mit einer Sicherheit von 95%! Interpretieren Sie das Gesamtergebnis, wenn Sie davon ausgehen, daß die Systemgleichung

$$x = 1 + 4u + z$$

ist!

| Nr. | $u$   | $x$    |
|-----|-------|--------|
| 1   | 1,33  | 6,475  |
| 2   | -0,32 | -0,990 |
| 3   | -0,60 | -1,705 |
| 4   | 1,18  | 6,500  |
| 5   | -1,09 | -3,415 |
| 6   | -0,49 | -0,840 |

Tafel 5.21  
Meßwerte zu Aufgabe 5.1

### Aufgabe 5.2

Auf ein System wirken zwei Eingangsgrößen. Zur Ermittlung des Modellansatzes

$$\hat{x} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_2^2$$

wurden die in Tafel 5.22 dargestellten Werte der beiden Eingangsgrößen und der Ausgangsgröße gemessen. Schätzen Sie die Parameter des Modells, und ermitteln Sie ihre Varianzen!

| Nr. | $u_1$ | $u_2$ | $x$  |
|-----|-------|-------|------|
| 1   | 1     | 2     | 16,2 |
| 2   | 3     | 1     | 10,5 |
| 3   | 2     | 1     | 8,0  |
| 4   | 1     | 2     | 15,5 |
| 5   | 3     | 1     | 9,9  |
| 6   | 3     | 2     | 19,9 |

Tafel 5.22  
Meßwerte zu Aufgabe 5.2

### Aufgabe 5.3

An einem System wurden im stationären Zustand

- a) durch Beobachtung der Eingangs- und Ausgangsgrößen die in Tafel 5.23 dargestellten Werte,  
b) durch die Realisierung eines vollständigen Versuchsplans die in Tafel 5.24 dargestellten Werte gewonnen!

Berechnen Sie die Schätzwerte für die Parameter sowie die Varianzen und Kovarianzen der Parameter für den Fall, daß die Streuung der Störung  $\sigma_z^2 = 1$  ist!

Als Regressionsmodell wird gewählt

$$\hat{x} = a_1 u_1 + a_2 u_2.$$

| Nr. | $u_1$ | $u_2$ | $x$  |
|-----|-------|-------|------|
| 1   | -1,5  | -2    | -9,7 |
| 2   | -0,5  | 0     | -0,1 |
| 3   | 0,5   | 0     | 2,0  |
| 4   | 1,5   | 2     | 7,8  |

Tafel 5.23  
Meßwerte zu Aufgabe 5.3a

| Nr. | $u_1$ | $u_2$ | $x$ |
|-----|-------|-------|-----|
| 1   | -1    | -1    | -4  |
| 2   | 1     | -1    | -2  |
| 3   | -1    | 1     | 0   |
| 4   | 1     | 1     | 6   |

Tafel 5.24  
Meßwerte zu Aufgabe 5.3b

### Aufgabe 5.4

Gegeben sind die in Tafel 5.25 dargestellten Ergebnisse eines realisierten aktiven Experiments.

- a) Bestimmen Sie die Werte und die Varianzen der Parameter folgenden Modellansatzes:

$$\hat{x} = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2!$$

Tafel 5.25. Meßwerte zu Aufgabe 5.4

| Nr.   | 1    | 2   | 3    | 4     | 5   | 6    | 7    | 8   |
|-------|------|-----|------|-------|-----|------|------|-----|
| $u_1$ | 1    | -1  | 1    | -1    | 1   | -1   | 1    | -1  |
| $u_2$ | 1    | 1   | -1   | -1    | 1   | 1    | -1   | -1  |
| $x$   | 13,6 | 5,1 | -3,5 | -17,5 | 9,9 | 12,3 | -9,3 | 6,9 |

b) Ermitteln Sie durch Anwendung des  $F$ -Tests, ob das Modell dem System mit einer Sicherheit von 95% äquivalent ist!

Zur Ermittlung der Streuung der Störung wurden die in Tafel 5.26 gegebenen Nullpunktversuche realisiert.

| Nr. | $x$  | Nr. | $x$  |
|-----|------|-----|------|
| 1   | 1,6  | 7   | -1,3 |
| 2   | -4,9 | 8   | 9,5  |
| 3   | 4,5  | 9   | 5,2  |
| 4   | -7,5 | 10  | -3,1 |
| 5   | -2,1 | 11  | -4,0 |
| 6   | 2,3  | 12  | 3,1  |

Tafel 5.26  
Meßwerte der Nullpunktversuche  
zu Aufgabe 5.4

#### Aufgabe 5.5

Für eine Gewächshaussteuerung wird ein Modell benötigt, das den Zusammenhang zwischen der Innentemperatur des Gewächshauses ( $x$ ), der Stellung der Lüftungsklappen ( $u_1$ ), der Ventilstellung der Stehwandheizung ( $u_2$ ) und dem Zustand der Heizlüfter ( $u_3$ ) im stationären Zustand beschreibt.

Zu diesem Zweck wurde der in Tafel 5.27 angegebene Versuchsplan realisiert.

Tafel 5.27. Meßwerte zu Aufgabe 5.5

| Nr. | Stellung Lüftungs-<br>klappen | Betrieb Stehwand-<br>heizung | Betrieb Heizlüfter | Luft-<br>temperatur<br>°C |
|-----|-------------------------------|------------------------------|--------------------|---------------------------|
| 1   | +                             | -                            | +                  | 20,32                     |
| 2   | +                             | -                            | -                  | 18,60                     |
| 3   | +                             | +                            | +                  | 22,04                     |
| 4   | +                             | +                            | -                  | 19,20                     |
| 5   | -                             | -                            | +                  | 24,60                     |
| 6   | -                             | -                            | -                  | 20,45                     |
| 7   | -                             | +                            | +                  | 26,59                     |
| 8   | -                             | +                            | -                  | 23,64                     |

Die Planungsniveaus bedeuten

- + maximaler Öffnungswinkel der Lüftungsklappen,  
Ventil zur Dampfversorgung der Stehwandheizung voll geöffnet,  
Heizlüfter in Betrieb;
- Lüftungsklappen geschlossen,  
Heizungsventil geschlossen,  
Heizlüfter außer Betrieb.

Schätzen Sie die Parameter eines linearen Modells ohne und mit den Wechselwirkungen  $u_1 u_2$  und  $u_1 u_3$ !

## 6. Bestimmung des dynamischen Verhaltens gestörter Systeme

### 6.1. Zielstellung

Wie bereits im Abschnitt 1 gezeigt wurde, ist die Ermittlung von Modellen dynamischer Systeme zur Lösung vieler Aufgaben bei der Diagnose, Überwachung, Steuerung und/oder Vorhersage von Mengen- und Qualitätsparametern in technischen und nichttechnischen Prozessen erforderlich. In diesem Abschnitt sollen in Ergänzung der vorgestellten Verfahren zur Modellbestimmung (s. Abschn. 4) Identifikationsmethoden betrachtet werden, die eine Ermittlung dynamischer Modelle bei folgenden Systemeigenschaften gestatten:

1. Das System kann gestört sein.
2. Das Systemverhalten kann zeitvariant sein.
3. Das Systemverhalten ist linear, oder es kann durch einfache nichtlineare Strukturen beschrieben werden.
4. Das System ist ein Eingrößensystem oder ein Mehrgrößensystem mit  $p$ -kanonischer Struktur.
5. Das System besitzt konzentrierte Parameter.

Als Ein-/Ausgangs-Modelle werden das nichtparametrische Volterra-Reihen-Modell (Abschn. 6.2) und das parametrische Differenzgleichungsmodell (Abschn. 6.3) verwendet. Im Abschnitt 6.5 wird auf die Schätzung des Zustands mit Hilfe der sog. Kalman-Filter eingegangen. Die zweckmäßige Wahl des Modells hängt wesentlich von der späteren Verwendung und dem konkreten praktischen Einsatzfall ab. Eine allgemeine Richtlinie zur Modellauswahl kann nicht gegeben werden. Zur Ableitung der Schätzverfahren für die genannten Modelle werden in diesem Abschnitt aus folgenden Gesichtspunkten diskrete Beschreibungen für die kontinuierlichen Systeme bevorzugt:

1. Die notwendige rechentechnische Verarbeitung der gemessenen Eingangs- und Ausgangssignale erfolgt diskontinuierlich.
2. Der Reglerentwurf und die Simulationsverfahren verwenden häufig Modelle in diskreter Beschreibung.
3. Die Parameterschätzverfahren sind in diskreter Form einfacher und effektiver zu realisieren.

Aus diesen Gründen werden in den nachfolgenden Abschnitten die Signale überwiegend als abgetastete Signale betrachtet. Bei der Darstellung der Schätzverfahren wird ferner immer davon ausgegangen, daß das dynamische Modell des Systems in die allgemeine Struktur (s. Abschn. 1)

$$\hat{x} = m^T \hat{s} \quad (6.1)$$

übergeführt wird, um dadurch die Anwendung einiger bereits im Abschnitt 5 für die Parameterschätzung statischer Modelle hergeleiteter Schätzmethoden zu ermöglichen.

Neben der Wahl der Modellbeschreibung und des Schätzverfahrens hat die Gestaltung

der Eingangssignale, d.h. der Entwurf optimaler Testsignale, eine große Bedeutung bei der Identifikation dynamischer Systeme. Auf dieses Problem wird im Abschnitt 6.4 näher eingegangen.

Auf einige weitere Probleme der Schätzung dynamischer Systeme wird im Abschnitt 6.6 hingewiesen.

## 6.2. Schätzung der Stützstellen der Kerne der Volterra-Reihe

### 6.2.1. Systembeschreibung durch die Volterra-Reihe

Bei der Beschreibung des Ein-/Ausgangs-Verhaltens eines Eingrößensystems durch eine Volterra-Reihe wird davon ausgegangen, daß die ungestörte Ausgangsgröße des Systems  $x^0(t)$  zum Zeitpunkt  $t = kT$  durch folgenden Zusammenhang charakterisiert ist:

$$x^0(kT) = f\{u(kT), u((k-1)T), \dots, u((k-n)T)\}. \quad (6.2)$$

Wird nun nach einem Vorschlag von Volterra [6.1] Gl. (6.2) in eine Taylor-Reihe um den Punkt  $u(kT) = u((k-1)T) = \dots = u((k-n)T) = 0$  entwickelt, erhält man mit der verkürzten Schreibweise  $x(kT) \triangleq x(k)$  usw. [1.46]:

$$\begin{aligned} x^0(k) \approx & f(0) + \left\{ u(k) \frac{\partial f(0)}{\partial u(k)} + \dots + u(k-n) \frac{\partial f(0)}{\partial u(k-n)} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ u^2(k) \frac{\partial^2 f(0)}{\partial u^2(k)} + u(k) u(k-1) \frac{\partial^2 f(0)}{\partial u(k) \partial u(k-1)} + \dots \right. \\ & \left. + u^2(k-n) \frac{\partial^2 f(0)}{\partial u^2(k-n)} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

Wenn für  $f(0) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$  gesetzt wird, gilt für Gl. (6.3)

$$\begin{aligned} x^0(k) = & \{c_0 u(k) + \dots + c_n u(k-n)\} \\ & + \{c_{00} u^2(k) + c_{01} u(k) u(k-1) + \dots + c_{nn} u^2(k-n)\} + \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

und in Summenform

$$x^0(k) = \sum_{i=0}^n c_i u(k-i) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} u(k-i) u(k-j) + \dots$$

Ersetzt man die Parameter

$$\begin{aligned} c_i &= g(iT) T \\ c_{ij} &= g(iT, jT) T^2 \end{aligned}$$

und führt zur Verbesserung der Systembeschreibung die Grenzübergänge  $T \rightarrow 0$  und  $n \rightarrow \infty$  in Gl. (6.4) durch, gilt für das ungestörte Systemausgangssignal  $x^0(t)$

$$\begin{aligned} x^0(t) = & \int_0^\infty g(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die in Gl. (6.5) dargestellte Beziehung wird als *Volterra-Reihe* bezeichnet. Die Zeitfunktionen  $g(\tau_1)$ ,  $g(\tau_1, \tau_2)$ , ... nennt man Kerne der Volterra-Reihe. Sie stellen eine nichtparametrische Beschreibung eines nichtlinearen dynamischen Systems dar.

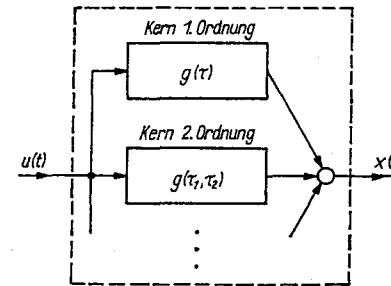


Bild 6.1  
Beschreibung eines dynamischen Systems durch eine Volterra-Reihe

Die Gesamtbeschreibung des Systems durch eine Volterra-Reihe besteht damit aus der Parallelanordnung eines linearen Teilsystems und nichtlinearer Teilsysteme beliebiger Ordnung (Bild 6.1). Jedes der Teilsysteme ist durch einen Kern der entsprechenden Ordnung gekennzeichnet. Die Schätz Aufgabe besteht darin, Stützstellenwerte der Kerne bzw. Parameter sog. Basisfunktionen aus dem gemessenen Eingangs- und Ausgangssignal  $u(t)$  und  $x(t)$  zu ermitteln. Da die Beschreibung der Kerne durch Basisfunktionen keine praktische Bedeutung erlangt hat, wird sie nicht behandelt; der Leser sei auf die Literatur verwiesen [6.2, 6.3, 6.4]. Dem Vorteil der Allgemeingültigkeit der Beschreibung steht der Nachteil der großen Anzahl der zu ermittelnden Stützstellenwerte der Kerne gegenüber. Aus diesem Grund wird die Volterra-Reihe von Gl. (6.5) häufig nach dem quadratischen Glied (2. Ordnung) abgebrochen. Die Volterra-Reihe findet bevorzugt Anwendung bei der Lösung von Vorhersageproblemen und bei der Erstellung dynamischer Verhaltensmodelle in der Medizin, Biologie, Ökologie und Wasserwirtschaft. Weitere Vorteile der Beschreibung sind in der fehlenden Strukturbestimmung und der guten Anwendbarkeit von Methoden der optimalen Versuchsplanung zu sehen.

Als Sonderfall ist in Gl. (6.5) die lineare Systembeschreibung, das Faltungsintegral, enthalten. Für das gestörte System gilt dann

$$x(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau + z(t). \quad (6.6)$$

Der Kern 1. Ordnung, die Gewichtsfunktion  $g(\tau)$ , wird durch eine Auswahl ihrer Ordinaten (Stützstellenwerte)

$$g(iT); \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (6.7)$$

beschrieben. Die Schätzung der Stützstellenwerte setzt voraus, daß der Ausgang des Systems  $x(t)$  mit einer Abtastzeit  $T$  zu diskreten Zeitpunkten gemessen wird und das Eingangssignal  $u(t)$  im Zeitintervall  $T$  konstant sowie für  $t < 0$  gleich null ist. Aus Gl. (6.6) folgt analog zu den Betrachtungen im Abschnitt 4.2.3 und in Anlehnung an die in [1.37, 3.1, 3.2] gewählte Schreibweise:

$$x(k) = \sum_{j=0}^{\infty} u(k-j) \int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau) d\tau + z(k). \quad (6.8)$$

Setzt man in Gl. (6.8) als Näherung:

$$\int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau) d\tau = g(jT) T$$

ein, ergibt sich mit  $g(jT) \triangleq g(j)$

$$x(k) = T \sum_{j=0}^{\infty} g(j) u(k-j) + z(k). \quad (6.9)$$

In Gl. (6.9) ist die Zahl der Eingangswerte, die den Ausgang  $x(k)$  beeinflussen, nicht konstant.

Beschränkt man sich jedoch auf Systeme mit Ausgleich, für die  $g(\tau) \approx 0$  bei  $\tau > T_s$  ( $T_s$  Übergangszeit des Systems), und wählt eine Beobachtungszeit  $T_B = (m+1)T \approx T_s$ , so führt ein Austausch der oberen Summationsgrenze in Gl. (6.9) von  $k-1$  auf  $m$  zur Beziehung

$$x(k) = T \sum_{j=0}^m g(j) u(k-j) + z(k). \quad (6.10)$$

Wählt man als Beschreibung des Systems eine Volterra-Reihe 2. Ordnung – s. Gl. (6.5) –, werden die Kerne  $g(\tau_1)$  und  $g(\tau_1, \tau_2)$  durch eine Auswahl ihrer Ordinaten

$$g(iT), g(iT, jT); \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (6.11)$$

gekennzeichnet.

Unter den bereits für das Faltungsintegral formulierten Bedingungen folgt aus Gl. (6.5) somit

$$\begin{aligned} x(k) = & \sum_{j=0}^m u(k-j) \int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau) d\tau \\ & + \sum_{i=0}^m \sum_{j=i}^m u(k-j) u(k-i) \int_{iT}^{(i+1)T} \int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + z(k). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Setzt man in Gl. (6.12) für

$$\begin{aligned} \int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau) d\tau &= g(jT) T, \\ \int_{iT}^{(i+1)T} \int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 &= g(iT, jT) T^2 \end{aligned}$$

ein, ergibt sich die Beziehung

$$x(k) = T \sum_{j=0}^m g(j) u(k-j) + T^2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=i}^m g(i, j) u(k-j) u(k-i) + z(k). \quad (6.13)$$

Eine Vereinfachung der bisher abgeleiteten Modelle ist dadurch möglich, daß das nichtlineare dynamische Gesamtsystem als Reihenschaltung eines nichtlinearen statischen und

eines linearen dynamischen Übertragungsglieds dargestellt wird. Die Beschreibung des nichtlinearen Teilsystems erfolgt dabei gewöhnlich in Form eines Polynoms der Ordnung  $p$

$$x_{NL}(k) = \sum_{i=0}^p r_i u_{NL}^i(k), \quad (6.14)$$

während das lineare Teilsystem durch die Gewichtsfunktion  $g(\tau)$  dargestellt wird. In Abhängigkeit von der Reihenfolge der beiden Teilsysteme unterscheidet man das Wiener-Modell und das Hammerstein-Modell.

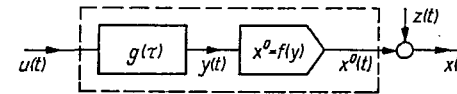


Bild 6.2. Struktur des Wiener-Modells (Gewichtsfunktionsmodell)

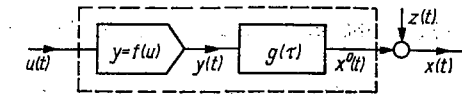


Bild 6.3. Struktur des Hammerstein-Modells (Gewichtsfunktionsmodell)

Das Wiener-Modell hat die im Bild 6.2 dargestellte Struktur. Daraus resultiert ein Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal in der Form

$$x(t) = \sum_{i=0}^p r_i \left( \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau \right)^i + z(t). \quad (6.15)$$

Unter den bereits für das Faltungsintegral angegebenen Diskretisierungsbedingungen ergibt sich aus Gl. (6.15)

$$x(k) = \sum_{i=0}^p r_i \left\{ \sum_{j=0}^m u(k-j) \int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau) d\tau \right\}^i + z(k).$$

Setzt man wiederum für

$$\int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau) d\tau = g(jT) T$$

ein, ergibt sich

$$x(k) = \sum_{i=0}^p r_i \left\{ T \sum_{j=0}^m g(j) u(k-j) \right\}^i + z(k). \quad (6.16)$$

Beschränkt man sich auf Nichtlinearitäten 2. Ordnung, gelangt man aus Gl. (6.16) zu

$$\begin{aligned} x(k) = & r_0 + r_1 T \sum_{j=0}^m g(j) u(k-j) \\ & + r_2 T^2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=i}^m g(i) g(j) u(k-i) u(k-j) + z(k). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Das Hammerstein-Modell hat die im Bild 6.3 dargestellte Struktur. Daraus ergibt sich für den Zusammenhang zwischen dem Eingangs- und Ausgangssignal

$$x(t) = \sum_{i=0}^p r_i \int_0^t g(\tau) [u(t-\tau)]^i d\tau + z(k). \quad (6.18)$$

Unter den für alle bisher behandelten Modelle festgelegten Bedingungen ergibt sich aus Gl. (6.18)

$$x(k) = \sum_{i=0}^p r_i \sum_{j=0}^m u^i(k-j) \int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau) d\tau + z(k). \quad (6.19)$$

Setzt man in Gl. (6.19) die Beziehung

$$\int_{jT}^{(j+1)T} g(\tau) d\tau = g(jT) T$$

ein, ergibt sich für das abgetastete Ausgangssignal

$$x(k) = \sum_{i=0}^p r_i T \sum_{j=0}^m u^i(k-j) g(j) + z(k). \quad (6.20)$$

Beschränkt man sich auf Nichtlinearitäten 2. Ordnung, gelangt man aus Gl. (6.20) zu

$$\begin{aligned} x(k) = & r_0 T \sum_{j=0}^m g(j) + r_1 T \sum_{j=0}^m u(k-j) g(j) \\ & + r_2 T \sum_{j=0}^m u^2(k-j) g(j) + z(k). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Damit sind die wesentlichen Beschreibungsformen von Systemen durch Volterra-Reihen vorgestellt. Sie zeichnen sich alle dadurch aus, daß die zu ermittelnden Kennwerte, d. h. die Stützstellen der Kerne, linear mit dem Ausgangssignal zusammenhängen. Dadurch ist die Anwendung der im Abschnitt 5 vorgestellten Schätzverfahren der Regression möglich und in vielen Fällen ausreichend.

## 6.2.2. Schätzung der Stützstellenwerte der Gewichtsfunktion

### 6.2.2.1. Entfaltung mit Ausgleich bei linearen Systemen

Für lineare dynamische Eingrößensysteme wurde im Abschnitt 6.2.1 aus dem Faltungsintegral eine Beschreibung des Ein-/Ausgangs-Verhaltens bei Verwendung der Stützstellenwerte der Gewichtsfunktion entsprechend Gl. (6.9) abgeleitet:

$$x(k) = T \sum_{j=0}^m g(j) u(k-j) + z(k). \quad (6.22)$$

Gl. (6.22) läßt sich in eine vektorielle Form überführen, die die Anwendung des Regressionsverfahrens erleichtert. Zum  $k$ -ten Zeitpunkt gilt

$$x(k) = T m^T(k) s + z(k) \quad (6.23)$$

mit

$$m^T(k) = [u(k), u(k-1), \dots, u(k-m)]$$

$$s^T = [g(0), g(1), \dots, g(m)].$$

Für  $n (n \geq m+1)$  Beobachtungen erhält man

$$x(k) = T M s + z(k) \quad (6.24)$$

mit

$$x^T(k) = [x(k), x(k+1), \dots, x(k+n)]$$

$$M = \begin{bmatrix} u(k) & \dots & u(k-m) \\ \vdots & & \vdots \\ u(k+n) & \dots & u(k+n-m) \end{bmatrix}.$$

Weist die Störung  $z(t)$  die Eigenschaften des normalverteilten „weißen Rauschens“ auf (s. Abschn. 5.2.2), liefert die Methode der kleinsten Quadrate eine erwartungstreue lineare Schätzung für die Stützstellen der Gewichtsfunktion der Form

$$\hat{s} = \frac{1}{T} [M^T M]^{-1} M^T x \quad (6.25)$$

mit

$$\hat{s}^T = [\hat{g}(0), \hat{g}(1), \dots, \hat{g}(m)].$$

Die Schätzung des Ausgangs ergibt sich zu

$$\hat{x}(k) = T m^T(k) \hat{s}. \quad (6.26)$$

Die Ermittlung statistischer Gütewerte für die Stützstellenwerte der Gewichtsfunktion erfolgt analog zu den Gleichungen im Abschnitt 5.2.2.

Neben der Methode der Regression wurden zur Schätzung der Stützstellenwerte der Gewichtsfunktion die rekursive Regression [1.31] und die stochastische Approximation [6.5, 6.6] verwendet. Da die Systemstruktur von Gl. (6.23) der des statischen Falles sehr ähnlich ist, zeigen auch die rekursiven Schätzverfahren die gleichen Konvergenzergebnisse, wie im Abschnitt 5.4.3 erläutert. Als rekursives Schätzverfahren hat sich die rekursive Regression für zeitvariante und zeitinvariante Systeme als das leistungsstärkste erwiesen [1.31].

Im Beispiel 6.1 ist die Ermittlung der Werte der zeitdiskreten Gewichtsfunktion eines gestörten linearen Systems mittels Regressionsverfahren dargestellt.

### 6.2.2.2. Korrelationsverfahren

Zur Beschreibung des statistischen Zusammenhangs zwischen dem Ausgangssignal  $x(t)$  und dem Eingangssignal  $u(t)$  eines gestörten linearen dynamischen Systems kann die Kreuzkorrelationsfunktion verwendet werden. Es gilt entsprechend Abschnitt 3

$$R_{ux}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) x(t+\tau) dt. \quad (6.27)$$

Berücksichtigt man in dieser Gleichung, daß der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal durch das Faltungsintegral entsprechend Gl. (6.28)

$$x(t) = \int_0^\infty g(\tau) u(t-\tau) d\tau + z(t) \quad (6.28)$$

bestimmt ist, ergibt sich unter der Voraussetzung, daß das Störsignal  $z(t)$  nicht mit dem Eingangssignal  $u(t)$  korreliert ist, die Beziehung zwischen der Gewichtsfunktion und der Kreuzkorrelationsfunktion in der bekannten Form (s. Abschn. 3.2.4) zu

$$R_{ux}(\tau) = \int_0^\infty g(t) R_{uu}(\tau-t) dt. \quad (6.29)$$

Gegeben:

Systembeschreibung

$$G(p) = \frac{5}{(1 + p \cdot 10s)(1 + p \cdot 5s)} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = [e^{-x/10} - e^{-x/5}] s^{-1},$$

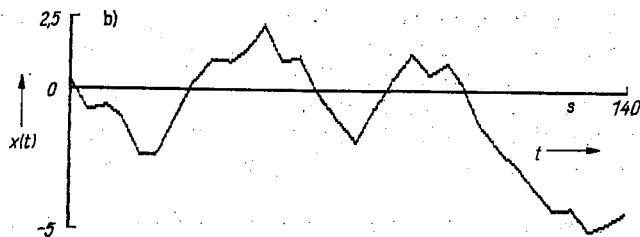
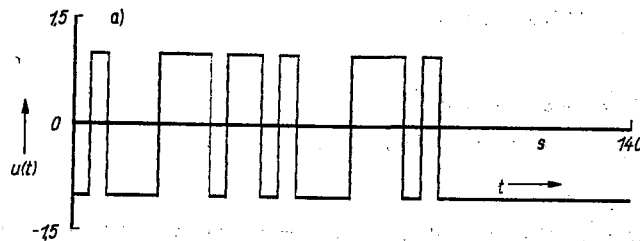
Abtastzeit  $T = 4s$ ,Testsignal: Folge aus Plackett-Burman-Plan ( $m+1=11$ , Amplitude  $\pm 1$ , Gesamtlänge 327),Störung  $NV(0, \sigma_z^2)$ ; hochfrequent, Störverhältnis  $\sqrt{\sigma_z^2/\sigma_{x0}^2} = 0,13$ .

Gesucht:

Schätzwerte für die Stützstellen der Gewichtsfunktion und die Reststreuung  $s_R^2$ .

Ergebnis:

Aus den Meßwerten des Eingangs- und Ausgangssignals (Bild a und b)

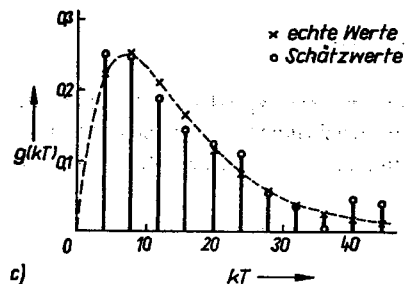


wurden folgende Stützstellenwerte geschätzt:

| i            | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $g(i)$       | 0,22099 | 0,24743 | 0,21048 | 0,16113 | 0,11701 | 0,08249 |
| $\hat{g}(i)$ | 0,2502  | 0,2467  | 0,1873  | 0,1427  | 0,1242  | 0,1085  |
| i            | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      |         |
| $g(i)$       | 0,05711 | 0,03910 | 0,02658 | 0,01793 | 0,01213 |         |
| $\hat{g}(i)$ | 0,0568  | 0,0346  | 0,0002  | 0,0454  | 0,0412  |         |

Reststreuung  $s_R^2 = 0,1105$ .

Ein Vergleich der exakten und geschätzten Stützstellen zeigt, daß das Modell relativ gut ermittelt wird (Bild c).



Unter den bereits für das Faltungsintegral im Abschnitt 6.2.1 verwendeten Diskretisierungsbedingungen folgt aus Gl. (6.29) für den diskreten Fall

$$R_{ux}(m) = T \sum_{j=0}^{\infty} g(j) R_{uu}(m-j). \quad (6.30)$$

Beschränkt man sich auch hier auf Systeme mit Ausgleich, so daß für alle  $j > m$  gilt  $g(jT) = 0$ , kann als obere Grenze für die Summation  $m$  eingesetzt werden.

Nimmt die Verschiebung  $m$  verschiedene Werte an, so erhält man das Gleichungssystem

$$R_{ux} = TR_{uu}s \quad (6.31)$$

mit

$$R_{ux}^T = [R_{ux}(0), \dots, R_{ux}(m)]$$

$$R_{uu} = \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(m) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{uu}(m) & \dots & R_{uu}(0) \end{bmatrix}$$

$$s^T = [g(0), \dots, g(m)].$$

Wenn die Inverse der Matrix  $R_{uu}$  existiert, kann aus Gl. (6.31) folgender Schätzalgorithmus unter Verwendung der empirisch ermittelten Korrelationsfunktionen  $\hat{R}_{uu}$  und  $\hat{R}_{ux}$  für die Werte an den Stützstellen abgeleitet werden:

$$\hat{s} = \frac{1}{T} [\hat{R}_{uu}]^{-1} \hat{R}_{ux} \quad (6.32)$$

mit

$$\hat{s}^T = [\hat{g}(0), \dots, \hat{g}(m)].$$

Das Problem des Korrelationsverfahrens liegt in der Ermittlung der Korrelationsfunktionen mit ausreichender Genauigkeit [1.37, 3.3, 4.9]. Werden die Korrelationsfunktionen aus gemessenen abgetasteten Werten des Eingangs- und Ausgangssignals gewonnen, sind die Schätzergebnisse von Gl. (6.32) mit denen von Gl. (6.25) identisch.

## 6.2.3. Schätzung der Stützstellenwerte der Kerne der Volterra-Reihe 2. Ordnung

### 6.2.3.1. Schätzung bei Hammerstein-Struktur des Systems

Für Systeme mit Hammerstein-Struktur wurde im Abschnitt 6.2.1 ein Modell zur Beschreibung des Ein-/Ausgangs-Verhaltens bei Darstellung der Gewichtsfunktion durch Stützstellen entsprechend Gl. (6.21) abgeleitet:

$$\begin{aligned} x(k) = & r_0 T \sum_{j=0}^m g(j) + r_1 T \sum_{j=0}^m u(k-j) g(j) \\ & + r_2 T \sum_{j=0}^m u^2(k-j) g(j) + z(k). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Gl. (6.33) läßt sich ebenfalls in eine vektorielle Form überführen. Zum Zeitpunkt  $k$  gilt

$$x(k) = Tm^T(k)s + z(k) \quad (6.34)$$

mit

$$m^T = [1 : u(k), \dots, u(k-m) : u^2(k), \dots, u^2(k-m)]$$

$$s^T = [g^0 : g^1(0), \dots, g^1(m) : g^2(0), \dots, g^2(m)].$$

Die einzelnen Komponenten des Parametervektors  $s$  haben dabei folgende Bedeutung:

$$g^0 = r_0 \sum_{j=0}^m g(j)$$

$$g^1(j) = r_1 g(j) \quad (6.35)$$

$$g^2(j) = r_2 g(j).$$

Für  $n$  Beobachtungen erhält man das Gleichungssystem

$$x(k) = TMs + z(k) \quad (6.36)$$

mit

$$x^T(k) = [x(k), x(k+1), \dots, x(k+n)]$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & u(k) & \dots & u(k-m) & u^2(k) & \dots & u^2(k+n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u(k+n) & \dots & u(k+n-m) & u^2(k+n) & \dots & u^2(k+n-m) \end{bmatrix}.$$

Die Schätzung für den unbekannten Vektor der Stützstellen ergibt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate zu

$$\hat{s} = \frac{1}{T} [M^T M]^{-1} M^T x \quad (6.37)$$

mit

$$\hat{s}^T = [g^0, g^1(0), \dots, g^1(m), g^2(0), \dots, g^2(m)].$$

Wie aus Gl. (6.37) zu sehen ist, gelingt es für diese Modelldarstellung nicht, mit Hilfe der Regression eine getrennte Schätzung für die Parameter der beiden Teilsysteme zu erhalten. Eine Auftrennung ist jedoch zur Deutung vieler untersuchter praktischer Phänomene sinnvoll und möglich, wenn vorausgesetzt wird, daß das lineare dynamische Teilsystem einen Verstärkungsfaktor von  $K = 1$  besitzt. Eine Schätzung für die Koeffizienten des Polynoms der Nichtlinearität ist dann durch folgende Beziehungen gegeben:

1. Aus  $g^0 T = r'_0 T \sum_{j=0}^m g'(j)$  mit  $K = T \sum_{j=0}^m g'(j) = 1$  folgt

$$r'_0 = g^0 T. \quad (6.38)$$

2. Aus  $T \sum_{j=0}^m g^1(j) = r'_1 T \sum_{j=0}^m g'(j)$  mit  $K = T \sum_{j=0}^m g'(j) = 1$  folgt

$$r'_1 = T \sum_{j=0}^m g^1(j). \quad (6.39)$$

3. Aus  $T \sum_{j=0}^m g^2(j) = r'_2 T \sum_{j=0}^m g'(j)$  mit  $K = T \sum_{j=0}^m g'(j) = 1$  folgt

$$r'_2 = T \sum_{j=0}^m g^2(j). \quad (6.40)$$

Gegeben:

Systembeschreibung

– lineares dynamisches Teilsystem

$$G(p) = \frac{1}{(1+p \cdot 10s)(1+p \cdot 5s)} \quad \text{bzw.} \quad g(\tau) = 0,2 [e^{-\tau/10} - e^{-\tau/5}] s^{-1}$$

– nichtlineares statisches Teilsystem

$$P(u) = r_0 + r_1 u + r_2 u^2$$

$$\text{mit } r_0 = -1,0, \quad r_1 = 2,0, \quad r_2 = 0,5.$$

Testsignal: Folge aus einem zentral zusammengesetzten Versuchsplan 2. Ordnung (Kern: Plackett-Burman-Plan für  $m+1=11$ , Amplituden  $\pm 1$ ,  $\pm \alpha = \pm 3,464$ , Gesamtlänge  $65T$ ).

Abtastzeit  $T = 4s$ ,

Störung  $NV(0, \sigma_z^2)$ ; hochfrequent,

Störverhältnis  $\sqrt{\sigma_z^2/\sigma_{x_0}^2} = 0,15$ .

Gesucht:

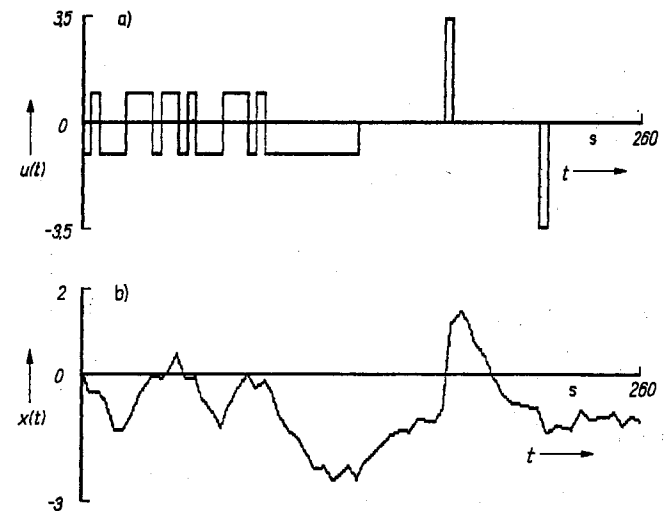
– Schätzwerte für die Stützstellen der Volterra-Kerne 1. und 2. Ordnung

– Stützstellen des linearen dynamischen Teilsystems und Parameter der Nichtlinearität

– Reststreuung  $s_R^2$ .

Ergebnis:

Aus den Meßwerten des Eingangs- und Ausgangssignals (Bild a und b)



wurden folgende Stützstellenwerte für die Volterra-Kerne 1. und 2. Ordnung geschätzt:

| $i$ | $g^1(i)$ | $\hat{g}^1(i)$ | $g^2(i)$ | $\hat{g}^2(i)$ |
|-----|----------|----------------|----------|----------------|
| 0   | 0,08840  | 0,09614        | 0,02210  | 0,02146        |
| 1   | 0,09897  | 0,09764        | 0,02474  | 0,02561        |
| 2   | 0,08419  | 0,08335        | 0,02105  | 0,02234        |
| 3   | 0,06445  | 0,06521        | 0,01611  | 0,01574        |
| 4   | 0,04680  | 0,04582        | 0,01170  | 0,01784        |
| 5   | 0,03300  | 0,03682        | 0,00825  | 0,01084        |
| 6   | 0,02284  | 0,01935        | 0,00571  | 0,00720        |
| 7   | 0,01564  | 0,01182        | 0,00391  | 0,00498        |
| 8   | 0,01063  | 0,00306        | 0,00266  | 0,00571        |
| 9   | 0,00717  | 0,01627        | 0,00179  | 0,00170        |
| 10  | 0,00485  | 0,00958        | 0,00121  | 0,00452        |

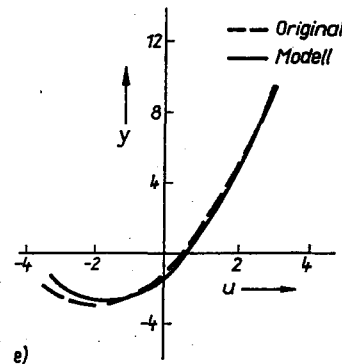
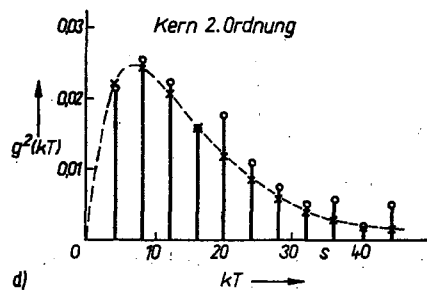
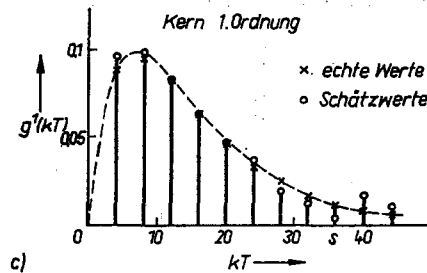
Beispiel  
6.2Parameterschätzung der Kerne der Volterra-Reihe 2. Ordnung  
(Hammerstein-Struktur) mittels Regression

Für den Arbeitspunkt  $g^0 = -1,0$  wurde als Schätzwert  $\hat{g}^0 = -1,0988$  erhalten. Daraus ergeben sich als Schätzwerte für die Koeffizienten der statischen Nichtlinearität

$$\hat{r}_0 = -1,0988, \quad \hat{r}_1 = 1,94269, \quad \hat{r}_2 = 0,5518$$

und für die Stützstellen der Gewichtsfunktion des linearen dynamischen Teilsystems

| $i$           | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $g'(i)$       | 0,0442 | 0,0495 | 0,0421 | 0,0322 | 0,0234 | 0,0165 |
| $\hat{g}'(i)$ | 0,0495 | 0,0503 | 0,0429 | 0,0336 | 0,0236 | 0,0190 |
| $i$           | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |        |
| $g'(i)$       | 0,0114 | 0,0078 | 0,0053 | 0,0036 | 0,0024 |        |
| $\hat{g}'(i)$ | 0,0103 | 0,0061 | 0,0016 | 0,0084 | 0,0049 |        |



Die Reststreuung ist  $s_a^2 = 0,0115$ . Ein Vergleich der Modelle mit dem Originalsystem (Bild c bis e) zeigt, daß sowohl die Parameter des statischen Teilsystems als auch die Stützstellen beider Volterra-Kerne relativ gut ermittelt werden.

Für die normierten Werte der Stützstellen der Gewichtsfunktion gilt

$$g'_j = \frac{g^1(j)}{r'_1} \quad \text{bzw.} \quad g'_j = \frac{g^2(j)}{r'_2}. \quad (6.41)$$

Die abgeleiteten Parameter  $r_i$  erlauben die Darstellung der statischen Nichtlinearität eines dynamischen Systems durch ein Polynom der Form

$$y = r'_0 + r'_1 u + r'_2 u^2. \quad (6.42)$$

Wie aus Gl. (6.35) zu entnehmen ist, stellen die für das Hammerstein-Modell zu schätzenden Stützstellen  $g^0$ ,  $g^1(j)$  und  $g^2(j)$  Produkte der Koeffizienten der statischen Nichtlinearität  $r_i$  und der Abtastwerte der Gewichtsfunktion des linearen Teilmodells  $g(j)$  dar. Die Gesamtzahl der zu schätzenden Parameter beträgt dadurch  $N = p(m+1) + 1$ , obwohl das Systemverhalten nur durch  $(m+1)$  Stützstellen und  $p$  nichtlineare Koeffizienten bestimmt wird. Eine getrennte Schätzung der Parameter des nichtlinearen statischen Teilsystems und der Stützstellenwerte der Gewichtsfunktion und damit eine Parameterreduktion sind durch eine zweistufige iterative Gestaltung der Regression möglich. Die Methode ist in den Arbeiten [6.7, 6.8] dargestellt. Ihre Anwendung ist bei einer hohen Ordnung  $p$  der Nichtlinearität sinnvoll.

Die Ermittlung der Parameter eines Hammerstein-Modells für ein gestörtes System unter Verwendung der Methode der Regression ist im Beispiel 6.2 demonstriert.

## 6.2.3.2. Schätzung bei Wiener-Struktur des Systems

Für Systeme mit Wiener-Struktur wurde im Abschnitt 6.2.1 ein Modell zur Beschreibung des Ein-/Ausgangs-Verhaltens bei Darstellung der Gewichtsfunktion durch Stützstellen entsprechend Gl. (6.17) abgeleitet:

$$x(k) = r_0 + r_1 T \sum_{j=0}^m g(j) u(k-j) + r_2 T^2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^m g(i) g(j) u(k-i) u(k-j) + z(k). \quad (6.43)$$

Gl. (6.43) ist ebenfalls in eine vektorielle Form überführbar. Zum Zeitpunkt  $k$  gilt

$$x(k) = T^* m^T(k) s + z(k) \quad (6.44)$$

mit

$$m^T = \underbrace{[1]}_I, \quad \underbrace{[u(k), \dots, u(k-m)]}_{II}, \quad \underbrace{[u^2(k), u(k), u(k-1), \dots, u^2(k-m)]}_{III},$$

$$T^* = \begin{cases} 1 & \text{für den Teilvektor I} \\ T & \text{für den Teilvektor II} \\ T^2 & \text{für den Teilvektor III} \end{cases}$$

$$s^T = [g^0, g^1(0), \dots, g^1(m), g^2(0,0), g^2(0,1), \dots, g^2(m,m)].$$

Die einzelnen Komponenten des Parametervektors  $s$  haben dabei folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} g^0 &= r_0 \\ g^1(j) &= r_1 g(j) \\ g^2(i, j) &= r_2 g(i) g(j). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Für  $n$  Beobachtungen erhält man

$$\begin{aligned} x(k) &= T^* M s + z(k) \\ x^T(k) &= [x(k), x(k+1), \dots, x(k+m)] \\ M &= \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$M = \begin{bmatrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 1u(k) & u(k-m) & u^2(k) & u(k)u(k-1) & \dots & u^2(k-m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1u(k+n) & \dots & u(k+n-m) & u^2(k+n) & u(k+n) & u(k+n-1) & \dots & u^2(k+n-m) \end{bmatrix}$$

$$T^* = \begin{cases} 1 & \text{für die Teilmatrix I} \\ T & \text{für die Teilmatrix II} \\ T^2 & \text{für die Teilmatrix III.} \end{cases}$$

Die Schätzung für den unbekannten Vektor der Stützstellenwerte ergibt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate zu

$$\hat{s} = \frac{1}{T^*} [M^T M]^{-1} M^T x \quad (6.47)$$

mit

$$\hat{s}^T = [\hat{g}^0, \hat{g}^1(0), \dots, \hat{g}^1(m), \hat{g}^2(0, 0), \hat{g}^2(0, 1), \dots, \hat{g}^2(m, m)].$$

Die Gln. (6.46) und (6.47) sind in gleicher Weise für die Schätzung des Volterra-Reihen-Modells 2. Ordnung gültig, da eine vektorielle Darstellung der Gl. (6.13) genau den Gln. (6.44) bzw. (6.46) entspricht – mit veränderter Bedeutung der  $g(i, j)$ .

Wie für das Hammerstein-Modell gelingt es entsprechend Gl. (6.45) auch für das Wiener-Modell nicht, eine getrennte Schätzung für die Parameter der beiden Teilsysteme zu erhalten. Eine nachträgliche Auftrennung ist jedoch ebenfalls möglich, wenn wiederum davon ausgegangen wird, daß das lineare dynamische Teilsystem einen Verstärkungsfaktor von  $K = 1$  besitzt. Aus dieser Bedingung und den Beziehungen in Gl. (6.45) folgt für die dann gültigen normierten Koeffizienten  $r'_i$ :

$$1. \quad r_0 = g^0. \quad (6.48)$$

2. Aus

$$T \sum_{j=0}^m g^1(j) = r'_1 T \sum_{j=0}^m g'(j)$$

folgt mit

$$T \sum_{j=0}^m g'(j) = 1 \quad (6.49)$$

$$r'_1 = T \sum_{j=0}^m g^1(j).$$

3. Aus

$$T^2 \sum_{j=0}^m g^2(j, j) = r'_2 T^2 \sum_{j=0}^m g'(j)^2$$

folgt mit

$$\begin{aligned} g'(j) &= g^1(j)/r'_1 \\ r'_2 &= r'_1{}^2 \frac{\sum_{j=0}^m g^2(j, j)}{\sum_{j=0}^m [g^1(j)]^2} = T^2 \frac{\left[ \sum_{j=0}^m g^1(j) \right]^2 \sum_{j=0}^m g^2(j, j)}{\sum_{j=0}^m [g^1(j)]^2}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Für die normierten Werte der Stützstellen der Gewichtsfunktion ergibt sich

$$g'(j) = g^1(j)/r'_1. \quad (6.51)$$

Die im Abschnitt 6.2.3.1 genannte Methode der zweistufigen Regression zur sofortigen getrennten Ermittlung der Parameter der beiden Teilsysteme ist auf das Wiener-Modell nicht anwendbar, da eine geschlossene vektorielle Darstellung des Modellausgangs in einer für das Verfahren erforderlichen Form nicht möglich ist [6.3].

#### 6.2.4. Schätzung der Stützstellen der Gewichtsfunktionen in Mehrgrößensystemen

Wird eine  $p$ -kanonische Struktur des Mehrgrößensystems angenommen, kann die Schätzung der Stützstellen der Gewichtsfunktionen der  $l$  Teilsysteme, die auf den  $i$ -ten Ausgang wirken, in Analogie zu Gl. (6.20) erfolgen auf der Basis der Beziehung

$$x_i(k) = T \sum_{\theta=1}^l \sum_{j=0}^{m_{\theta i}} g_{\theta i}(j) u_{\theta}(k-j) + z_i(k); \quad (6.52)$$

$g_{\theta i}(j)$   $j$ -te Stützstelle der Gewichtsfunktion  $g_{\theta i}(\tau)$  für die Teilstrecke zwischen dem  $\theta$ -ten Eingang und dem  $i$ -ten Ausgang  
( $m_{\theta i} + 1$ ) Anzahl der Stützstellen für die Gewichtsfunktion  $g_{\theta i}(\tau)$ .

Gl. (6.52) ist ebenfalls in eine vektorielle Form überführbar. Zum Zeitpunkt  $k$  gilt

$$x_i(k) = T m_i^T(k) s_i + z_i(k) \quad (6.53)$$

mit

$$\begin{aligned} m_i^T(k) &= [u_1(k) \dots u_1(k - m_{1i}) : u_2(k) \dots u_2(k - m_{2i}) : \dots \\ &\quad \dots : u_l(k) \dots u_l(k - m_{li})] \\ s_i^T &= [g_{1i}(0) \dots g_{1i}(m_{1i}) : g_{2i}(0) \dots g_{2i}(m_{2i}) : \dots \\ &\quad \dots : g_{li}(0) \dots g_{li}(m_{li})]. \end{aligned}$$

Für  $n$  Beobachtungen erhält man

$$x_i(k) = T M_i s_i + z_i(k) \quad (6.54)$$

mit

$$x_i^T(k) = [x_i(k), x_i(k+1), \dots, x_i(k+n)]$$

$$M_i = \begin{bmatrix} u_1(k) & \dots & u_1(k - m_{1i}) & \dots & u_l(k) & \dots & u_l(k - m_{li}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1(k+n) & \dots & u_1(k+n - m_{1i}) & \dots & u_l(k+n) & \dots & u_l(k+n - m_{li}) \end{bmatrix}.$$

Mit der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich die Schätzung der Stützstellen der Gewichtsfunktionen zu

$$\hat{s}_i = \frac{1}{T} [M_i^T M_i]^{-1} M_i^T x_i \quad (6.55)$$

mit

$$\hat{s}_i^T = [\hat{g}_{1i}(0) \dots \hat{g}_{1i}(m_{1i}) : \dots : \hat{g}_{ii}(0) \dots \hat{g}_{ii}(m_{ii})].$$

Damit wurde eine Zerlegung des Mehrgrößensystems mit  $l$  Eingängen und  $m$  Ausgängen in  $m$  Teilsysteme mit  $l$  Eingängen vorgenommen (s. Bilder 6.32 und 6.33).

Bisher wurde davon ausgegangen, daß für alle Teilstrecken die gleiche Abtastzeit  $T$  verwendet werden kann. Im Abschnitt 6.6.4 werden verschiedene Strategien zur Wahl der Abtastzeit  $T$  vorgestellt.

Für Mehrgrößensysteme  $p$ -kanonischer Struktur wird zunächst, ausgehend von diesen Strategien, eine günstige Abtastzeit  $T_{\vartheta i}$  für jede Teilstrecke bestimmt. Durch Festlegung einer entsprechenden Stützstellenzahl ( $m_{\vartheta i} + 1$ ) für jede Teilstrecke sollte zur Vereinfachung der Versuchsdurchführung und der Auswertung versucht werden, eine gemeinsame Abtastzeit für alle Teilstrecken festzulegen. Dann gilt

$$T = T_{\vartheta i}; \quad \vartheta = 1, \dots, l.$$

Unterscheiden sich die Abtastzeiten für die einzelnen Teilstrecken  $T_{\vartheta i}$  wesentlich, führt die Verwendung einer gemeinsamen Abtastzeit  $T$  zu einer ungünstigen Anzahl von Stützstellen für die Gewichtsfunktionen der Teilstrecken. (Einzelne Teilstrecken haben eine zu niedrige Stützstellenzahl; andernfalls wird die Gesamtanzahl der Stützstellen für alle Teilstrecken sehr hoch.)

In einem solchen Fall muß von der Verwendung unterschiedlicher Abtastzeiten für die einzelnen Teilstrecken ausgegangen werden.

In den Gln. (6.54) und (6.55) ist dann die skalare Größe  $T$  durch eine Diagonalmatrix  $T_i$  der Form

$$T_i = \begin{bmatrix} T_{11} & & & \\ & T_{11} & & \\ & & T_{21} & \\ & & & T_{21} \\ & & & & T_{ii} \\ & & & & & T_{ii} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} m_{1i} + 1 \\ m_{2i} + 1 \\ \vdots \\ m_{ii} + 1 \end{array} \right\} \quad (6.56)$$

zu ersetzen. Als Schätzvorschrift für die Stützstellen der Gewichtsfunktionen für den  $i$ -ten Ausgang gilt dann

$$\hat{s}_i = T_i^{-1} [M_i^T M_i]^{-1} M_i^T x_i. \quad (6.57)$$

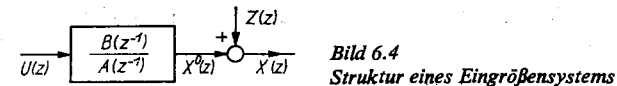
## 6.3. Schätzung der Koeffizienten der Differenzengleichung

### 6.3.1. Systembeschreibungen und Fehlergleichungen

#### 6.3.1.1. Lineare Eingrößensysteme

Eine weitere allgemeine Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines diskreten Systems erfolgt durch die Differenzengleichung [1.34 bis 1.53, 3.2]. Für ein lineares zeitinvariantes ungestörtes Eingrößensystem  $m$ -ter Ordnung ist sie gegeben durch

$$\begin{aligned} x^0(k) + a_1 x^0(k-1) + \dots + a_m x^0(k-m) \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m). \end{aligned} \quad (6.58)$$



Dabei bedeuten  $x^0(k)$  die zum Zeitpunkt  $kT$  abgetasteten Werte des ungestörten Ausgangssignals und  $u(k)$  die abgetasteten Werte des Eingangssignals (Bild 6.4). Der Signalwert  $x^0(k)$  ergibt sich aus Gl. (6.58) rekursiv zu

$$x^0(k) + \sum_{i=1}^m a_i x^0(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i). \quad (6.59)$$

In Vektorschreibweise ergibt sich aus Gl. (6.58)

$$x^0(k) = m^{0T}(k) s \quad (6.60)$$

mit

$$m^{0T}(k) = [-x^0(k-1) \dots -x^0(k-m) : u(k), u(k-1) \dots u(k-m)]$$

$$s^T = [a_1 \dots a_m : b_0, b_1 \dots b_m].$$

Für Systeme mit dominierendem Trägheitsverhalten (d.h. nichtsprungfähige Systeme) ist der Koeffizient  $b_0 = 0$ . Deshalb wird in vielen Arbeiten als Meßwertvektor

$$m^{0T}(k) = [-x^0(k-1) \dots -x^0(k-m) : u(k-1) \dots u(k-m)]$$

und als Parametervektor

$$s^T = [a_1 \dots a_m : b_1 \dots b_m]$$

verwendet.

Mit der Anwendung des Verschiebungssatzes der  $z$ -Transformation in der Form

$$Z\{u(k-i)\} = z^{-i} Z\{u(k)\} = z^{-i} U(z)$$

folgt aus Gl. (6.59)

$$X^0(z) [1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}] = U(z) [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}]. \quad (6.61)$$

Wird für

$$[1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}] = A(z^{-1})$$

$$[b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}] = B(z^{-1})$$

gesetzt, erhält man für die Ausgangsgröße:

$$X^0(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z). \quad (6.62)$$

Für das am Ausgang gestörte System gilt mit

$$X(z) = X^0(z) + Z(z) \quad (6.63)$$

und mit der Beschreibung des ungestörten Ausgangs  $X^0(z)$

$$X(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) + Z(z). \quad (6.64)$$

Wird Gl. (6.64) analog zu den Gln. (6.59) und (6.60) in eine parameterlineare Form umgeformt, gilt

$$A(z^{-1}) X(z) = B(z^{-1}) U(z) + A(z^{-1}) Z(z) \quad (6.65)$$

$$x(k) = - \sum_{i=1}^m a_i x(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(k-i) + \sum_{i=0}^m a_i z(k-i).$$

Als Systembeschreibung im Zeitbereich erhält man damit in Vektorschreibweise für Gl. (6.65)

$$x(k) = m^T(k) s + n^*(k) \quad (6.66)$$

mit

$$n^*(k) = z^T(k) a,$$

$$z^T = [z(k), \dots, z(k-m)]$$

$$a^T = [a_0, a_1, \dots, a_m].$$

Aus Gl. (6.66) ist zu ersehen, daß selbst bei unkorrelierter Störung  $z(k)$  durch das Nennerpolynom  $A(z^{-1})$  eine korrelierte Störung  $N^*(z) = Z(z) A(z^{-1})$  entsteht.

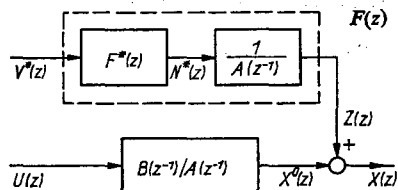


Bild 6.5  
Erweiterte Struktur eines Eingrößensystems

Da aber eine Korrelation zwischen der Störung  $n^*(k)$  und dem Meßwertvektor  $m(k)$  zu nicht erwartungstreuen Schätzungen führt (s. Abschn. 6.3.2 und [1.44, 1.47]), wurde von Aström [1.38] die Systembeschreibung um ein Filter  $F(z)$  für die Störung erweitert. Dieses Filter hat die Aufgabe, die korrelierte Störung  $n^*(k)$  in ein „weißes Rauschsignal“  $v^*(k)$  umzuwandeln. Dadurch wird wieder eine erwartungstreue Schätzung der Parameter möglich. Die Struktur der erweiterten Systembeschreibung ist im Bild 6.5 dargestellt. Damit gilt entsprechend Gl. (6.64)

$$X(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) + F(z) V^*(z). \quad (6.67)$$

Für  $F(z)$  wird i. allg. folgender Ansatz gewählt:

$$F(z) = \frac{1}{A(z^{-1})} F^*(z) \quad (6.68)$$

mit

$$F^*(z) = C(z^{-1})/D(z^{-1})$$

$$C(z^{-1}) = [1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}]$$

$$D(z^{-1}) = [1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n}].$$

Neben der Erweiterung der Beschreibung des Systems durch das Störfilter  $F(z)$  spielt die Art der Fehlergleichung bei diesem Modelltyp eine wichtige Rolle. Wird der Ausgangs- oder der Eingangsfehler verwendet (s. Abschn. 5.1.4), erhält man Fehlergleichungen, in die ein Teil der Parameter nichtlinear eingeht. Es gilt für den Ausgangsfehler

$$E_x(z) = X(z) - \hat{X}(z) = X(z) - \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})} U(z)$$

und für den Eingangsfehler

$$E_u(z) = U(z) - \hat{U}(z) = U(z) - \frac{\hat{A}(z^{-1})}{\hat{B}(z^{-1})} X(z).$$

Die Parameterschätzung für diese Fehler ist nur iterativ möglich (s. Abschn. 5.3). Einen Ausweg bildet die Anwendung des verallgemeinerten Fehlers (Gleichungsfehler). Für ihn gilt die Vorschrift

$$E_v(z) = X'(z) - U'(z) = \hat{A}(z^{-1}) X(z) - \hat{B}(z^{-1}) U(z).$$

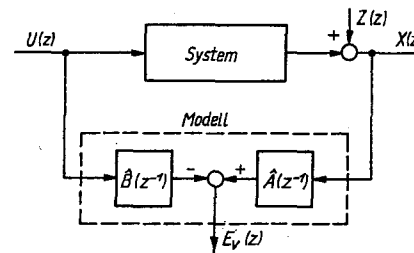


Bild 6.6  
Bildungsschema des Gleichungsfehlers

Im Bild 6.6 ist das Schema dieser Fehlerbildung angegeben. Die Umwandlung des korrelierten Fehlers  $e_v(k)$  – im folgenden mit  $e(k)$  bezeichnet – in einen unkorrelierten Fehler  $\varepsilon(k)$  kann entweder über Filter für die Signale  $u(k)$  und  $x(k)$  (Bild 6.7a) oder für den Fehler (Bild 6.7b) erfolgen. Damit gilt mit der Beziehung Gl. (6.68)

$$E(z) = \hat{F}^*(z) \varepsilon(z) \quad (6.69)$$

für den Gleichungsfehler

$$\hat{A}(z^{-1}) X(z) - \hat{B}(z^{-1}) U(z) = \hat{F}^*(z) \varepsilon(z) \quad (6.70)$$

und für das vollständige Modell des Systems von Gl. (6.64)

$$X(z) = \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})} U(z) + \frac{1}{\hat{A}(z^{-1})} \hat{F}^*(z) \varepsilon(z). \quad (6.71)$$

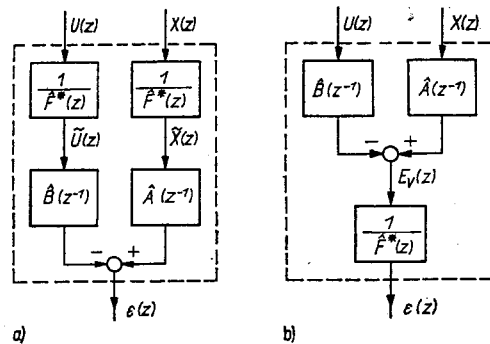


Bild 6.7

Bildungsmöglichkeiten  
des unkorrelierten Fehlersa) durch Filterung der Signale  $u(k)$  und  $x(k)$   
b) durch Filterung des Gleichungsfehlers

Das durch Gl. (6.71) beschriebene Modell wird auch als ARMAX-Modell (autoregressive moving average with exogenous variable) bezeichnet. In der Praxis wird diese Modellform am häufigsten verwendet. Als Sonderfälle können aus diesem Modell die in Tafel 6.1 angegebenen Zuordnungen von Schätzverfahren zur entsprechenden Filterübertragungsfunktion gebildet werden.

Tafel 6.1. Schätzverfahren und ihre Formfilter  $F^*(z)$ 

| Schätzverfahren              | $F^*(z)$              | Literatur                      |
|------------------------------|-----------------------|--------------------------------|
| Regression                   | 1                     | [1.34, 1.38, 1.44, 1.45, 1.47] |
| Methode der Hilfsvariablen   | 1                     | [6.14, 6.15]                   |
| Verallgemeinerte Regression  | $\frac{1}{D(z^{-1})}$ | [6.16, 6.17]                   |
| Maximum-Likelihood-Schätzung | $C(z^{-1})$           | [1.38, 6.19]                   |

Um für das in Gl. (6.71) dargestellte allgemeine Modell eine Beschreibung zur Parameterschätzung mit den im Abschnitt 5 bereits abgeleiteten Verfahren zu erhalten, führt man eine Rücktransformation in den Zeitbereich durch. Damit erhält man die Differenzengleichung

$$x(k) + \sum_{i=1}^m \hat{a}_i x(k-i) - \sum_{i=0}^m \hat{b}_i u(k-i) = e(k) \quad (6.72)$$

mit

$$e(k) = -\sum_{i=1}^n \hat{d}_i e(k-i) + \varepsilon(k) + \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon(k-i).$$

In Vektorschreibweise ergibt sich für den  $k$ -ten Zeitpunkt die Beziehung

$$x(k) = m^T(k) \hat{s} + \varepsilon(k), \quad (6.73)$$

wobei

$$m^T(k) = [-x(k-1) \dots -x(k-m) : u(k) \dots u(k-m) : \\ -e(k-1) \dots -e(k-n) : \varepsilon(k-1) \dots \varepsilon(k-n)]$$

ein Meßwertvektor und

$$\hat{s}^T = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_m : \hat{b}_0 \dots \hat{b}_m : \hat{c}_1 \dots \hat{c}_n : \hat{d}_1 \dots \hat{d}_n]$$

der Parametervektor ist. Schwierigkeiten bereitet in dieser Beschreibung die Ermittlung der Signalwerte  $\varepsilon(k-i)$ . Je nach Wahl der Übertragungsfunktion des Filters  $F(z)$  können durch Gl. (6.73) verschiedene Modellstrukturen realisiert werden (s. Abschnitte 6.3.2 bis 6.3.5).

### 6.3.1.2. Einfache nichtlineare Eingrößensysteme

Neben den Beschreibungen des nichtlinearen dynamischen Verhaltens durch das nichtparametrische Volterra-Reihen-Modell (s. Abschn. 6.2) finden einfache nichtlineare Modelle, die aus einer Kombination eines linearen dynamischen Systems (mit L bezeichnet) und eines nichtlinearen statischen Systems (mit NL bezeichnet) bestehen, eine breite Anwendung. Dabei wird im folgenden davon ausgegangen, daß das nichtlineare statische Teilsystem durch folgende Gleichung hinreichend genau beschrieben wird:

$$x_{NL}(k) = \sum_{j=0}^p r_j u_{NL}^j(k). \quad (6.74)$$

#### Hammerstein-Modell

Wird entsprechend Bild 6.8 davon ausgegangen, daß sich die Nichtlinearität vor dem linearen dynamischen Teil befindet, wird diese Struktur Hammerstein-Modell genannt. Entsprechend der Beschreibung des linearen dynamischen Teilsystems von Gl. (6.58) gilt

$$x^0(k) = -\sum_{i=1}^m a_i x^0(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i y(k-i).$$

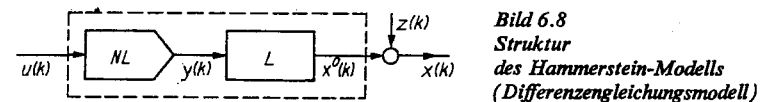


Bild 6.8

Struktur  
des Hammerstein-Modells  
(Differenzengleichungsmodell)

Das fiktive Zwischensignal  $y(k)$  lautet bei Verwendung von Gl. (6.74)

$$y(k) = \sum_{j=0}^p r_j u^j(k). \quad (6.75)$$

Damit ergibt sich für die Beschreibung des Systems mit der Struktur eines Hammerstein Modells

$$x^0(k) = \sum_{i=1}^m a_i x^0(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i \sum_{j=0}^p r_j u^j(k-i). \quad (6.76)$$

Wird der konstante Anteil der Signalfolge  $x(k)$ , der durch den Ausdruck

$$r_{00} = r_0 \sum_{i=0}^m b_i$$

gegeben ist, in Gl. (6.76) getrennt dargestellt, erhält man mit der Vereinbarung  $b_i r_j \triangleq b_{ij}$

$$x^0(k) = r_{00} - \sum_{i=1}^m a_i x^0(k-i) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^m b_{ij} u^j(k-i). \quad (6.77)$$

Damit gilt in Vektorschreibweise

$$x^0(k) = m^T(k) s \quad (6.78)$$

mit

$$m^T(k) = [1, -x^0(k-1) \dots -x^0(k-m) : u(k) \dots u(k-m) : \\ \dots : u^p(k) \dots u^p(k-m)] \\ s^T = [r_{00} : a_1 \dots a_m : b_{10} \dots b_m : \\ \dots : b_{p0} \dots b_{pm}]$$

In Gl. (6.78) wird sehr gut sichtbar, daß das nichtlineare Hammerstein-Modell als Spezialfall das lineare Systemverhalten mit enthält.

Tritt eine Störung  $z(k)$  auf, ist analog der Vorgehensweise im linearen Fall die Beschreibung um ein Störfilter zu erweitern und in der Berechnungsvorschrift für den Gleichungsfehler – s. Gl. (6.72) – der entsprechende Ansatz aus Gl. (6.77) einzusetzen. Die Ordnung der statischen Nichtlinearität wird häufig auf  $p = 2$  beschränkt. Da die Fehlergleichungen bei diesem nichtlinearen Modell auch parameterlinear sind, treten bei der Schätzung keine prinzipiellen neuen Probleme auf (s. Abschn. 6.3.5).

Eine Trennung der gemeinsam geschätzten Parameter  $\hat{b}_i \hat{p}_j \triangleq \hat{b}_{ij}$  der statischen und dynamischen Teilsysteme ist unter der Annahme, daß der Verstärkungsfaktor des linearen dynamischen Teilsystems  $K_L = 1$  ist, möglich. Mit Hilfe des Zusammenhangs

$$K_L = \sum_{i=0}^m \hat{b}_i / \left(1 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_i\right) = 1 \quad (6.79)$$

können die Parameter aus folgenden Beziehungen ermittelt werden:

$$\hat{p}_j = \frac{\hat{b}_{ij}}{\hat{b}_i} = \frac{\sum_{i=0}^m \hat{b}_{ij}}{1 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_i} \\ \hat{p}_0 = \frac{\hat{p}_{00}}{\sum_{i=0}^m \hat{b}_i} = \frac{\hat{p}_{00}}{1 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_i} \\ \hat{b}_i = \hat{b}_{ij} / \hat{p}_j$$

Die Trennung der Parameter ist bei rein integralem oder differentiellem Verhalten nicht möglich, da die Verstärkung gegen Unendlich bzw. gegen Null strebt.

### Wiener-Modell

Die Struktur eines Wiener-Modells ist im Bild 6.9 dargestellt. Die Beschreibung ist dadurch gekennzeichnet, daß das statische nichtlineare Teilsystem nach dem linearen dynamischen Teilsystem angeordnet ist. Für die Beschreibung gelten mit den bereits getroffenen Vereinbarungen

$$y(k) = - \sum_{i=1}^m a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(k-i) \\ x^0(k) = \sum_{j=0}^p r_j y^j(k)$$

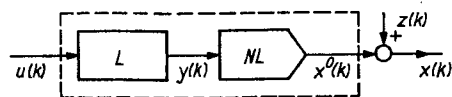


Bild 6.9  
Struktur des Wiener-Modells  
(Differenzgleichungsmodell)

Für die Gesamtbeschreibung ergibt sich damit

$$x^0(k) = \sum_{j=0}^p r_j \left[ - \sum_{i=1}^m a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(k-i) \right]^j$$

Diese Beziehung kann wieder in eine Vektorbeziehung der Form

$$x^0(k) = m^T(k) s$$

umgeschrieben werden, wobei der Meßwertvektor  $m(k)$  abgetastete Signalwerte des Eingangs- und des Zwischensignals in linearer und potenziert Form, Wechselwirkungen zu gleichen und unterschiedlichen Zeitpunkten und zeitlich verschobene Wechselwirkungen der Signale selbst enthält. Die Anzahl der zu ermittelnden Parameter ist dadurch gegenüber dem Hammerstein-Modell sehr groß. Außerdem erfordert die Eliminierung des fiktiven Zwischensignals  $y(k)$ , die nur im Fall einer eindeutig umkehrbaren Kennlinie des statischen Teilsystems möglich ist, eine iterative Lösungsstrategie [6.9, 6.10, 6.11]. Aus diesen Gründen ist die Anwendung dieser Beschreibung in der Praxis nicht so häufig.

In den nächsten Abschnitten werden einige wesentliche Schätzverfahren unter Beachtung folgender Voraussetzungen näher betrachtet:

- Die abgetasteten Signalwerte der Eingänge  $u(k)$  sind ungestört.
- Die Störung  $z(k)$  greift additiv ein, und für den Erwartungswert gilt

$$E\{z(k)\} = 0.$$

- Die Ordnung  $m$  und die Totzeit  $T_t = dT$  des Systems sind bekannt.
- Die Werte der Eingangsgrößen und der Störung sind unkorreliert, d.h., es gilt

$$E\{z(k) u(k)\} = 0.$$

## 6.3.2. Methoden der Regression

### 6.3.2.1. Direkte Methode der Regression

Bei der Herleitung der direkten Methode der Regression für die Parameterschätzung der linearen Differenzengleichung wird von der Fehlergleichung entsprechend Gl. (6.71) unter der Annahme, daß die Filterübertragungsfunktion  $\hat{F}^*(z) = 1$  ist, ausgegangen. Damit gilt

$$\varepsilon(z) = \hat{A}(z^{-1}) X(z) + \hat{B}(z^{-1}) U(z) \quad (6.82)$$

Dies bedeutet, daß das Fehlersignal  $e(k) = \varepsilon(k)$  und damit ein „weißes Rauschsignal“ ist. Für den  $k$ -ten Beobachtungszeitpunkt erhält man für Gl. (6.82) im Zeitbereich

$$\varepsilon(k) = x(k) - m^T(k) \hat{s}$$

mit

$$m^T(k) = [-x(k-1) \dots -x(k-m) : u(k-1) \dots u(k-m)] \\ \hat{s}^T = [a_1 \dots a_m : b_1 \dots b_m]$$

Bei Verwendung der bekannten Zielfunktion für die Methode der Regression,

$$Q = \varepsilon^T(k) \varepsilon(k) = \sum_{k=j}^{j+n-1} \varepsilon^2(k), \quad (6.83)$$

der Meßwertmatrix  $M(n)$  für  $n$  Beobachtungen,

$$M(n) = \begin{bmatrix} -x(j-1) & \dots & -x(j-m) & | & u(j-1) & \dots & u(j-m) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -x(j-1+n-1) & \dots & -x(j-m+n-1) & | & u(j-1+n-1) & \dots & u(j-m+n-1) \end{bmatrix},$$

und des gemessenen Ausgangssignalvektors  $x(k)$  für  $n$  Beobachtungen,

$$x^T(n) = [x(j), x(j+1), \dots, x(j+n-1)],$$

ergibt sich analog zu den Ableitungen im Abschnitt 5.2.2 die Regressionsvorschrift zu

$$\hat{s} = [M^T(n) M(n)]^{-1} M^T(n) x(n). \quad (6.84)$$

Die Eigenschaften der Schätzvorschrift und die zu verwendenden numerischen Lösungsverfahren entsprechen den im Abschnitt 5.2.2 angegebenen.

Schwierigkeiten bei der Inversion der Matrix  $[M^T(n) M(n)]$  treten nur auf, wenn sich das Eingangssignal von Tastpunkt zu Tastpunkt zu gering ändert und dadurch das System nicht ausreichend erregt wird. Einen Ausweg bilden auch hier die Methoden der aktiven Versuchsplanung (s. Abschn. 6.4).

Ein generelles Problem der Schätzung der Parameter der Differenzengleichung mit der Methode der Regression stellt die Erwartungstreue dar. Unter den oben angenommenen Voraussetzungen gilt für die Schätzung

$$E\{\hat{s} - s\} = 0, \quad (6.85)$$

d.h. Erwartungstreue. Allgemein ist dies aber nicht der Fall. Entsprechend den Betrachtungen im Abschnitt 5.2.2 gilt für die Erwartungstreue bei Schätzung der Koeffizienten der linearen Differenzengleichung für eine hinreichend große Anzahl von Abtastwerten  $u(k)$  und  $x(k)$  mit  $k = j, \dots, j+n-1$  bei Verwendung von (6.84) und (6.65)

$$E\{\hat{s}\} = E\{[M^T(n) M(n)]^{-1} M^T(n) [M(n)s + n^*(n)]\}. \quad (6.86)$$

Durch weitere Umformungen erhält man den für die Betrachtungen günstigen Ausdruck

$$E\{\hat{s} - s\} = E\{[M^T(n) M(n)]^{-1}\} E\{M^T(n) n^*(n)\}. \quad (6.87)$$

Da der erste Term in Gl. (6.87) nicht null werden kann, ist Gl. (6.85) nur zu erfüllen, wenn der Ausdruck

$$E\{M^T(n) n^*(n)\} = 0 \quad (6.88)$$

ist. Werden die einzelnen Meßwerte in die Gl. (6.88) eingesetzt, erhält man

$$E\{M^T(n) n^*(n)\} = E\left\{ \begin{bmatrix} u(j) & \dots & u(j+n-1) \\ \vdots & & \vdots \\ u(j-m) & \dots & u(j-m+n-1) \\ x(j-1) & \dots & x(j-1+n-1) \\ \vdots & & \vdots \\ x(j-m) & \dots & x(j-m+n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^*(j) \\ \vdots \\ n^*(j+n-1) \end{bmatrix} \right\}. \quad (6.89)$$

Aus Gl. (6.89) ist zu entnehmen, daß der obere Teil des Vektors Elemente mit dem Wert null ergibt, da die Störungswerte  $z(k)$  und damit auch  $n^*(k)$  mit den Werten der Eingangsgrößen  $u(k)$  laut Voraussetzung unkorreliert sein sollen. Im unteren Teil des Vektors kommen Ausdrücke der Form

$$E\{x(j-1) n^*(j)\} = E\left\{x(j-1) \left[z(j) + \sum_{i=1}^m a_i z(j-i)\right]\right\} \quad (6.90)$$

vor. Wird in Gl. (6.90) für die abgetastete gestörte Ausgangsgröße  $x(k) = x^0(k) + z(k)$  entsprechend Gl. (6.62) gesetzt, erhält man

$$E\{x(j-1) n^*(j)\} = E\left\{[x^0(j-1) + z(j-1)] \left[z(j) + \sum_{i=1}^m a_i z(j-i)\right]\right\}. \quad (6.91)$$

Der Erwartungswert der Beziehung in Gl. (6.91) wird null und damit die Schätzung erwartungstreu, wenn

- die abgetasteten Störungswerte  $z(k)$  null sind oder
- bei vorhandener Störung  $z(k)$  die abgetasteten Störungswerte unkorreliert sind („weißes Rauschen“) und die durch die Beschreibung verursachte Korrelation durch eine Filterung mit  $F(z) = 1/A(z^{-1})$  beseitigt wird, d.h. der Gleichungsfehler  $\varepsilon(k)$  unkorreliert ist.

Sind die abgetasteten Signalwerte der Störung  $z(k)$  korreliert, liefert die Methode der Regression verschobene Schätzungen. Einen Ausweg, unter diesen Bedingungen unverschobene Schätzungen zu erhalten, besteht in der Verwendung erweiterter Systemmodelle (s. Abschnitte 6.3.4 und 6.3.5) und der Verwendung von sog. „Hilfsvariablen“ (s. Abschn. 6.3.3).

Ein weiteres Problem besteht in der Ermittlung der Kovarianzmatrix

$$\text{COV}\{\hat{s}\} = E\{(\hat{s} - s)(\hat{s} - s)^T\} \quad (6.92)$$

für diesen Modelltyp. Analog zu den Betrachtungen im Abschnitt 5.2.2 gilt für Gl. (6.92)

$$\text{COV}\{\hat{s}\} = E\{[M^T(n) M(n)]^{-1} M^T(n) n^*(n) n^{*T}(n) M(n) [M^T(n) M(n)]^{-1}\}. \quad (6.93)$$

Da in der Meßwertmatrix  $M(n)$  neben den ungestörten Signalwerten  $u(k)$  auch gestörte Signalwerte  $x(k)$  enthalten sind, ist, selbst wenn

$$E\{n^*(n) n^{*T}(n)\} = \sigma_n^2 I \quad (6.94)$$

gilt, eine Vereinfachung analog zu Gl. (5.31) nicht mehr möglich. In den Arbeiten [6.12, 6.13] wurde aus Gl. (6.93) eine Abschätzung der Form

$$\text{COV}\{\hat{s}\} \approx \sigma_n^2 [M^T(n) M(n)]^{-1} \quad (6.95)$$

vorgeschlagen. Ihre Aussagekraft ist aber aufgrund der vorgenommenen Vereinfachung in vielen Fällen nicht ausreichend (s. Abschn. 6.4).

Aus Gl. (6.95) wird auch ersichtlich, daß eine Filterung des Ausgangssignals zur Beseitigung des Einflusses der Störung immer sinnvoll ist und die Güte der Schätzung verbessert. Ist die Störung tieffrequent (hochfrequent), wird in einer sog. „Vorfilterung“ durch einen Hochpaß (Tiefpaß) (s. Abschn. 3.4) ihr Einfluß reduziert. Diese Vorfilterung

Gegeben:

Systembeschreibung

$$G(p) = \frac{5}{(1 + p \cdot 10 \text{ s})(1 + p \cdot 5 \text{ s})}$$

Mit  $T = 2$  folgt

$$G(z) = \frac{0,164z^{-1} + 0,134z^{-2}}{1 - 1,489z^{-1} + 0,548z^{-2}}$$

Testsignal: PRBS-Folge (Länge  $15T$ , Amplitude  $\pm 2,5$ , Gesamtlänge  $60T$ ),Störung NV ( $0, \sigma_x^2$ ); hochfrequent, Störverhältnis  $\sqrt{\sigma_x^2/\sigma_{x_0}^2} = 0,16$ .

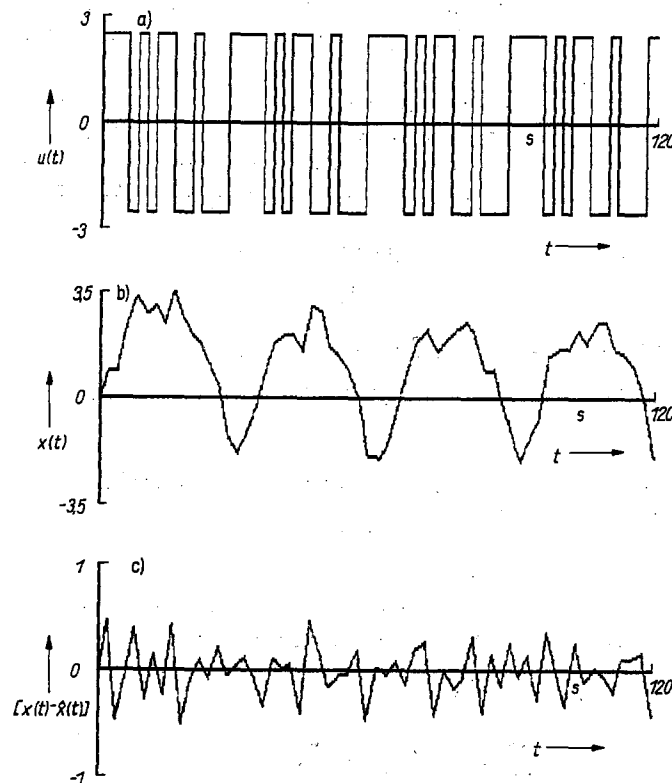
Gesucht:

Schätzwerte der Koeffizienten der diskreten Übertragungsfunktion und die Reststreuung  $s_R^2$ .

Ergebnis:

Aus den Meßwerten des Eingangs- und Ausgangssignals wurden folgende Parameter geschätzt:

| $i$ | $a_i$  | $d_i$  | $b_i$ | $\hat{b}_i$ |
|-----|--------|--------|-------|-------------|
| 1   | -1,489 | -1,108 | 0,164 | 0,162       |
| 2   | 0,548  | 0,162  | 0,134 | 0,216       |

Die Reststreuung ist  $s_R^2 = 0,264$ .

Das Schätzergebnis zeigt, daß besonders bei den Parametern  $d_i$  bei Anwendung der Methode der Regression ein relativ großer Parameterfehler auftritt. Er ist bedingt durch die Länge der Stichprobe und die durch die Störung verursachte Nichterwartungstreue der Schätzung bei diesem Verfahren. Dagegen ist die Reststreuung  $s_R^2$  relativ klein, was auch am Verlauf der Differenz zwischen System- und Modellausgang deutlich wird.

der Ausgangssignalwerte sollte sowohl bei der Verwendung direkter als auch bei den rekursiven Schätzmethoden erfolgen. Das allgemeine Schema ist im Bild 6.10 dargestellt.

Die Schätzung der Koeffizienten eines linearen Differenzgleichungsmodells mittels Regression ist im Beispiel 6.3 dargestellt.

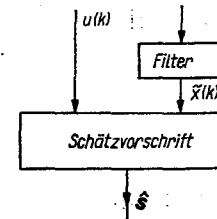


Bild 6.10  
Schema einer Parameterschätzung  
mit Vorfilterung des Ausgangssignals

### 6.3.2.2. Rekursive Methode der Regression

Wie bereits bei der Schätzung der Parameter für statische Modelle im Abschnitt 5.4.3 besprochen, hat die direkte Methode der Regression einige entscheidende Nachteile:

- Der Speicheraufwand für die gemessenen  $n$  Meßwertpaare  $u(k)$  und  $x(k)$  ist hoch.
- Bei neuen Meßwerten muß die Gl. (6.84) jeweils erneut vollständig gelöst werden.
- Der Rechenaufwand zur Inversion der Matrix  $[M^T M]$  ist hoch.
- Die Eignung für die Parameterschätzung zeitvarianter Systeme ist schlecht.

Diese und andere Nachteile können durch eine rekursive Lösung des Schätzproblems beseitigt werden. Von den verschiedenen rekursiven Schätzverfahren wird für die Schätzung der Koeffizienten der Differenzgleichung die Methode der rekursiven Regression betrachtet, weil sie sich bereits bei der Erstellung statischer Modelle gegenüber der Relaxation und der stochastischen Approximation als überlegen gezeigt hat. Da die ausführliche Herleitung des Verfahrens bereits im Abschnitt 5.4.3 erfolgte, wird an dieser Stelle nur noch auf die für dieses Modell typischen Probleme eingegangen. Bezüglich der Schreibweise kennzeichnen entsprechend der internationalen Verfahrensweise bei den rekursiven Schätzverfahren die in den runden Klammern stehenden Argumente den Zeitpunkt  $k$  der Abtastung und nicht, wie bisher verwendet, die Anzahl der Beobachtungen.

Wie bereits im Abschnitt 5.4.3 ausgeführt, besteht der Grundgedanke der rekursiven Regression darin, daß durch eine neue Beobachtung zum  $(k+1)$ -ten Zeitpunkt die Meßwertsätze

$$m^T(k+1) = [-x(k) \dots -x(k-m+1); u(k) \dots u(k-m+1)] \quad \text{und} \\ x(k+1)$$

für die Verbesserung der Parameterschätzung zur Verfügung stehen.

Auf der Basis der Schätzgleichung von Gl. (6.84) zum  $k$ -ten Zeitpunkt

$$\hat{s}(k) = [M^T(k) M(k)]^{-1} M^T(k) x(k) \quad (6.96)$$

mit

$$\hat{s}^T(k) = [\hat{a}_1(k) \dots \hat{a}_m(k); \hat{b}_1(k) \dots \hat{b}_m(k)]$$

$$x^T(k) = [x(k-1) \dots x(k)]$$

$$M^T(k) = \begin{bmatrix} m^T(k-1) \\ \vdots \\ m^T(k) \end{bmatrix}$$

erhält man unter Einbeziehung der neuen Information zum  $(k+1)$ -ten Zeitpunkt entsprechend Gl. (6.96)

$$\hat{s}(k+1) = [M^T(k+1) M(k+1)]^{-1} M^T(k+1) x(k+1) \quad (6.97)$$

mit

$$s^T(k+1) = [\hat{a}_1(k+1) \dots \hat{a}_m(k+1) ; \hat{b}_1(k+1) \dots \hat{b}_m(k+1)]$$

$$x^T(k+1) = [x(k-l) \dots x(k) x(k+1)]$$

$$M^T(k+1) = \begin{bmatrix} M^T(k) \\ m^T(k+1) \end{bmatrix}$$

$$m^T(k+1) = [-x(k) \dots -x(k-m+1) ; u(k) \dots u(k-m+1)].$$

Mit diesen für das Modell der Differenzgleichung getroffenen Vereinbarungen kann analog zu den Ableitungen im Abschnitt 5.4.3 die Schätzvorschrift der rekursiven Regression hergeleitet werden. Entsprechend den Gln. (5.82), (5.78) und der im Abschnitt 5.4.3 dargestellten Lösungsmethode lautet die rekursive Schätzvorschrift der Regression

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + k(k+1) [x(k+1) - m^T(k+1) \hat{s}(k)] \quad (6.98)$$

mit

$$k(k+1) = P(k) m(k+1) [1 + m^T(k+1) P(k) m(k+1)]^{-1}$$

$$P(k+1) = P(k) - k(k+1) m^T(k+1) P(k)$$

$$P(k) = [M^T(k) M(k)]^{-1}.$$

Damit wird wiederum deutlich, daß sich der neue geschätzte Parametervektor  $\hat{s}(k+1)$  aus dem alten Schätzwert  $\hat{s}(k)$  und der Addition des bewerteten sog. „Prädiktionsfehlers“  $e(k+1)$  ergibt. Der Prädiktionsfehler  $e(k+1)$ , der sich aus

$$e(k+1) = [x(k+1) - m^T(k+1) \hat{s}(k)] \quad (6.99)$$

berechnet, stellt den Vergleich des abgetasteten Ausgangssignals zum  $(k+1)$ -ten Zeitpunkt mit dessen Vorherberechnung auf der Grundlage des alten Parametervektors dar.

Wie bereits im Abschnitt 5.4.3 ausführlich dargelegt, steht dem Vorteil der fehlenden Inversion bei der rekursiven Regression der Nachteil der geeigneten Wahl der Startparameter  $\hat{s}(0)$  und  $P(0)$  gegenüber. Grundsätzlich bestehen wiederum die Möglichkeiten:

- Abschätzung aus einer Schätzung mit Hilfe der direkten Regression aus wenigen Meßwertsätzen,
- Vorgabe von Startwerten aus der theoretischen Prozeßanalyse oder vorhergegangenen Schätzungen,
- Wahl der Startparameter der Matrix  $P$  entsprechend Gl. (5.109)
  - a) bei geringer Störung:  $P(0) = cI$ ,  $10^{10} \leq c \leq 10^{15}$ ;
  - b) bei größerer Störung:  $P(0) = cI$ ,  $10^3 \leq c \leq 10^6$ .

Dann ist die Konvergenz der Parameterschätzung relativ unabhängig vom Startparametervektor  $\hat{s}(0)$ , der deshalb häufig  $\hat{s}(0) = 0$  gesetzt wird.

Sollen die Parameter eines zeitvarianten Systems aktuell ermittelt werden, sind in die Schätzvorschrift der rekursiven Regression von Gl. (6.98) entsprechend der Vorgehensweise im Abschnitt 5.4.3.2 die Matrizen  $P(k)$  durch die gewichteten Matrizen  $P^*(k)$ , die

entsprechend den Gln. (5.110) und (5.111) berechnet werden, zu ersetzen. Die Wichtungsart und die Größe der Vergessensrate sind entsprechend den Empfehlungen im Abschnitt 5.4.3.2 zu wählen.

Insgesamt kann eingeschätzt werden, daß die Methode der rekursiven Regression dann angewendet werden sollte, wenn

- das System gering gestört ist oder
- die Voraussetzungen für eine erwartungstreue Schätzung mit Hilfe eines Regressionsverfahrens gegeben sind oder
- auf eine erwartungstreue Schätzung verzichtet werden kann, z. B. bei der Realisierung adaptiver Steuerungskonzepte.

### 6.3.3. Methoden der Hilfsvariablen

#### 6.3.3.1. Direkte Methode der Hilfsvariablen

Wie bereits im Abschnitt 6.3.2 gezeigt wurde, ist mit der Methode der Regression bei einem korrelierten Gleichungsfehler keine erwartungstreue Schätzung der Parameter der Differenzgleichung möglich. Um die Vorteile der Regression zu nutzen und gleichzeitig eine erwartungstreue Schätzung zu erzwingen, wurde die Methode der Hilfsvariablen (instrumentellen Variablen) entwickelt [1.49, 6.14, 6.15].

Diese Methode beruht auf der Verwendung der Fehlergleichung für den korrelierten Fall in der Form – s. Gl. (6.68) –

$$E(z) = \hat{A}(z^{-1}) X(z) - \hat{B}(z^{-1}) U(z) \quad (6.100)$$

und in Vektorschreibweise für  $n$  Beobachtungen

$$e(n) = x(n) - M^T(n) \hat{s}. \quad (6.101)$$

Die unter Verwendung des Gütekriteriums  $Q = e^T(k) e(k)$  analog zu Abschnitt 6.3.2 ableitbare Schätzgleichung für die Parameter

$$\hat{s} = [M^T(n) M(n)]^{-1} M^T(n) x(n) \quad (6.102)$$

liefert bekanntlich keine erwartungstreuen Schätzungen. Damit nun bei Verwendung der in Gl. (6.101) angegebenen Beschreibung die Erwartungstreue erzwungen wird, ersetzt man in Gl. (6.102) die Meßwertmatrix  $M^T(n)$  durch die Hilfsvariablenmatrix  $H^T(n)$ . Die Matrix  $H^T(n)$  ist dann eine Hilfsvariablenmatrix, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

$$E \{ H^T(n) e(n) \} = 0 \quad (6.103)$$

$$E \{ H^T(n) M(n) \} \text{ positiv definit.}$$

Setzt man die Matrix der Hilfsvariablen in die Schätzgleichung der Regression von Gl. (6.102) ein, ergibt sich die Schätzvorschrift der Methode der Hilfsvariablen zu

$$\hat{s} = [H^T(n) M(n)]^{-1} H^T(n) x(n). \quad (6.104)$$

Es ist leicht zu zeigen, daß unter den in Gl. (6.103) angegebenen Bedingungen für die Wahl der Hilfsvariablenmatrix  $H^T(n)$  die Schätzung auch bei einem korrelierten Gleichungsfehler  $e(n)$  erwartungstreu ist. Analog zu den Betrachtungen im Abschnitt 6.3.2 gilt

$$E \{ \hat{s} - s \} = E \{ [H^T(n) M(n)]^{-1} \} E \{ H^T(n) e(n) \} \quad (6.105)$$

und unter Beachtung der Gl. (6.103):

$$E\{\hat{s} - s\} = 0.$$

Dem Vorteil der geringen Anzahl der zu ermittelnden Parameter und der günstigen numerischen Lösung von Gl. (6.104) steht das schwierige Problem der Wahl der Elemente der Matrix der Hilfsvariablen gegenüber. Allgemein sollten zur Erfüllung der Bedingungen (6.103) die Elemente der Hilfsvariablenmatrix so gewählt werden, daß sie stark mit den ungestörten Signalwerten in der Matrix  $M$  und nicht mit den Werten der Störung  $z$  korrelieren. Da in der Meßwertmatrix  $M$  die Signalwerte der Eingangsgröße bereits ungestört sind, besteht das Problem der Wahl der Elemente der Matrix der Hilfsvariablen vor allem in der Festlegung bzw. dem Ersatz der Signalwerte des gestörten Ausgangs. Folgende Varianten wurden für dieses Problem vorgeschlagen:

**Variante 1:** Verwendung verschobener Eingangssignale

Für den Vektor der Hilfsvariablen ergibt sich dann

$$h^T(k) = [-u(k-r-1) \dots -u(k-r-m) : u(k-1) \dots u(k-m)]. \quad (6.106)$$

**Variante 2:** Verwendung verschobener Ausgangssignale

Bei dieser Variante wird der Vektor der Hilfsvariablen durch die Verwendung von um  $p$  Taktpunkte in die Vergangenheit verschobenen Ausgangssignalen gebildet. Damit gilt

$$h^T(k) = [-x(k-p-1) \dots -x(k-p-m) : u(k-1) \dots u(k-m)]. \quad (6.107)$$

Als Intervall für die Verschiebung ist  $m \leq p \leq 3m$  sinnvoll.

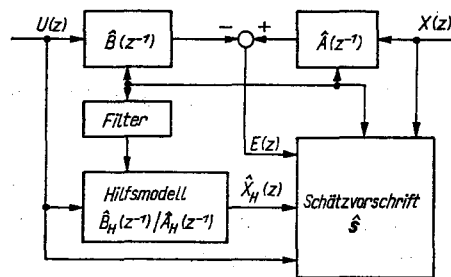


Bild 6.11  
Schema der Methode der Hilfsvariablen  
bei Verwendung eines Hilfsmodells

**Variante 3:** Verwendung geschätzter Werte des Ausgangssignals eines Hilfsmodells

Mit den geschätzten Werten  $\hat{x}_H(k-1)$  der Ausgangsgröße eines Hilfsmodells (Bild 6.11) erhält man

$$h^T(k) = [-\hat{x}_H(k-1) \dots -\hat{x}_H(k-m) : u(k-1) \dots u(k-m)]. \quad (6.108)$$

Die Werte  $\hat{x}_H(k-i)$  werden nach der Vorschrift

$$\hat{x}_H(k) = m^T(k) \hat{s}_H \quad (6.109)$$

mit

$$m^T(k) = [-\hat{x}_H(k-1) \dots -\hat{x}_H(k-m) : u(k-1) \dots u(k-m)]$$

$$\hat{s}_H^T = [\hat{a}_{1H} \dots \hat{a}_{mH} : \hat{b}_{1H} \dots \hat{b}_{mH}]$$

ermittelt. Der Parametervektor des Hilfsmodells  $\hat{s}_H$  sollte bei Anwendung der rekursiven Schätzvorschrift (s. Abschn. 6.3.3.2) aus dem geschätzten Parametervektor  $\hat{s}$  durch eine

Gegeben: Systembeschreibung

$$G(p) = \frac{5}{(1 + p \cdot 10s)(1 + p \cdot 5s)}.$$

Mit  $T = 2$  s folgt

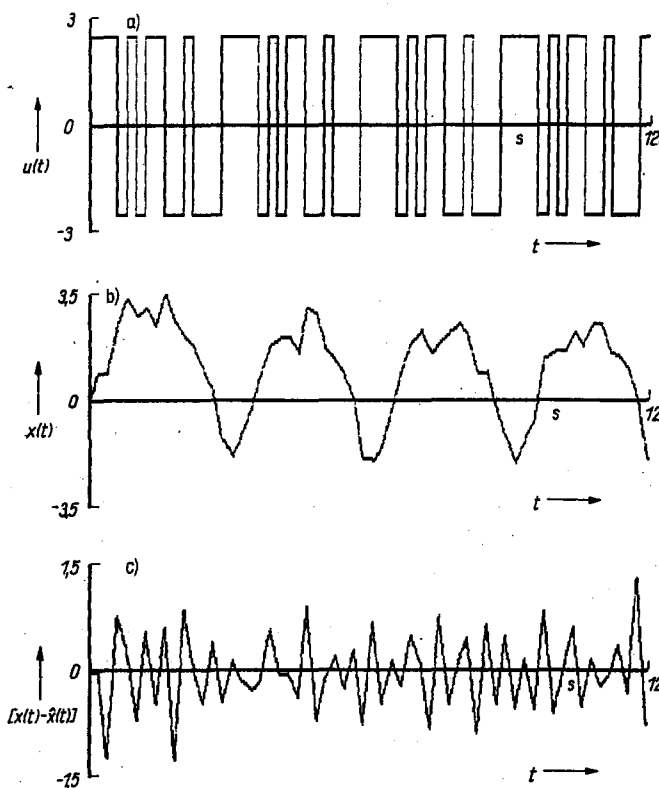
$$G(z) = \frac{0,164z^{-1} + 0,134z^{-2}}{1 - 1,489z^{-1} + 0,548z^{-2}}.$$

Testsignal: PRBS-Folge (Länge 15T, Amplitude  $\pm 2,5$ , Gesamtlänge 60T),  
Störung NV  $(0, \sigma_z^2)$ ; hochfrequent,  
Störverhältnis  $\sqrt{\sigma_z^2/\sigma_{x0}^2} = 0,16$ .

Gesucht: Schätzwerte der Koeffizienten der diskreten Übertragungsfunktion und die Reststreuung  $s_R^2$ .

Ergebnis: Aus den Meßwerten des Eingangs- und Ausgangssignals wurden die folgenden Parameter im angegebenen Iterationsschritt geschätzt:

| Iterations-<br>schritt | $a_1$ | $a_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $s_R^2$ |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|---------|
| 1                      | -1,11 | 0,162 | 0,162 | 0,216 | 0,264   |
| 5                      | -1,20 | 0,255 | 0,162 | 0,203 | 0,270   |
| 10                     | -1,28 | 0,333 | 0,163 | 0,191 | 0,283   |
| 15                     | -1,33 | 0,382 | 0,163 | 0,184 | 0,295   |
| 20                     | -1,36 | 0,413 | 0,164 | 0,180 | 0,304   |



|                 |                                                                                                 |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Beispiel<br>6.4 | Parameterschätzung eines linearen Differenzgleichungsmodells mit der Methode der Hilfsvariablen |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|

Das Ergebnis zeigt, daß der Parameterfehler bei der Methode der Hilfsvariablen von Iterationsschritt zu Iterationsschritt kleiner wird. Die Ergebnisse im ersten Iterationsschritt sind mit denen der direkten Regression (s. Beispiel 6.3) identisch. Gleichzeitig wird deutlich, daß mit sich verbessernder Parameter-treue die Reststreuung der Schätzung zunimmt. Dies ist auch am Verlauf der Differenz zwischen Modell- und Systemausgang zu sehen. Damit ist das Verhalten der Methode der Hilfsvariablen gegenüber der Regression unter Beweis gestellt. Der durch die notwendigen Iterationen erhöhte Rechenaufwand der Methode der Hilfsvariablen kann durch die Anwendung der rekursiven Variante wesentlich reduziert werden.

Filterung (s. Abschn. 3.4.4.2) der Form

$$\hat{s}_H(k+1) = (1 - \alpha) \hat{s}_H(k) + \hat{s}(k+1) \quad (6.110)$$

mit

$$0,01 \leq \alpha \leq 0,1$$

gewonnen werden, um starke Schwankungen des Parametervektors zu Beginn der Schätzung zu vermeiden. Damit erhält man bei dieser Variante eine Hilfsvariablenmatrix  $H(n)$  folgender Form für  $k = j, \dots, j + n - 1$  Beobachtungen:

$$H(n) = \begin{bmatrix} -\hat{x}_H(j-1) & \dots & -\hat{x}_H(j-m) & u(j-1) & \dots & u(j-m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\hat{x}_H(j-1+n-1) & \dots & -\hat{x}_H(j-m+n-1) & u(j-1+n-1) & \dots & u(j-m+n-1) \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

Die Parameterschätzung erfolgt iterativ in Stufen

- Schätzung des Parametervektors  $\hat{s}$  aus  $n$  Beobachtungen mit der Regression Gl. (6.84),
- Ermittlung der Hilfsvariablenmatrix  $H(n)$  nach Gl. (6.109),
- Schätzung des Parametervektors  $\hat{s}$  aus  $n$  Beobachtungen mit der Methode der Hilfsvariablen Gl. (6.104),
- Test, ob die Parameteränderung von Iteration zu Iteration  $\Delta \hat{s} \leq$  Toleranzschranke erfüllt ist; wenn nicht, werden erneut die letzten drei Stufen durchlaufen.

Diese Iteration ist immer erforderlich, weil zu Beginn der Schätzung die Störung über die geschätzten Parameter  $\hat{s}$  die Hilfsvariablen beeinflusst. Damit sind die Hilfsvariablen mit dem Störsignal und somit auch mit dem Fehlersignal korreliert. Dies hat zur Folge, daß die erste Beziehung von Gl. (6.103) zu Beginn der Schätzung nicht erfüllt ist.

Von den drei vorgestellten Varianten hat sich die dritte in der Praxis aufgrund ihrer Leistungsfähigkeit durchgesetzt. Die direkte Methode der Hilfsvariablen ist bei vorliegenden korrelierten Gleichungsfehlern eines der leistungsstärksten Parameterschätzverfahren, das erwartungstreue Schätzungen absichert bei einem gegenüber der Regression gering erhöhten Aufwand an Rechenzeit und Speicherplatz.

Im Beispiel 6.4 ist die Schätzung der Koeffizienten eines Differenzgleichungsmodells 2. Ordnung mittels der direkten Methode der Hilfsvariablen dargestellt.

### 6.3.3.2. Rekursive Methode der Hilfsvariablen

Aus den im Abschnitt 6.3.2.2 genannten Gründen und durch analoge Ableitungen kann man aus der Schätzvorschrift der direkten Methode der Hilfsvariablen die rekursive Form der Hilfsvariablenschätzung gewinnen. Entsprechend den Vereinbarungen und Schätzgleichungen für die rekursive Regression von Gl. (6.98) ergibt sich mit Ersatz des Meßwertvektors  $m^T(k+1)$  durch den Vektor der Hilfsvariablen  $h^T(k+1)$  in der Form

$$h^T(k+1) = [-\hat{x}_H(k) \dots -\hat{x}_H(k-m+1) : u(k) \dots u(k-m+1)] \quad (6.112)$$

die rekursive Form der Hilfsvariablenschätzung zu

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + k(k+1) [x(k+1) - m^T(k+1) \hat{s}(k)] \quad (6.113)$$

mit

$$k(k+1) = P(k) h(k+1) [1 + m^T(k+1) P(k) h^T(k+1)]^{-1}$$

$$P(k+1) = P(k) - k(k+1) m^T(k+1) P(k).$$

Für die Wahl der die Konvergenzgeschwindigkeit der Schätzung beeinflussenden Startwerte  $\hat{s}(0)$  und  $P(0)$  gelten die für die rekursive Regression getroffenen Aussagen. Das gleiche gilt auch für die Gestaltung der Wichtungsfaktoren bei der Schätzung zeitvarianter Systeme.

Neben der Wahl der Startwerte für  $\hat{s}$  und  $P$  wird die Konvergenz von der Wahl der Hilfsvariablen bestimmt. In Gl. (6.112) wurden bereits als Hilfsvariablenwerte die aus einem Hilfsmodell entsprechend Gl. (6.109) berechneten ungestörten Ausgangssignalwerte  $\hat{x}_H(k-i)$  verwendet (s. Bild 6.11). Sie stellen angenäherte optimale Hilfsvariablen dar [1.45]. Zu Beginn der Schätzung ist es günstig, im Bereich  $k = 2m$  den Meßwertvektor  $m^T(k+1)$  anstelle des Vektors der Hilfsvariablen  $h^T(k+1)$  zu setzen, d.h., die Methode der Regression zu verwenden. Danach wird mit dem dann vorliegenden Schätzwert für den Parametervektor der Hilfsvariablenvektor ermittelt und die Schätzung mit der rekursiven Methode der Hilfsvariablen fortgesetzt. Wird dieser Hinweis nicht beachtet, kann es zu instabilen Schätzungen kommen.

Außerdem ist es vorteilhaft, den geschätzten Parametervektor  $\hat{s}(k)$  entsprechend Gl. (6.110) tieffrequent zu filtern, um den Einfluß der Störung  $z(k)$  auf die Hilfsvariablen  $\hat{x}_H(k)$  zu verringern. Diese Filterung reduziert auch die Korrelation zwischen den Hilfsvariablen und dem Gleichungsfehler. Sie wirkt ähnlich wie der Vorschlag, eine Totzeit um  $d$  Tastpunkte zwischen dem geschätzten Parametervektor  $\hat{s}(k)$  und dem des Hilfsmodells  $\hat{s}_H(k-d)$  vorzusehen [1.51]. Theoretisch muß zur Erlangung der Erwartungstreue die Totzeit gleich der Korrelationstiefe des Fehlers bzw. der Störung gewählt werden. Da das digitale Tiefpaßfilter in den meisten Fällen bereits zur Beseitigung der Korrelation ausreicht, hat sich dieser in [1.52] unterbreitete Vorschlag praktisch nicht durchgesetzt.

Insgesamt kann eingeschätzt werden, daß die rekursive Methode der Hilfsvariablenschätzung gegenüber der rekursiven Regression immer dann angewendet werden sollte, wenn der Gleichungsfehler korreliert ist und erwartungstreue Schätzungen gefordert werden. Der rechentechnisch geringe Mehraufwand besteht in der Berechnung der Hilfsvariablen aus dem Hilfsmodell entsprechend Gl. (6.109). Gegenüber der direkten Methode der Hilfsvariablen besitzt die rekursive neben den rechentechnischen Vorteilen die Eignung zum On-line-Betrieb und zur Parameterschätzung zeitvarianter Systeme.

### 6.3.4. Weitere Parameterschätzverfahren

Neben der Methode der Regression und der Hilfsvariablen sind die „verallgemeinerte Regression“ und die „Maximum-Likelihood-Schätzung“ von besonderer Bedeutung. Beide Methoden versuchen, eine erwartungstreue Schätzung durch eine Filterung des korrelierten Fehlers bzw. durch Verwendung eines erweiterten Modellansatzes zu erreichen.

#### 6.3.4.1. Methode der verallgemeinerten Regression

Bei der Ableitung der *verallgemeinerten Regression* wird von der Fehlergleichung für den korrelierten Gleichungsfehler

$$E(z) = \hat{A}(z^{-1}) X(z) - \hat{B}(z^{-1}) U(z) \quad (6.114)$$

ausgegangen. Der korrelierte Fehler  $E(z)$  soll über ein Filter

$$\hat{F}^*(z) = 1/\hat{D}(z^{-1})$$

in den unkorrelierten Fehler  $\varepsilon(z)$  umgewandelt werden (Bild 6.12). Damit gilt

$$\varepsilon(z) = \hat{A}(z^{-1}) \tilde{X}(z) - \hat{B}(z^{-1}) \tilde{U}(z) \quad (6.115)$$

mit

$$\tilde{X}(z) = X(z) \hat{D}(z^{-1})$$

$$\tilde{U}(z) = U(z) \hat{D}(z^{-1}).$$

Mit den gefilterten Werten  $\tilde{x}(k)$  und  $\tilde{u}(k)$  kann dann wieder eine Regression durchgeführt werden. Das Problem ist die Ermittlung des Filters  $\hat{F}^*(z)$ . Bevor auf die Bestimmung eines geeigneten Filters eingegangen werden soll, werden die grundsätzlichen Beziehungen der verallgemeinerten Regression, basierend auf den Ableitungen im Abschnitt 5.2.4, näher betrachtet.

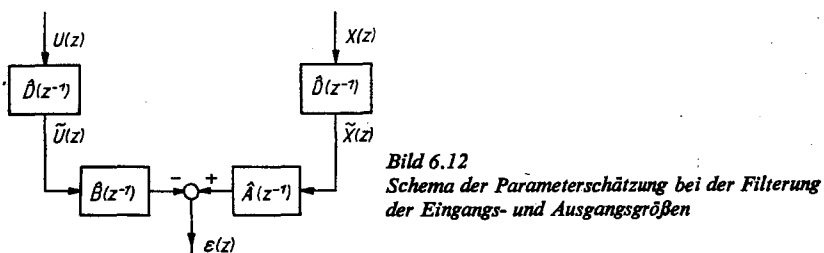


Bild 6.12  
Schema der Parameterschätzung bei der Filterung der Eingangs- und Ausgangsgrößen

Als Gütekriterium wird die bekannte Beziehung

$$Q = e^T(k) W^{-1} e(k); \quad (6.116)$$

$W^{-1}$  Bewertungsmatrix, Filtermatrix,

verwendet, wobei die Bewertungsmatrix so zu wählen ist, daß der korrelierte Fehler  $e(k)$  in den unkorrelierten Fehler  $\varepsilon(k)$  umgeformt wird. Damit gilt

$$Q = e^T(k) W^{-1} e^T(k) = \varepsilon^T(k) \varepsilon(k). \quad (6.117)$$

Mit den im Abschnitt 6.3.1 angegebenen System-, Modell- und Fehlergleichungen ergibt sich als Schätzvorschrift für  $n$  Beobachtungen (s. Abschn. 5.2.4)

$$\hat{s} = [M^T(n) W^{-1} M(n)]^{-1} M^T(n) W^{-1} x(n). \quad (6.118)$$

Wenn die Bewertungsmatrix  $W^{-1}$  in das Produkt zweier Dreiecksmatrizen  $F^T$  und  $F$

$$W^{-1} = F^T F$$

zerlegt werden kann, erhält man aus Gl. (6.118)

$$\hat{s} = [\tilde{M}^T(n) \tilde{M}(n)]^{-1} \tilde{M}^T(n) \tilde{x}(n) \quad (6.119)$$

mit

$$\tilde{M}(n) = F M(n), \quad \tilde{x}(n) = F x(n).$$

Gleichung (6.119) entspricht formal dem Algorithmus der Regression, nur daß gefilterte Meßwerte verwendet werden; s. Gl. (6.84). Da außer den Systemparametern auch noch die Parameter des Filters bestimmt werden müssen, erfolgt die Schätzung im Wechsel von System- und Filterparametern in mehreren Schritten mit der sog. Mehrschritt-methode, weil die Elemente der Wichtungsmatrix  $W^{-1}$  (damit auch der Matrix  $F$ ) in der Regel nicht a priori bekannt sind [6.7, 6.16]. Die Bewertungsmatrix  $F$  in Gl. (6.119) stellt ein Filter dar, das die Werte der Eingangs- und Ausgangssignale so transformiert, daß aus dem korrelierten Gleichungsfehler  $e(k)$  der unkorrelierte Gleichungsfehler  $\varepsilon(k)$  entsteht. Von den vielen Möglichkeiten zur Wahl der Filterübertragungsfunktion wird entsprechend Gl. (6.115)

$$\hat{F}(z) = \frac{1}{\hat{A}(z^{-1}) \hat{D}(z^{-1})} \quad (6.120)$$

für das Verfahren der verallgemeinerten Regression gewählt. Die Schätzung der Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  des Systems und der Koeffizienten  $d_i$  des Filters erfolgt in den Schritten (Bild 6.13):

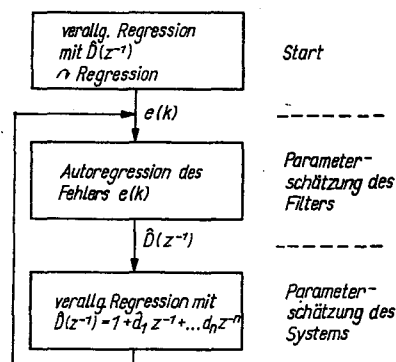


Bild 6.13  
Struktur der Mehrschritt-methode bei dem Verfahren der verallgemeinerten Regression

**Schritt 1.** Schätzung der Systemparameter  $a_i$  und  $b_i$  aus den ungefilterten Eingangs- und Ausgangssignalwerten, d.h.  $\hat{D}(z^{-1}) = 1$ , für  $n$  Beobachtungen ( $k = j, j+1, \dots, j+n-1$ ). Die Schätzung entspricht der Methode der Regression.

**Schritt 2.** Ermittlung der Koeffizienten  $d_i$  des Filters auf der Grundlage des mit den geschätzten Parametern  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$  nach Gl. (6.72) berechneten Fehlers  $e(k)$ . Für den Zu-

sammenhang zwischen dem korrelierten und dem unkorrelierten Gleichungsfehler gilt im Zeitbereich für die  $k$ -te Beobachtung

$$\varepsilon(k) = e(k) + \hat{d}_1 e(k-1) + \dots + \hat{d}_r e(k-r). \quad (6.121)$$

Damit kann aus Gl. (6.121) die Fehlergleichung

$$\varepsilon(k) = e(k) - [-\hat{d}_1 e(k-1) - \dots - \hat{d}_r e(k-r)]$$

für die  $k$ -te Beobachtung und das Gleichungssystem für  $n$  Beobachtungen in der Form

$$\begin{aligned} \varepsilon(j) &= e(j) - [-\hat{d}_1 e(j-1) \dots - \hat{d}_r e(j-r)] \\ &\vdots \\ \varepsilon(j+n-1) &= e(j+n-1) - [-\hat{d}_1 e(j-1+n-1) \dots - \hat{d}_r e(j-r+n-1)] \end{aligned}$$

aufgebaut werden. In Vektorschreibweise erhält man somit für das Gleichungssystem die Beziehung

$$\varepsilon(n) = e(n) - E^{*T}(n) \hat{d}. \quad (6.122)$$

Bei Verwendung der Methode der Regression erhält man als Schätzvorschrift für die Parameter  $\hat{d}_i$  des Filters aus den Werten des korrelierten Fehlers  $e(k)$

$$\hat{d} = [E^{*T}(n) E^*(n)]^{-1} E^{*T}(n) e(n) \quad (6.123)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{d}^T &= [\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_r] \\ e^T(n) &= [e(j), e(j+1), \dots, e(j+n-1)] \\ E^{*T}(n) &= \begin{bmatrix} -e(j-1) & \dots & -e(j-r) \\ \vdots & & \vdots \\ -e(j-1+n-1) & \dots & -e(j-r+n-1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Schritt 3.** Filterung der Eingangs- und Ausgangssignalwerte mit den neuen Filterparametern entsprechend den Vorschriften von Gl. (6.115) und Schätzung der Parameter  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$  entsprechend der Beziehung von Gl. (6.119).

Mit diesen neu erhaltenen Schätzungen für die Systemparameter wird die Schätzstrategie ab dem zweiten Schritt wiederholt, bis das Fehlerkriterium von Gl. (6.117) ein Minimum hat.

Werden die Eingangs- und Ausgangssignale optimal gefiltert, wird der Gleichungsfehler in ein „weißes Rauschsignal“ übergehen, und die Parameterschätzung ist erwartungstreu (s. Abschn. 6.3.2). Der relativ hohe rechentechnische Aufwand durch die Inversionen in (6.119) und (6.123) kann wiederum durch eine rekursive Gestaltung der Schätzvorschriften von (6.119) und (6.123) reduziert werden. Im Gegensatz zur blockweisen Abarbeitung der Meßwerte wird das Filter in jedem Schritt neu berechnet und so jeder Meßwertsatz mit den aktuellen Filterparametern nach den Beziehungen

$$\tilde{x}(k) = x^T(k) \hat{d}(k), \quad \tilde{u}(k) = u^T(k) \hat{d}(k) \quad (6.124)$$

mit

$$\begin{aligned} x^T(k) &= [x(k), x(k-1), \dots, x(k-r)] \\ u^T(k) &= [u(k), u(k-1), \dots, u(k-r)] \\ \hat{d}^T(k) &= [1, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_r] \end{aligned}$$

gefiltert. Die Mehrschrittstrategie bleibt auch bei der rekursiven Version erhalten. Für die Schätzvorschrift der Systemparameter gilt analog zu den Beziehungen im Abschnitt 6.3.3.2

$$\hat{s}(k+1) = \hat{s}(k) + k(k+1) [x(k+1) - m^T(k+1) \hat{s}(k)] \quad (6.125)$$

mit

$$k(k+1) = P(k) m(k+1) [1 + m^T(k+1) P(k) m(k+1)]^{-1}$$

$$P(k+1) = P(k) - k(k+1) m^T(k+1) P(k).$$

Die Filterparameter  $\hat{d}_i$  werden analog nach der Vorschrift

$$\hat{d}(k+1) = \hat{d}(k) + k'(k+1) [e(k+1) - e^T(k) \hat{d}(k)] \quad (6.126)$$

mit

$$k'(k+1) = \psi(k) e(k+1) [1 + e^T(k+1) \psi(k) e(k+1)]^{-1}$$

$$\psi(k+1) = \psi(k) - k'(k+1) e^T(k+1) \psi(k)$$

$$\psi(k) = [E^{*T}(k) E^*(k)]^{-1}$$

bestimmt. Die mit den Gln. (6.125) und (6.126) realisierte rekursive Schätzung ist in der Regel aber nicht immer asymptotisch erwartungstreu [6.18]. Dem Vorteil der fehlenden Inversion von Matrizen steht die Wahl der Anfangswerte für die System- und Filterparameter sowie der Matrizen  $\tilde{P}(k)$  und  $\psi(k)$  als Nachteil gegenüber.

Insgesamt kann eingeschätzt werden, daß sich der rechentechnische Aufwand gegenüber den Methoden der Regression und der Hilfsvariablen beachtlich erhöht und dazu geführt hat, daß die praktische Anwendung gering ist.

#### 6.3.4.2. Maximum-Likelihood-Methode

Die Methode beruht auf der Maximierung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des unkorrelierten Fehlers  $\varepsilon(k)$  unter der Annahme, daß sein Verhalten einer Normalverteilung  $NV(0, \sigma_\varepsilon^2)$  entspricht. Für  $n$  Beobachtungen gilt damit für die Likelihood-Funktion (s. Abschn. 5.1)

$$L = p(\varepsilon(k)/\hat{s}, u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_\varepsilon^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{k=j}^{j+n-1} \varepsilon^2(k)\right). \quad (6.127)$$

Das Maximum der Likelihood-Funktion  $L$  wird erzielt, wenn der Ausdruck

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{k=j}^{j+n-1} \varepsilon^2(k) \quad (6.128)$$

minimal wird.

Für die weitere Betrachtung ist die Strategie der Umwandlung des korrelierten Fehlers  $e(n)$  in den unkorrelierten Fehler  $\varepsilon(k)$  festzulegen. Die von *Aström* und *Bohlin* [1.38, 6.19] vorgeschlagene Methode geht von der Fehlergleichung entsprechend Gl. (6.68) aus. Der korrelierte Fehler  $E(z)$  wird bei dieser Methode über die Beziehung

$$E(z) = \hat{C}(z^{-1}) \varepsilon(z) \quad (6.129)$$

in den unkorrelierten Fehler  $\varepsilon(z)$  umgeformt. Damit gilt für die Fehlergleichung

$$\hat{C}(z^{-1}) \varepsilon(z) = \hat{A}(z^{-1}) X(z) - \hat{B}(z^{-1}) U(z) \quad (6.130)$$

oder

$$\varepsilon(z) = \frac{\hat{A}(z^{-1})}{\hat{C}(z^{-1})} X(z) - \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{C}(z^{-1})} U(z). \quad (6.131)$$

Aus Gl. (6.131) ist sofort ersichtlich, daß die Parameter  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$ ;  $i = 1, \dots, m$ , linear und die Parameter  $\hat{c}_i$ ;  $i = 1, \dots, n$ , nichtlinear in den Fehler  $\varepsilon(k)$  eingehen. Damit kann das Gütekriterium von Gl. (6.83) nicht mehr direkt analytisch gelöst werden. Eine Möglichkeit besteht in der Anwendung der im Abschnitt 5.3 vorgestellten iterativen Schätzverfahren. Wird als Schätzverfahren für die Parametervektoren

$$\hat{s}^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m; \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m; \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n] \quad (6.132)$$

entsprechend den Ableitungen im Abschnitt 5.3 die Newton-Raphson-Methode verwendet, gilt analog zu Gl. (5.75)

$$\hat{s}^{i+1} = \hat{s}^i - \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{s}} \nabla Q(\hat{s})^T \Big|_{\hat{s}=\hat{s}^i} \right]^{-1} \nabla Q(\hat{s}) \Big|_{\hat{s}=\hat{s}^i}. \quad (6.133)$$

Die erforderlichen ersten und zweiten Ableitungen des Gütekriteriums werden unter Beachtung des für dieses Modell geltenden Parametervektors Gl. (6.132) nach den in Gl. (5.76) angegebenen Beziehungen ermittelt. Die iterative Lösung erfolgt ebenfalls nach der im Abschnitt 5.3.2 angegebenen Strategie.

Die Methode der Maximum-Likelihood-Schätzung zeichnet sich durch eine geringe Empfindlichkeit gegen Störungen aus und hat sich im Vergleich zu den anderen vorgestellten Verfahren bei korrelierten Fehlern in vielen Testfällen als überlegen erwiesen [1.1, 1.44, 1.45, 6.20]. Nachteilig wirkt sich der erhöhte Rechenaufwand aus. Die vorgeschlagene rekursive Version der Maximum-Likelihood-Schätzung [1.45] hat sich aufgrund der vielen Näherungen nicht durchgesetzt.

In der Literatur sind eine Vielzahl weiterer Verfahren entworfen und erprobt worden, die teilweise unter Beachtung weiterer Voraussetzungen an die auf das System wirkenden Signale ebenfalls sehr gute und effektive Schätzungen der Parameter der Differenzengleichung gestatten. Genannt seien an dieser Stelle

- Erweiterte Matrizen-Methoden auf der Basis der Gl. (6.73), [1.44, 1.45],
- Tally-Methode [6.21],
- Prior-Knowledge-Fitting-Methode [6.22],
- zweistufige Schätzungen in Form der Ermittlung des parametrischen Modells aus dem nichtparametrischen Modell der Gewichtsfunktion [1.44].

Ihre Anwendungsbreite ist jedoch gegenüber den ausführlicher vorgestellten<sup>1</sup> Verfahren wesentlich geringer.

### 6.3.5. Parameterschätzung einfacher nichtlinearer Systeme

Wie bereits im Abschnitt 6.3.1.2 erläutert, können viele technische und nichttechnische Prozesse auch in der Umgebung des Arbeitspunktes nicht mehr hinreichend durch lineare Modelle beschrieben werden. Gegenüber den im Abschnitt 6.2 vorgestellten nichtpara-

metrischen Modellen in Form der Volterra-Reihen haben die im Abschnitt 6.3.1.2 genannten nichtlinearen Differenzengleichungsmodelle folgende Vorteile [6.22]:

- Nichtlineare Differenzengleichungsmodelle können direkt oder durch eine Approximation aus einer theoretischen Prozeßanalyse gewonnen werden.
- Die Anzahl der Parameter ist wesentlich geringer als beim Volterra-Reihen-Modell.
- Das Modell ist numerisch leicht zu handhaben.
- Die parametrischen nichtlinearen Modelle sind für die Lösung von Vorhersage- und Steuerungsaufgaben gut geeignet.

Auf der Basis der im Abschnitt 6.3.1.2 angegebenen Modellstrukturen werden in den folgenden Abschnitten die direkte, die zweistufige und die iterative Schätzstrategie zur Ermittlung der Parameter vorgestellt. Bei den Ausführungen wird vorwiegend das Hammerstein-Modell betrachtet, weil es relativ einfache Lösungen ermöglicht und in der Praxis die breiteste Anwendung gefunden hat. Die Lösungen für das Wiener-Modell sind in der weiterführenden Literatur enthalten [6.9].

#### 6.3.5.1. Direkte Schätzstrategien

Als direkte Schätzstrategie soll die Ermittlung aller Parameter der vorgestellten Systembeschreibungen durch eine Schätzgleichung bezeichnet werden. Auf der Grundlage der im Abschnitt 6.3.1.2 abgeleiteten Beziehungen für das Hammerstein-Modell gilt entsprechend Gl. (6.78)

$$\hat{x}(k) = m^T(k) \hat{s} \quad (6.134)$$

mit

$$m^T(k) = [1; -x(k-1) \dots -x(k-m); u(k) \dots u(k-m); \dots; u^p(k) \dots u^p(k-m)]$$

$$\hat{s}^T = [\hat{p}_{00}; \hat{a}_1 \dots \hat{a}_m; \hat{b}_0 \dots \hat{b}_m; \dots; \hat{b}_{p0} \dots \hat{b}_{pm}].$$

Mit diesem umgeformten Modellansatz können die für die Parameterschätzung linearer dynamischer Systeme entwickelten Verfahren direkt angewendet werden, weil die zu schätzenden Parameter linear in die Fehlergleichung eingehen. Als Schätzverfahren können die Methode der Regression entsprechend Gl. (6.84), die Methode der Hilfsvariablen entsprechend Gl. (6.104), die Methode der verallgemeinerten Regression entsprechend Gl. (6.119) und die Maximum-Likelihood-Schätzung entsprechend Gl. (6.133) verwendet werden [1.44, 1.49, 6.9, 6.10, 6.11]. Die in den Abschnitten 6.3.2 bis 6.3.4 getroffenen Einschätzungen zur Leistungsfähigkeit der Verfahren gelten auch für diesen Modellansatz.

Im Beispiel 6.5 ist die direkte Schätzung der Parameter eines nichtlinearen dynamischen Systems mit einer Hammerstein-Struktur und der Methode der Hilfsvariablen dargestellt.

#### 6.3.5.2. Mehrstufige Schätzstrategien

Die mehrstufigen Schätzstrategien gehen davon aus, daß es durch die Gestaltung der auf das System aufgeprägten Testsignale möglich ist, die Parameter des linearen dynamischen Teilsystems und die des nichtlinearen statischen Teilsystems getrennt zu schätzen.

| Beispiel<br>6.5 | Parameterschätzung eines nichtlinearen Differenzgleichungsmodells<br>mit der Methode der Hilfsvariablen |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Gegeben: Systembeschreibung (Hammerstein-Modell)

a) statisches Teilsystem

$$y = -1 + 2u + 0,5u^2,$$

b) dynamisches Teilsystem

$$G(p) = \frac{1}{(1 + p \cdot 10 \text{ s})(1 + p \cdot 5 \text{ s})}.$$

Mit  $T = 2 \text{ s}$  folgt

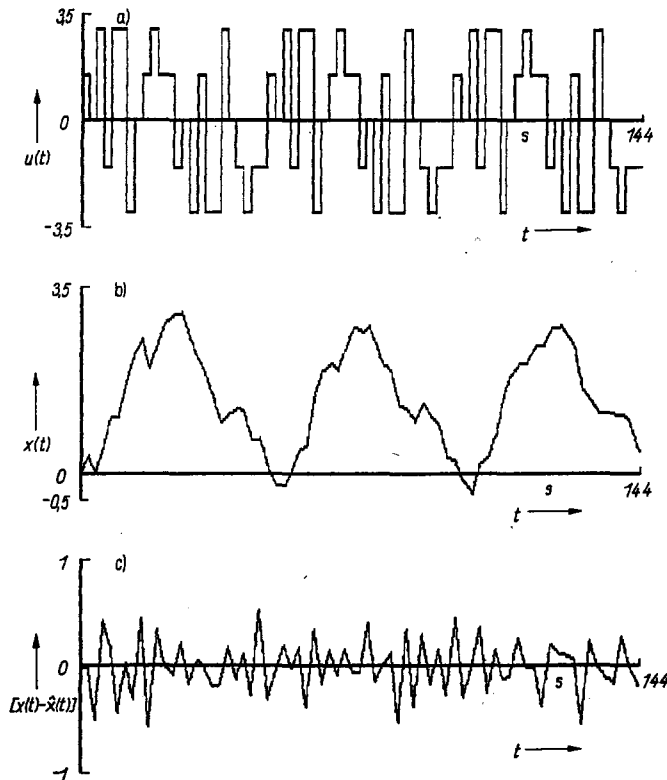
$$G(z) = \frac{0,0328 z^{-1} + 0,0269 z^{-2}}{1 - 1,489 z^{-1} + 0,5488 z^{-2}}.$$

Testsignal: Fünfwertige  $m$ -Folge (Länge  $24T$ , maximale Amplitude  $\pm 3$ , Gesamtlänge  $72T$ ),

Störung  $NV(0, \sigma_x^2)$ ; hochfrequent,

Störverhältnis  $\sqrt{\sigma_x^2/\sigma_{x_0}^2} = 0,13$ .

Gesucht: Schätzwerte der Koeffizienten für die Beschreibungen des statischen und dynamischen Teilsystems sowie die Reststreuung  $s_R^2$ .



| Beispiel<br>6.5 | Parameterschätzung eines nichtlinearen Differenzgleichungsmodells<br>mit der Methode der Hilfsvariablen |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Ergebnis: Aus den Meßwerten des Eingangs- und Ausgangssignals wurden folgende Parameter nach der Auftrennung in die Teilmodelle im jeweiligen Iterationsschritt ermittelt:

| Parameterwert | Iterationsschritt |        |
|---------------|-------------------|--------|
|               | 1                 | 20     |
| $\hat{r}_0$   | -2,787            | -4,402 |
| $\hat{r}_1$   | 1,864             | 2,060  |
| $\hat{r}_2$   | 0,3880            | 0,527  |
| $\hat{a}_1$   | -1,069            | -1,424 |
| $\hat{a}_2$   | 0,123             | 0,464  |
| $\hat{b}_1$   | 0,0249            | 0,0218 |
| $\hat{b}_2$   | 0,0291            | 0,0182 |
| $s_R^2$       | 0,063             | 0,077  |

Die Ergebnisse der Schätzung zeigen, daß die Methode der Hilfsvariablen gegenüber der Regression (erster Iterationsschritt) den Schätzfehler der meisten Parameter reduziert. Der große Fehler des Parameters des Arbeitspunktes  $\hat{r}_0$  kann reduziert werden, wenn das Testsignal über längere Perioden den Wert null hat. Am Verlauf der Differenz zwischen System- und Modellausgang ist wiederum zu erkennen, daß bereits eine gute Nachbildung des Systemverhaltens erfolgt.

Die erste Strategie besteht in der Ermittlung der Teilsysteme in folgender Reihenfolge:

**Nichtlinearität – Linearität**

Diese Vorgehensweise ist für das Hammerstein-Modell besonders geeignet. Für das Wiener-Modell muß eine eindeutig umkehrbare Kennlinie der Nichtlinearität vorausgesetzt werden. Die Parameterschätzung erfolgt in zwei Stufen:

**Stufe 1.** Ermittlung der statischen Modellparameter  $r_j$  aus  $n$  Versuchen um den Arbeitspunkt mittels Regression; s. Gl. (5.47).

**Stufe 2.** Ermittlung der Modellparameter  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$  für das lineare dynamische Teilsystem aus den mit dem nichtlinearen Teilmodell aus Stufe 1 berechneten Zwischensignalen  $\hat{y}(k)$  und den gemessenen Ausgangssignalen  $x(k)$ . Als Schätzverfahren können die Regression – Gl. (6.84) – und die Hilfsvariablenschätzung – Gl. (6.104) – verwendet werden. Die zu verwendenden Systemgleichungen haben folgendes Aussehen:

a) Hammerstein-Modell

$$x(k) = m^T s + n^*(k) \quad (6.135)$$

mit

$$m^T(k) = [-x(k-1) \dots -x(k-m) : y(k) \dots y(k-m)]$$

$$s^T = [a_1 \dots a_m : b_0 \dots b_m];$$

b) Wiener-Modell

$$y(k) = m^T(k) s + n^*(k) \quad (6.136)$$

mit

$$m^T(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-m) : u(k) \dots u(k-m)]$$

$$s^T = [a_1 \dots a_m : b_0 \dots b_m].$$

Die zweite Strategie ermittelt die Parameter der Teilsysteme in folgender Reihenfolge:

#### Linearität – Nichtlinearität

Diese Strategie setzt einen linearen Bereich der statischen Kennlinie voraus und ist dann für das Hammerstein- und Wiener-Modell gleichermaßen geeignet. Die Schätzung wird wieder in zwei Stufen durchgeführt:

**Stufe 1.** Ermittlung der Parameter  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$  für das dynamische Teilmodell mit einem Testsignal, das das System nur im linearen Bereich aussteuert. Hierzu werden die Regression oder die Methode der Hilfsvariablen verwendet.

**Stufe 2.** Ermittlung der Parameter  $\hat{p}_j$  aus den berechneten Zwischensignalwerten  $\hat{y}(k)$  sowie den Eingangssignalwerten  $u(k)$  beim Hammerstein-Modell und den Ausgangssignalwerten beim Wiener-Modell mit der Methode der Regression.

Wie umfangreiche Untersuchungen in [6.10] gezeigt haben, sind für beide Modellstrukturen mit diesen Strategien gute Ergebnisse möglich. Beachtet werden sollte, daß es sinnvoll ist, die Verstärkung des linearen dynamischen Teilsystems auf 1 zu normieren, da die Verstärkung des Gesamtsystems den Teilsystemen nicht eindeutig zugeordnet ist.

#### 6.3.5.3. Iterative Schätzstrategien

Bei den iterativen Schätzstrategien wird davon ausgegangen, daß die Parameter der Teilsysteme auf der Grundlage von  $n$  beobachteten Werten der Eingangs- und Ausgangsgrößen  $u(k)$  und  $x(k)$  abwechselnd geschätzt werden [6.9, 6.10, 6.11]. Das Zwischensignal  $y(k)$  wird in die Schätzung einbezogen, und im Gegensatz zu den zweistufigen Verfahren sind keine gesonderten Versuche notwendig, wenn die an dem System anliegenden Signale von  $u(k)$  die Amplituden- und Frequenzbereiche des Systems ausreichend aussteuern bzw. anregen. Die iterative Schätzstrategie hat sich besonders für das Hammerstein-Modell bewährt [6.9, 6.11]. Beim Wiener-Modell treten bei Störungen am Ausgang Probleme auf [6.10]. Die Strategie wird in zwei Schritten realisiert:

**Schritt 1.** Schätzung der Parameter  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$  des linearen dynamischen Teilsystems aus Ausgangssignalwerten  $x(k)$  und den aus den Eingangssignalwerten  $u(k)$  und den Parametern des nichtlinearen statischen Teilsystems  $\hat{p}_j$  berechneten Zwischensignalen  $\hat{y}(k)$ :

$$\hat{y}(k) = \sum_{j=0}^p \hat{p}_j u^j(k). \quad (6.137)$$

Als Startwerte werden die Signalwerte  $y(k) = u(k)$  verwendet. Damit ergibt sich als Schätzvorschrift analog zu Gl. (6.84)

$$\hat{s}_1 = [M_1^T(n) M_1(n)]^{-1} M_1^T(n) x(n) \quad (6.138)$$

mit

$$m_1^T(k) = [-x(k-1) \dots -x(k-m) : \hat{y}(k) \dots \hat{y}(k-m)]$$

$$\hat{s}_1^T = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_m : \hat{b}_0 \dots \hat{b}_m].$$

**Schritt 2.** Schätzung der Parameter  $\hat{p}_j$  des nichtlinearen statischen Teilsystems auf der Grundlage der im ersten Schritt ermittelten Parameter des dynamischen Teilsystems. Entsprechend Gl. (6.76) gilt mit den geschätzten Parametern  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$  für die  $k$ -te Beobachtung

$$x(k) + \hat{a}^T x(k-1) = \hat{b}^T U(k) \hat{p} \quad (6.139)$$

mit

$$x^T(k-1) = [x(k-1) \dots x(k-m)]$$

$$U(k) = \begin{bmatrix} 1 & u(k) & u^2(k) & \dots & u^p(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u(k-m) & u^2(k-m) & \dots & u^p(k-m) \end{bmatrix}.$$

Mit Anwendung der Methode der Regression erhält man für  $n$  Beobachtungen die Schätzvorschrift für die Parameter der statischen Nichtlinearität zu

$$\hat{p} = [M_2^T(n) M_2(n)]^{-1} M_2^T(n) x_2(n) \quad (6.140)$$

mit

$$m_2^T(k) = [\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_m : \hat{b}_0 u(k) \dots \hat{b}_m u(k-m) : \\ \dots : \hat{b}_0 u^p(k) \dots \hat{b}_m u^p(k-m)]$$

$$x_2(k) = [x(k) + \hat{a}^T x(k-1)].$$

Die Schätzergebnisse werden wieder im ersten Schritt eingesetzt und die Iterationen so lange fortgesetzt, bis Abbruchschranken für die Parameteränderungen bzw. für das Gütekriterium erfüllt sind.

Die Vorteile der iterativen Schätzstrategie bestehen

- in der geringeren Parameteranzahl
- in der fehlenden Parametertransformation
- in der Möglichkeit der sehr guten Einbindung von A-priori-Informationen.

Probleme bestehen bei der Echtzeitmodellbildung und dem Nachweis der Konvergenz [6.9, 6.10].

## 6.4. Entwurf von Testsignalfolgen

### 6.4.1. Notwendigkeit und Ziele

Wenn es möglich ist, zur Ermittlung des dynamischen Verhaltens eines Systems die Eingangssignale gezielt zu verändern, muß die Frage nach dem Entwurf von Testsignalfolgen beantwortet werden. In der Vergangenheit haben sich zwei grundsätzliche Wege des Entwurfs herausgebildet.

Der erste Weg geht davon aus, daß für ein gewähltes Modell und ein Schätzverfahren auf der Grundlage von Optimalitätskriterien der Versuchsplanung Testsignalfolgen entworfen werden [6.2, 6.3, 6.4, 6.12, 6.24, 6.25, 6.26].

Der zweite Weg basiert auf der Überlegung, daß das Leistungsdichtespektrum des Testsignals so zu entwerfen ist, daß das Signal den interessierenden Frequenzbereich des Systems ausreichend anregt. Da dieser Bereich selten bekannt ist, wurden Testsignale entworfen, die die Eigenschaften eines weißen Rauschens gut annähern und gleichzeitig einfach zu realisieren sind [1.37, 1.46, 1.47, 6.27 bis 6.29, 3.3, 4.10]. Zu dieser Gruppe von Signalen gehören die pseudostochastischen binären Testsignale (PRBS-Folgen) für lineare dynamische Systeme bzw. die pseudostochastischen mehrwertigen Testsignale ( $m$ -Folgen) für nichtlineare dynamische Systeme. Auf ihre Erzeugung und ihrer Anwendung soll nun zunächst eingegangen werden.

## 6.4.2. Pseudostochastische binäre Testsignale

Zu den in der Vergangenheit am häufigsten angewendeten Testsignalfolgen bei der Identifikation dynamischer Systeme gehören die PRBS-Folgen (pseudo-random-binary-signals). Eine pseudozufällige Binärfolge ist eine zweiwertige Folge, deren Werte nur zu bestimmten, äquidistanten Zeitpunkten wechseln dürfen und die sich nach einer bestimmten Zeit  $T_p = LT$  (Periodendauer) wiederholen. Dabei bedeuten  $L$  Anzahl der Takte je Periode;  $T$  Taktzeit, Abtastintervall.

Sie wurden mit dem Ziel erstellt, diskrete Signale zu erzeugen, die in bestimmten Bereichen die Eigenschaften des weißen Rauschens nachbilden. Sie können unter Verwendung eines rückgekoppelten Schieberegisters, das aus  $NR$  Stufen mit den Zuständen

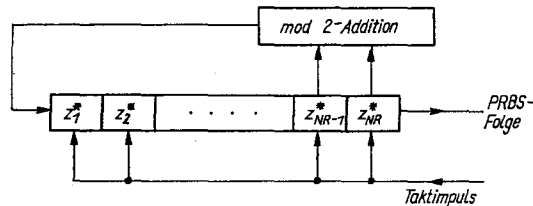


Bild 6.14  
Grundstruktur eines Schieberegisters  
zur Erzeugung von PRBS-Folgen

$z_i^* = (0, 1)$ ;  $i = 1, \dots, NR$ , besteht, erzeugt werden. Die Grundstruktur eines solchen Registers ist im Bild 6.14 dargestellt. Für  $NR$  Registerstufen erhält man eine PRBS-Folge der Periodenlänge  $L = 2^{NR} - 1$ . (Der Zustand „Null“ in allen Registerstufen muß ausgeschlossen werden.)

Tafel 6.2 zeigt eine Auswahl in der Praxis häufig verwendeter PRBS-Folgen mit den verwendeten Stufenzahlen  $NR$ , den Rückkopplungsfaktoren  $c_i$  und der je Periodendauer  $T_p$  auftretenden Anzahl verschiedener Binärkombinationen bzw. der Folgenlänge  $L$ .

| Stufenzahl<br>NR | Rückkopplungsfaktoren<br>$c_i$ | $L = 2^{NR} - 1$ |
|------------------|--------------------------------|------------------|
| 2                | 1 1                            | 3                |
| 3                | 1 0 1                          | 7                |
| 4                | 1 0 0 1                        | 15               |
| 5                | 0 1 0 0 1                      | 31               |
| 6                | 1 0 0 0 0 1                    | 63               |
| 7                | 0 0 1 0 0 0 1                  | 127              |
| 9                | 0 0 0 1 0 0 0 0 1              | 511              |

Tafel 6.2  
Bedingungen zur Erzeugung  
einiger PRBS-Folgen  
mit Schieberegistern

Die z.B. mit dem vierstufigen Register bei den angegebenen Rückkopplungen und den Anfangsbelegungen der Registerstufen 0 1 1 1 erzeugte Folge hat den im Bild 6.15 dargestellten Verlauf.

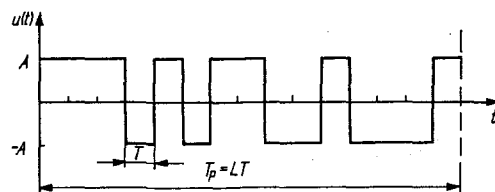


Bild 6.15  
PRBS-Folge  
aus einem vierstufigen Schieberegister

Um den arithmetischen Mittelwert näherungsweise zu null zu machen, wurden die zwei Zustände der durch das Schieberegister erzeugten binären Folge mit  $+A$  und  $-A$  angenommen. Dann gilt

$$\bar{u} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L u(k) = \frac{A}{L}. \quad (6.141)$$

Für den quadratischen Mittelwert folgt

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L u^2(k) = A^2. \quad (6.142)$$

Die Autokorrelationsfunktion der Folge ist durch die Beziehung

$$R_{uu}(m) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^L u(i) u(i+m) \quad (6.143)$$

definiert und hat den im Bild 6.16 angegebenen prinzipiellen Verlauf.

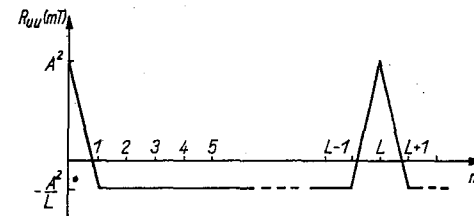


Bild 6.16  
Autokorrelationsfunktion  
einer PRBS-Folge

Die dargestellte Funktion ist periodisch mit der Periodenlänge  $L$ . Es gilt

$$R_{uu}(m) = \begin{cases} A^2 & \text{für } m = iL; \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ -\frac{A^2}{L} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.144)$$

Für große Folgenlängen  $L$  wird die Funktion immer besser an die Korrelationsfunktion des idealen weißen Rauschens angenähert. Ähnlich verhält es sich mit dem zur Autokorrelationsfunktion im Frequenzbereich äquivalenten Leistungsspektrum. Es ergibt sich aus der Wiener-Chinschinschen Beziehung (s. Abschn. 3.2.3) zu

$$S_{uu}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.145)$$

und nimmt für PRBS-Folgen folgende Form an:

$$S_{uu}(\omega) = \frac{2\pi A^2}{L^2} \left[ \delta(\omega) + (L+1) \sum_{n \neq 0}^{\infty} \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right) \delta(\omega - n\omega_0) \right]; \quad (6.146)$$

$\delta(\omega)$  Dirac-Impuls.

Gl. (6.146) beschreibt ein Linienspektrum, wobei die einzelnen Spektrallinien an den Stellen  $\omega = n\omega_0 = n2\pi/LT$  auftreten.

Der prinzipielle Verlauf des Linienspektrums einer PRBS-Folge ist im Bild 6.17 dargestellt.

Wird bei gleicher Folgenlänge  $L$  die Abtastzeit  $T$  verringert, streckt sich das Leistungsspektrum in Richtung der  $\omega$ -Achse und erreicht im Grenzfall das Leistungsspektrum des weißen Rauschens:  $S_{uu}(\omega) = S_0 = \text{const.}$

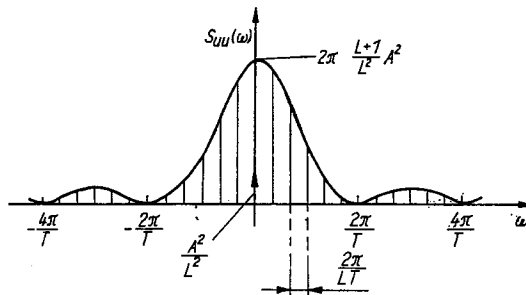


Bild 6.17  
Leistungsdichtespektrum  
einer PRBS-Folge

Bei der Identifikation dynamischer Systeme kann folglich durch Wahl entsprechender Folgenlängen  $L$  und der Abtastintervalle  $T$  die PRBS-Folge so gestaltet werden, daß ihr Frequenzspektrum bezüglich der dominierenden Spektralanteile des Systems als weißes Rauschen anzusehen ist und dadurch alle interessierenden Frequenzen annähernd gleichmäßig angeregt werden. Eine ausführlichere Darstellung des Zusammenhangs zwischen den Systemeigenschaften und der Wahl der Abtastzeit  $T$  ist im Abschnitt 6.4.4 gegeben.

Wird als Modell des linearen dynamischen Systems das Faltungsintegral (bei Darstellung der Gewichtsfunktion durch Stützstellen) entsprechend Gl. (6.10) verwendet, ergibt sich für eine PRBS-Folge mit den Eigenschaften entsprechend Gl. (6.144) aus der Schätzvorschrift nach Gl. (6.25) die vereinfachte Schätzgleichung (bei  $m+1 = L > n$  und  $n \gg 50$ )

$$\hat{s} = \frac{1}{A^2 n T} M^T x \quad (6.147)$$

sowie als Kennwerte für die Güte der Schätzung

$$\text{var} \{\hat{g}(j)\} = \frac{2\sigma_z^2}{A^2 n T^2} \quad (6.148)$$

$$\text{cov} \{\hat{g}(i) \hat{g}(j)\} = \frac{\sigma_z^2}{A^2 n T^2} \quad (6.149)$$

Ausgehend von Gl. (6.32) ergibt sich auch für das Korrelationsverfahren unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion für die PRBS-Folge entsprechend Gl. (6.144) eine Vereinfachung der Schätzvorschrift (unter der Voraussetzung  $A^2 \gg A^2/L$ ):

$$\hat{s} = \frac{1}{A^2 T} R_{ux}. \quad (6.150)$$

### 6.4.3. Pseudostochastische mehrwertige Testsignale

Ist zur Systembeschreibung ein nichtlineares Modell erforderlich, genügt es nicht mehr, das verwendete Testsignal auf zwei Stufen zu variieren. In Abhängigkeit von der Art der Nichtlinearität müssen mindestens  $d = 3$  oder mehr Niveaus verwendet werden. Die bisher am häufigsten für diese Problematik eingesetzten Testsignale sind die mehrwertigen pseudozufälligen Folgen ( $m$ -Folgen), deren Werte wie bei den PRBS-Folgen auch nur zu bestimmten, äquidistanten Zeitpunkten wechseln können und sich nach  $L$  Abtastschritten wiederholen. Die Festlegung der Wertigkeit der Folgen wird in praktischen Fällen meist von der Art der einstellbaren Einflußgrößen bestimmt. Unter diesem Aspekt stellt die Stufenzahl  $d = 5$  eine sinnvolle obere Schranke dar.

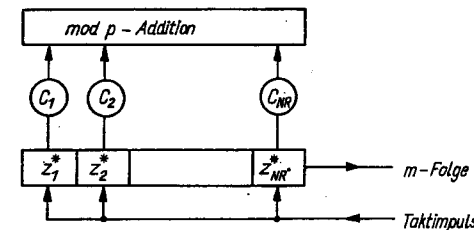


Bild 6.18  
Grundstruktur eines Schieberegisters  
zur Erzeugung mehrwertiger Folgen

Die mehrwertigen Folgen werden ebenfalls unter Verwendung eines rückgekoppelten Schieberegisters erzeugt, wobei die einzelnen Rückkopplungen über eine mod  $p$ -Operation in die erste Registerstufe eingespeichert werden ( $p$  Primzahlen 5, 7, 11, 13, ...). Außerdem können die Rückkopplungsfaktoren  $c_i$  im Unterschied zu PRBS-Folgen von 1 verschiedene Werte annehmen. Die Grundstruktur eines solchen Registers ist im Bild 6.18 dargestellt.

Für  $NR$  Registerstufen erhält man  $m$ -Folgen der Periodenlänge  $L = d^{NR} - 1$ .

Tafel 6.3. Bedingungen zur Erzeugung einiger mehrwertiger Folgen mit Schieberegister

| Wertigkeit<br>$d$ | Stufenzahl<br>$NR$ | Rückkopplungsfaktoren<br>$c_i$ | $L = d^{NR} - 1$ |
|-------------------|--------------------|--------------------------------|------------------|
| 3                 | 2                  | -1 1                           | 8                |
| 3                 | 3                  | 0 1 -1                         | 26               |
| 3                 | 4                  | 0 0 -1 +1                      | 80               |
| 3                 | 5                  | 0 0 0 +1 -1                    | 242              |
| 5                 | 2                  | 3 1                            | 24               |
| 5                 | 3                  | 2 0 1                          | 124              |
| 5                 | 3                  | 2 1 2                          | 124              |
| 5                 | 4                  | 2 0 2 1                        | 624              |
| 5                 | 4                  | 2 0 2 4                        | 624              |
| 5                 | 4                  | 2 1 0 1                        | 624              |
| 5                 | 5                  | 2 0 0 0 3                      | 3124             |
| 5                 | 5                  | 2 0 0 2 0                      | 3124             |
| 5                 | 5                  | 2 0 0 4 2                      | 3124             |

Tafel 6.3 zeigt für eine Auswahl von häufig verwendeten drei und fünfwertigen  $m$ -Folgen die verwendeten Registerstufen  $NR$ , die Rückkopplungsfaktoren  $c_i$  und die Folgenlänge  $L$ .

Die z. B. mit einem dreistufigen Register mit den Rückkopplungsfaktoren  $c_i = 0, 1, -1$  erzeugte Dreiwertefolge ist im Bild 6.19 dargestellt.

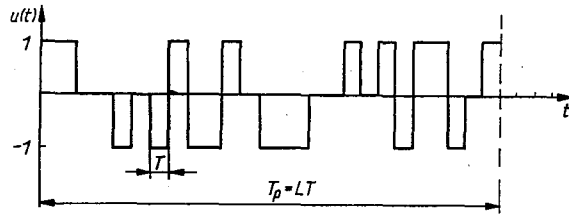


Bild 6.19  
m-Folge  
aus einem dreistufigen  
Register

Der Verlauf der Autokorrelationsfunktion kann für drei- sowie für fünfwertige pseudostochastische Testsignale wie folgt beschrieben werden:

$$R_{uu}(m) = \begin{cases} \frac{2d^{NR}}{L} & \text{für } m = iL; \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ -\frac{2d^{NR}}{L} & \text{für } m = i\frac{L}{2}; \quad i = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.151)$$

Im Bild 6.20 ist der prinzipielle Verlauf der Autokorrelationsfunktion für drei- und fünfwertige pseudostochastische Testsignale dargestellt. Der quadratische Mittelwert entspricht dem Spitzenwert von  $R_{uu}(0)$  und ist gleich

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L u^2(k) = \frac{2d^{NR}}{L}. \quad (6.152)$$

Der arithmetische Mittelwert ist  $\bar{u} = 0$ . Durch die drei- und fünfwertigen Folgen wird die Autokorrelationsfunktion des weißen Rauschens gut approximiert.

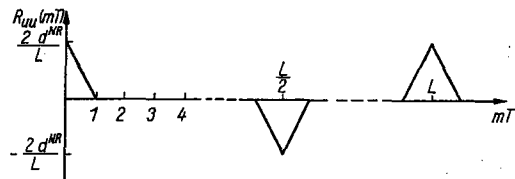


Bild 6.20  
Autokorrelationsfunktion  
einer mehrwertigen pseudostochastischen  
Testfolge

Für das Leistungsspektrum dieser pseudostochastischen Folgen ergibt sich

$$S_{uu}(\omega) = \frac{4d^{NR}}{\pi L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{jn\pi}) \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}\right) \delta(\omega - n\omega_0); \quad (6.153)$$

$\delta(\omega)$  Dirac-Impuls.

Gl. (6.153) beschreibt ein Linienspektrum, wobei die einzelnen Spektrallinien an den Stellen  $\omega = n\omega_0 = n \cdot 4\pi/LT$  auftreten. Der prinzipielle Verlauf des Linienspektrums drei- und fünfwertiger Folgen ist im Bild 6.21 dargestellt. Die für das Leistungsspektrum der PRBS-Folgen erläuterten Zusammenhänge (s. Abschn. 6.4.2) gelten hier sinngemäß.

Die drei- und fünfwertigen Pseudozufallsfolgen können zur Parameterschätzung von nichtlinearen Modellen entsprechend den Gln. (6.33), (6.43) und (6.78) eingesetzt werden,

wobei allerdings keine die Güte der geschätzten Modelle betreffenden Kriterien optimiert werden. Bei Verwendung besonderer nichtlinearer Modelldarstellungen ist es für die Korrelationsmethode möglich, wesentliche Vereinfachungen bei der Messung und Auswertung zu erreichen [6.30].

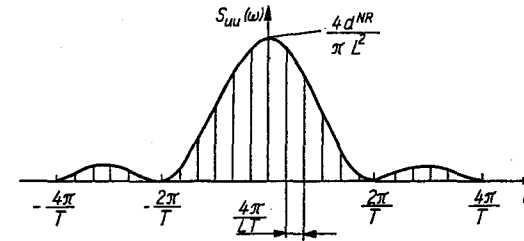


Bild 6.21  
Leistungsdichtespektrum  
drei- und fünfwertiger Pseudozufallsfolgen

#### 6.4.4. Entwurf optimaler Testsignalfolgen

##### 6.4.4.1. Optimale Testsignalfolgen für die Gewichtsfunktion

Der Entwurf optimaler Testsignalfolgen für die Ermittlung der Stützstellen der Gewichtsfunktion beruht auf der Übertragung optimaler Versuchspläne für statische Modelle in den dynamischen Bereich. Da die Beschreibung des Gewichtsfunktionsmodells

$$\hat{x} = Tm^T \hat{s} \quad (6.154)$$

der allgemeinen Systembeschreibung für statische Systeme entspricht und als Parameterschätzverfahren die Methode der Regression verwendet werden kann, haben alle im Abschnitt 5.2 abgeleiteten Zusammenhänge zur optimalen Versuchsplanung auch bei diesem Modell ihre Gültigkeit. Damit kann der Zusammenhang zwischen der Modellgüte und den Werten der Eingangssignalfolge ebenfalls durch die Beziehungen

$$\text{COV}\{\hat{s}\} = \frac{1}{T^2} [M^T M]^{-1} \sigma_z^2 \quad (6.155)$$

$$\text{var}\{\hat{x}\} = \frac{1}{T^2} m^T [M^T M]^{-1} \sigma_z^2 m \quad (6.156)$$

ausgedrückt werden. Folglich gelingt es auch im dynamischen Fall, durch Einführung der Informationsmatrix

$$I(V_n) = \frac{1}{n} [M^T M] \quad (6.157)$$

Kriterien der D-, A- und G-Optimalität abzuleiten und bei der Erstellung von Testsignalfolgen zu nutzen.

Der wesentliche Unterschied zur statischen Betrachtungsweise besteht hierbei darin, daß der Versuchsplan  $V_n$  für ein dynamisches System aus einer Versuchsfolge gebildet werden muß. Die Werte in den einzelnen Spalten des Versuchsplans können somit nicht mehr unabhängig voneinander festgelegt werden.

Wirkt auf ein dynamisches System mit einer Übergangszeit von  $T_s \approx (m+1)T$  eine Eingangsfolge  $\{u(k)\} = u(0), u(1), \dots$ , wird das Ausgangssignal  $x(t)$  zu jedem Zeitpunkt

$t = kT$ ;  $k \leq m + 1$ , entsprechend Gl. (6.10) durch  $m + 1$ , dem Zeitpunkt  $t = kT$  vorhergegangener Eingangssignalwerte bestimmt, deren Einflüsse auf  $x(t)$  durch die Stützwerte  $g(j)$  gewichtet sind. Diese  $m + 1$  Eingangssignalwerte lassen sich folglich für die verschiedenen Zeitpunkte  $kT$  in einer Tabelle zusammenfassen, die als Versuchsplan für ein dynamisches System aufgefaßt werden kann. Der Übergang von der zeitlichen Folge  $\{u(k)\}$  zu einem derartigen Versuchsplan wird durch Tafel 6.4 illustriert. Aus dieser Darstellung wird ersichtlich, daß die gesamte Information, die den Wert der Ausgangsgröße  $x(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t = kT$  beeinflusst, in einem Versuchsplan mit  $m + 1$  Spalten enthalten ist. Die erste Zeile besteht aus den ersten  $m + 1$  aufeinander folgenden Werten der Testfolge. Alle folgenden Zeilen des Planes ergeben sich durch Verschiebung der Werte der vorhergehenden Zeile um jeweils eine Spalte nach rechts und Hinzufügen des aktuellen Wertes von links, woraus eine für diese Pläne wichtige Eigenschaft resultiert: Sie haben eine sog. „Diagonalstruktur“, d. h., alle Werte auf einer beliebigen absteigenden Diagonalen sind gleich.

Tafel 6.4. Darstellung des Zusammenhangs Testfolge-Versuchsplan

| Zeitintervall  | Stützwert |          |          |          |            | Ausgang  |
|----------------|-----------|----------|----------|----------|------------|----------|
|                | $g(0)$    | $g(1)$   | ...      | $g(m-1)$ | $g(m)$     |          |
| $(0-1)T$       | $u(0)$    | 0        | ...      | 0        | 0          | $x(0)$   |
| $(1-2)T$       | $u(1)$    | $u(0)$   | ...      | 0        | 0          | $x(1)$   |
| $(2-3)T$       | $u(2)$    | $u(1)$   | ...      | 0        | 0          | $x(2)$   |
| $\vdots$       | $\vdots$  | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$   | $\vdots$ |
| $(m-2)-(m-1)T$ | $u(m-2)$  | $u(m-1)$ | ...      | 0        | 0          | $x(m-2)$ |
| $(m-1)-mT$     | $u(m-1)$  | $u(m-2)$ | ...      | $u(0)$   | 0          | $x(m-1)$ |
| $m-(m+1)T$     | $u(m)$    | $u(m-1)$ | ...      | $u(1)$   | $u(0)$     | $x(m)$   |
| $\vdots$       | $\vdots$  | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$   | $\vdots$ |
| $(k-1)-kT$     | $u(k-1)$  | $u(k-2)$ | ...      | $u(k-m)$ | $u(k-m-1)$ | $x(k-1)$ |

Hieraus folgt umgekehrt, daß sich aus einem solchen Versuchsplan eine Versuchsfolge durch Abarbeitung der ersten Zeile des Planes, von rechts beginnend, und der ersten Spalte erstellen läßt. Diese Besonderheit wird bei der Versuchsplanung für dynamische Systeme ausgenutzt.

Ausgangspunkt für die Erstellung entsprechender Versuchspläne sind die im Abschnitt 5.5.2 erläuterten Mehrfaktorpläne, die sich in der Praxis am stärksten durchgesetzt haben. Besondere Bedeutung für Polynomansätze 1. Grades haben aufgrund ihrer geringen Versuchsanzahl Pläne für die Untersuchung von  $n - 1$  unabhängigen Variablen in  $n$  Versuchen, also gesättigte Versuchspläne, gewonnen. Solche Pläne werden von Plackett und Burman [5.46] für alle durch 4 teilbaren Versuchszahlen  $n$  ( $n = 4$  bis  $n = 100$ , außer 92) angegeben (s. Abschn. 5.5).

Bei der Erstellung dieser Pläne wurde von der Forderung nach unkorrelierter Schätzung der Koeffizienten sowie maximaler Genauigkeit der Schätzung bei gegebenem Versuchsumfang ausgegangen. Diese Forderungen führten auf orthogonale Matrizen der

|            |   |   |   |   |   |   |   |   |         |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---------|
| 1. Zeile   | + | + | + | + | - | + | - | - |         |
| +          | - | + | + | + | - | + | - | - |         |
| +          | - | - | + | + | + | - | + | + |         |
| Gesamtplan | + | + | - | - | + | + | + | - | $= H_8$ |
| +          | - | + | - | - | + | + | + | + |         |
| +          | + | - | + | - | - | + | + | + |         |
| +          | + | + | - | + | - | - | + | + |         |
| +          | - | - | - | - | - | - | - | - |         |

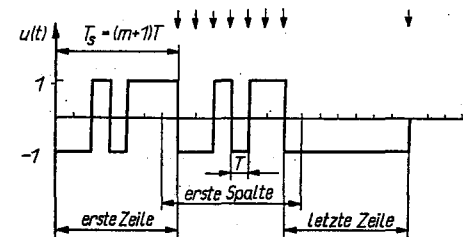
Tafel 6.5  
Plackett-Burman-Plan für  $n = 8$ 

Dimension  $4K \cdot 4K$ ;  $K = 1, 2, \dots, 25$ , die aus den Elementen  $+1$  und  $-1$  bestehen und als Hadamard-Matrizen  $H_n$  bezeichnet werden. Sie erfüllen die Gleichung

$$1/n H_n H_n^T = I_n; \quad (6.158)$$

$I_n$   $n$ -dimensionale Einheitsmatrix

und entsprechen unmittelbar gesättigten Teilfaktorversuchsplänen (TFV) mit  $n = m + 2$  Versuchen. Sie wurden von Plackett und Burman nicht direkt angegeben, sondern in Form eines Konstruktionsschemas. Danach wird für  $n = 8, 16, 20, 24, 32, 36, 44, 48, 60, 68, 72, 80$  und  $84$  eine erste Zeile mit  $n - 1$  (+)- bzw. (-)-Zeichen angegeben. Die zweite bis  $(n - 1)$ -te Zeile wird durch zyklische Vertauschung der ersten Zeile gewonnen. Als  $n$ -te Zeile wird eine (-)-Zeile verwendet und, wenn der Arbeitspunkt ermittelt werden soll, als erste Spalte eine (+)-Spalte gesetzt. Als Beispiel wird in Tafel 6.5 ein Plan für  $n = 8$  angegeben. Dieser Plan hat die Eigenschaften der Drehbarkeit, der minimalen Varianz für die Regressionskoeffizienten sowie der Orthogonalität und ist gleichzeitig ein  $D$ -,  $G$ -,  $E$ - und  $A$ -optimaler Plan. Außerdem besitzt er die für dynamische Versuchspläne gewünschte Diagonalstruktur. Die Erstellung einer optimalen Testfolge aus einem Plackett-Burman-Plan erfolgt deshalb durch Abarbeitung der ersten Zeile des Plans von rechts nach links, der zweiten Spalte von oben nach unten (die erste Spalte kann zur Ermittlung eines Arbeitspunktes benutzt werden) sowie der letzten Zeile von links nach rechts (die letzte Zeile ordnet sich nicht in die Diagonalstruktur ein). Die aus dem in Tafel 6.5 enthaltenen Versuchsplan gewonnene Testfolge ist im Bild 6.22 dargestellt, wobei die zur Auswertung benötigten Meßzeitpunkte für das Ausgangssignal durch einen Pfeil gekennzeichnet sind.

Bild 6.22  
Testfolge  
aus einem Plackett-Burman-Plan  
mit  $n = 8$ 

Aus Gl. (6.158) folgt, daß sich bei Verwendung von Testsignalfolgen aus Plackett-Burman-Plänen die Schätzvorschrift entsprechend Gl. (6.25) vereinfacht zu

$$\hat{s} = \frac{1}{nT} M^T x \quad (6.159)$$

bzw. unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Stützstellenzahl  $m + 1$  und Zahl der Zeilen des Versuchsplans  $n = (m + 1) + 1$  zu

$$\hat{s} = \frac{1}{(m+2)T} M^T x. \quad (6.160)$$

Für die Güte der geschätzten Stützstellen folgt somit aus Gl. (6.155)

$$\text{COV} \{\hat{s}\} = \frac{\sigma_s^2}{(m+2)T^2} I \quad (6.161)$$

**bzw.**

$$\text{var} \{ \hat{g}(j) \} = \frac{\sigma_z^2}{(m+2)T^2} \quad (6.162)$$

und

$$\text{cov} \{ \hat{g}(i) \hat{g}(j) \} = 0. \quad (6.163)$$

Ein Vergleich mit den für PRBS-Folgen erhaltenen Werten – Gln. (6.148) und (6.149) – zeigt, daß sich die Varianzen um die Hälfte verringert haben und die Kovarianzen zu null geworden sind, so daß sich die Modellgüte für alle Stützstellen wesentlich verbessert hat.

Analog zur bisher beschriebenen Vorgehensweise können auch Testsignalfolgen aus größeren Plackett-Burman-Plänen gewonnen werden, wenn eine große Anzahl von Stützstellen notwendig ist.

In Tafel 5.11 sind die ersten Zeilen verschiedener Plackett-Burman-Pläne angegeben. Bei vielen praktischen Untersuchungen hat sich jedoch gezeigt, daß zur Identifikation linearer Eingrößensysteme Testsignalfolgen aus Plackett-Burman-Plänen mit  $n = 8$  bis maximal  $n = 24$  völlig ausreichend sind. Handelt es sich allerdings um Systeme mit mehreren Eingängen bzw. um nichtlineare Systeme, können die hier angeführten Pläne mit  $n > 24$  zur Gewinnung von Testsignalfolgen herangezogen werden (s. auch Abschnitt 6.4.4.2). Der z.B. entsprechend Gl. (6.53) gültige Modellansatz für ein System mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen kann bei Verwendung eines Plackett-Burman-Plans mit  $n = 20$  Versuchen folgendermaßen dargestellt werden:

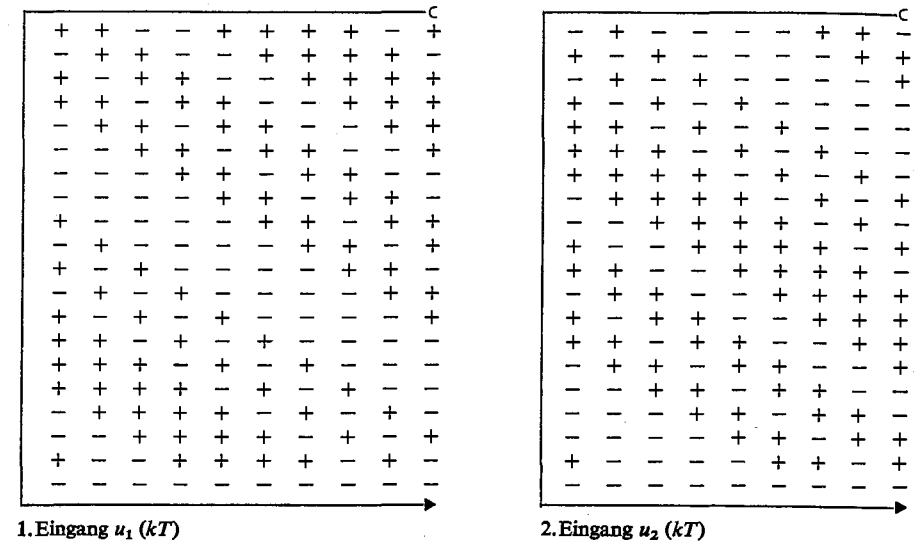
$$x_i(k) = T(g_{1i}(0)u_1(k) + \dots + g_{1i}(9)u_1(k-9) + g_{2i}(0)u_2(k) + \dots + g_{2i}(8)u_2(k-8)); \quad i = 1, 2. \quad (6.164)$$

In diesem Fall sind für die Stützstellen der ersten Gewichtsfunktion 10 Werte, insgesamt also 19 Werte zu schätzen. Der Plan mit  $n = 20$  Versuchen ist für die Schätzung von  $n - 1 = (m_{1i} + 1) + (m_{2i} + 1) = 19$  Werten ausgelegt. Tafel 6.6 stellt diesen Plan in einer Aufteilung dar, die für die Schätzung von  $10 + 9$  geeignet ist.

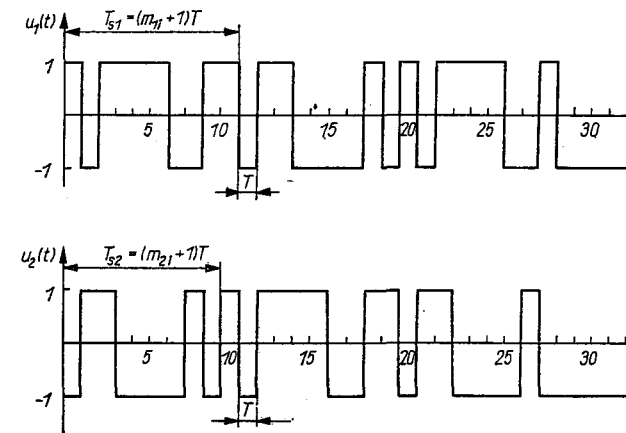
Gemäß den in Tafel 6.6 dargestellten Pfeilen werden die Testsignalfolgen für die beiden Eingänge gewonnen. Da die Folgen zu einem gemeinsamen Plan gehören, sind sie nicht miteinander korreliert und führen zu unabhängigen Schätzungen der Stützstellen der zwei Gewichtsfunktionen für den  $i$ -ten Ausgang, wobei gleichzeitig die Kriterien der  $D$ -,  $A$ - und  $G$ -Optimalität erfüllt werden. Bild 6.23 zeigt den Verlauf der beiden Testfolgen.

Sind die Übergangszeiten der beiden Strecken nicht etwa gleich groß, wie im Beispiel angenommen, steht natürlich eine andere Aufteilung des Versuchsplans offen. Nur die Gesamtanzahl der aufzuteilenden Stützstellen ist durch den Plan festgelegt. In analoger Weise können aus den größeren Plänen mit  $n = 24$  bis  $n = 84$  Versuchen auch für Sy-

**Tafel 6.6. Gewinnung von Testsignalfolgen aus einem Plackett–Burman-Plan mit  $n = 20$  für ein System mit zwei Eingängen**



steme mit  $l$  Ausgängen und  $r$  Eingängen Folgen erzeugt werden [5.46]. Bei einem ungünstigen Signal-Stör-Verhältnis wird zur Verbesserung der Schätzung eine mehrmalige Wiederholung der Versuche notwendig. Dann ist es vorteilhaft, entsprechend der Anzahl der Wiederholungen, den Plan ohne die negativen Zeilen zu realisieren und erst am Ende die negativen Zeilen anzuschließen.



**Bild 6.23**  
Optimale Testsignalfolgen  
aus einem  
Plackett-Burman-Plan  
mit  $n = 20$  für ein System  
mit zwei Eingängen

#### 6.4.4.2. Testsignalfolgen für das Volterra-Reihen-Modell 2. Ordnung

Die Regressionsansätze für das Volterra-Reihen-Modell entsprechend Gl. (6.13) bzw. Gl. (6.33) bei Hammerstein-Struktur und Gl. (6.43) bei Wiener-Struktur stellen Polynomansätze 2. Ordnung dar. Zur Versuchsplanung 2. Ordnung finden vor allem die im Abschnitt 5.5.3.2 beschriebenen zentral zusammengesetzten Mehrfaktorpläne Verwen-

dung. Auch für die im Abschnitt 5.5.3.4 genannten vereinfachten zentralen Versuchspläne nach *Hartley* ergeben sich beim Vergleich mit *D*-optimalen Plänen sehr gute Charakteristiken, obwohl bei Ansätzen höherer Ordnung die faktoriellen Versuchspläne i. allg. nicht *D*- und *G*-optimal sind. Bei der Untersuchung der Eignung Hartleyscher Pläne zur Gewinnung von Testsignalfolgen für das Volterra-Reihen-Modell konnte als wesentlicher Nachteil festgestellt werden, daß sie die für die Gewinnung von Testsignalfolgen notwendige Diagonalstruktur nicht aufweisen. Eine nachträgliche Diagonalisierung durch Einfügen von Zwischenversuchen führt zu einer wesentlichen Vergrößerung der Versuchszeit und verringert die Güte der Schätzung. Deshalb wurde die Strategie verfolgt, durch Erweiterung der Plackett-Burman-Pläne mit Sternpunkt- und Nullpunktversuchen zentral zusammengesetzte Pläne 2. Ordnung zu erstellen, die zur Gewinnung von Testsignalfolgen geeignet sind.

Da der Regressionsansatz für das Hammerstein-Modell keine Wechselwirkungen des Eingangssignals enthält, genügt auch eine einfachere Versuchsplanungsstrategie als für das Volterra-Reihen- bzw. Wiener-Modell. Deshalb soll eine getrennte Betrachtung für diese beiden Regressionsansätze erfolgen.

#### Testsignalfolgen für das Wiener-Modell

In der im Abschnitt 6.4.4.1 beschriebenen Form sind Plackett-Burman-Pläne zur Verwendung für Regressionsansätze 2. Ordnung ungeeignet, da sich Wechselwirkungen ergeben, die untereinander und auch von den Hauptwirkungen linear abhängig sein können. Durch Hinzufügen von Sternpunktversuchen könnte man zwar eine getrennte Schätzung der Koeffizienten bei den linearen Gliedern und den Wechselwirkungen erreichen, aber die zwischen den Wechselwirkungen vorhandenen Abhängigkeiten bleiben erhalten. Außerdem würden sich auch nach Hinzufügen der Sternpunkte unterbestimmte Informationsmatrizen  $I(V_n)$  ergeben, da die Anzahl der Versuchspunkte  $n$  von  $V_n$  geringer ist als die Anzahl der zu schätzenden Koeffizienten:

$$n < l = \binom{m+3}{2}. \quad (6.165)$$

Tafel 6.7. Plackett-Burman-Plan für  $n = 16$

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| +  | +  | +  | +  | -  | +  | -  | +  | +  | -   | -   | +   | -   | -   | -   |
| -  | +  | +  | +  | +  | -  | +  | -  | +  | +   | -   | -   | +   | -   | -   |
| -  | -  | +  | +  | +  | +  | -  | +  | -  | +   | +   | -   | -   | +   | -   |
| -  | -  | -  | +  | +  | +  | +  | -  | +  | -   | +   | +   | -   | -   | +   |
| +  | -  | -  | -  | +  | +  | +  | +  | +  | -   | +   | +   | -   | -   | -   |
| -  | +  | -  | -  | -  | +  | +  | +  | +  | -   | +   | -   | +   | +   | -   |
| -  | -  | +  | -  | -  | -  | +  | +  | +  | +   | -   | +   | -   | +   | +   |
| +  | -  | -  | +  | -  | -  | -  | +  | +  | +   | +   | -   | +   | -   | +   |
| +  | +  | -  | -  | +  | -  | -  | -  | +  | +   | +   | +   | -   | +   | -   |
| -  | +  | +  | -  | -  | +  | -  | -  | +  | +   | +   | +   | +   | -   | +   |
| +  | -  | +  | +  | -  | -  | +  | -  | -  | -   | +   | +   | +   | +   | +   |
| +  | +  | +  | -  | +  | -  | +  | -  | -  | +   | -   | -   | +   | +   | +   |
| +  | +  | +  | -  | +  | -  | +  | +  | -  | -   | +   | -   | -   | -   | +   |
| -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | -   | -   |

Deshalb müssen zur Schätzung der  $l$  Koeffizienten eines Polynomansatzes 2. Ordnung solche Plackett-Burman-Pläne verwendet werden, die nach Hinzufügen der Sternpunktversuche und eines Nullpunktversuchs mehr als  $\binom{m+3}{2}$  Versuchspunkte enthalten. Da in diesem Fall die Anzahl der Spalten des Versuchsplans die Anzahl der Einflußfaktoren übersteigt, besteht gleichzeitig die Möglichkeit, eine Auswahl von aufeinanderfolgenden Spalten, die auch für einen Regressionsansatz 2. Ordnung keine linearen Abhängigkeiten aufweisen, zu treffen.

Zur Illustration dieser Entwurfsstrategie soll ein Plan für  $m+1=6$  entworfen werden. Um alle Koeffizienten schätzen zu können, muß er aus einem Plackett-Burman-Plan mit  $n \geq l = \binom{m+3}{2} - (2m+3) = 15$  gewonnen werden. Als Beispiel soll ein Plan mit  $n = 16$  Versuchen entsprechend Tafel 6.7 betrachtet werden. Aus dem Plan in Tafel 6.7 werden sechs aufeinanderfolgende Spalten ausgewählt, wobei infolge der Struktur des

Tafel 6.8. Versuchsplan für  $m+1=6$ , erstellt aus einem Plackett-Burman-Plan mit  $n = 16$

| $u(k)$ | $u(k-1)$ | $u(k-2)$ | $u(k-3)$ | $u(k-4)$ | $u(k-5)$ |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|
| +      | -        | -        | -        | +        | +        |
| -      | +        | -        | -        | -        | +        |
| -      | -        | +        | -        | -        | -        |
| +      | -        | -        | +        | -        | -        |
| +      | +        | -        | -        | +        | -        |
| -      | +        | +        | -        | -        | +        |
| +      | -        | +        | +        | -        | -        |
| -      | +        | -        | +        | +        | -        |
| +      | -        | +        | -        | +        | +        |
| +      | +        | -        | +        | -        | +        |
| +      | +        | +        | -        | +        | -        |
| +      | +        | +        | +        | -        | +        |
| -      | +        | +        | +        | +        | -        |
| -      | -        | +        | +        | +        | +        |
| -      | -        | -        | +        | +        | +        |
| -      | -        | -        | -        | +        | +        |
| +      | -        | -        | +        | +        | +        |
| +      | +        | -        | +        | +        | -        |
| -      | +        | +        | +        | +        | +        |
| +      | -        | +        | +        | +        | +        |
| +      | +        | -        | +        | +        | +        |
| +      | +        | +        | -        | +        | +        |
| -      | -        | -        | -        | -        | -        |



Tafel 6.10 dargestellt. Die aus diesem Versuchsplan gewonnene Testfolge wird im Bild 6.25 gezeigt.

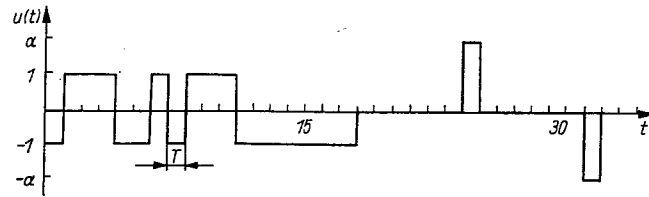


Bild 6.25  
Testfolge, die aus dem  
in Tafel 6.10  
dargestellten Versuchsplan  
abgeleitet wurde

Weitere Pläne mit einer größeren Zahl von Einflußfaktoren können auf analoge Weise aus den in Tafel 5.11 dargestellten Plackett–Burman-Plänen gewonnen werden. Außerdem können durch entsprechende Aufteilung größerer Plackett–Burman-Pläne Testsignalfolgen für Systeme mit mehreren Eingängen gewonnen werden (s. Abschn. 6.4.4.1), wobei alle Teilstrecken mit der gleichen Güte geschätzt werden [6.3].

Die aus Versuchsplänen gewonnenen Testfolgen weisen nicht die von den pseudozufälligen Testfolgen erfüllten umfassenden Frequenzeigenschaften auf. Sie zeigen bei bestimmten Frequenzen Einbrüche im Leistungsspektrum, so daß eine Annäherung an das weiße Rauschen nur mit Einschränkungen möglich ist. Ausführliche Untersuchungen haben jedoch gezeigt, daß es offensichtlich sogar besser ist, wenn das System mit wenigen, aber dominierenden Frequenzen in der Nähe seiner Eigenwerte angeregt wird als mit einer gleichmäßigen (aber damit amplitudenmäßig geringeren) Anregung über einen relativ großen Bereich [6.23, 6.25, 6.26]. Wenn die Einbrüche im Leistungsspektrum nicht in den dominierenden Frequenzbereichen liegen, dann haben die aus Plackett–Burman-Plänen gewonnenen Testfolgen auch bezüglich ihrer Frequenzeigenschaften keine Nachteile.

#### 6.4.4.3. Testsignalfolgen für lineare Differenzgleichungsmodelle

Bisher wurden zur Identifikation von Differenzgleichungsmodellen fast ausschließlich die im Abschnitt 6.4.2 beschriebenen pseudozufälligen Testfolgen (PRBS-Folgen) verwendet. Ihr Vorteil besteht in der Erzeugung bestimmter, durch die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum beschreibbarer Signaleigenschaften, die eine gute Annäherung an das weiße Rauschen ermöglichen.

Die im folgenden dargestellte Methode zur Erstellung von Testsignalfolgen geht dagegen wieder von der Verwendung optimaler Versuchspläne aus. Folgende Hypothese war dabei Ausgangspunkt zur Entwicklung sog. „voreingestellter“ Testfolgen [6.3]:

Die Erzeugung einer Diagonalstruktur mit optimalen Eigenschaften der Teilmatrix  $U^T U$  von

$$[M^T M] = \begin{bmatrix} U^T U & U^T X \\ X^T U & X^T X \end{bmatrix} \quad (6.166)$$

wirkt sich positiv auf die Beschaffenheit der gesamten Informationsmatrix aus. Eine optimale Gestaltung der Teilmatrix  $U$  im Sinne der optimalen Versuchsplanung bedeutet die Erfüllung solcher Kriterien, wie der  $D$ -,  $G$ -,  $E$ - oder  $A$ -Optimalität, bzw. solcher praktisch motivierter Kriterien, wie Drehbarkeit bzw. Orthogonalität. Bekannte Versuchspläne, die diese Kriterien erfüllen, sind die im Abschnitt 5.5.2 beschriebenen vollständigen faktoriellen Versuchspläne vom Typ  $2^k$  (VFV $2^k$ ) bzw. die teilweisen faktoriellen

Versuchspläne vom Typ  $2^{k-p}$  (TFV $2^{k-p}$ ). Zur Umwandlung dieser Versuchspläne in Testsignalfolgen ist es, wie bereits im Abschnitt 6.4.1 beschrieben, notwendig, durch Umordnung der Zeilen des Plans eine Diagonalstruktur zu schaffen. Die statistischen Eigenschaften der Pläne bleiben dabei unverändert.

Tafel 6.11. Vollständiger faktorieller  
Versuchsplan vom Typ  $2^3$

|   |   |   |
|---|---|---|
| + | + | + |
| + | + | - |
| + | - | + |
| + | - | - |
| - | + | + |
| - | + | - |
| - | - | + |
| - | - | - |

Tafel 6.12. Entnahme einer Testfolge aus einem  
diagonalisierten VFV  $2^3$

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| +        | +        | +        |
| $u(k-1)$ | $u(k-2)$ | $u(k-3)$ |
| -        | +        | +        |
| $u(k)$   | $u(k-1)$ | $u(k-2)$ |
| +        | -        | +        |
| $u(k+1)$ | $u(k)$   | $u(k-1)$ |
| -        | +        | -        |
| $u(k+2)$ | $u(k+1)$ | $u(k)$   |
| -        | -        | +        |
| $u(k+3)$ | $u(k+2)$ | $u(k+1)$ |
| -        | -        | -        |
| $u(k+4)$ | $u(k+3)$ | $u(k+2)$ |
| +        | -        | -        |
| $u(k+5)$ | $u(k+4)$ | $u(k+3)$ |
| +        | +        | -        |
| $u(k+6)$ | $u(k+5)$ | $u(k+4)$ |

Als Ausgangspunkt soll ein VFV $2^3$  verwendet werden, wie er in Tafel 6.11 dargestellt ist. Tafel 6.12 zeigt den in eine Diagonalstruktur übergeführten VFV $2^3$  mit der Teilmatrix  $U$ . Durch Aneinanderreihung mehrerer diagonalisierter Pläne entsteht die im Bild 6.26 dargestellte periodische Testfolge. Die verschiedenen Diagonalisierungsmöglichkeiten der VFV haben dabei keinen Einfluß auf die Güte der Schätzung.

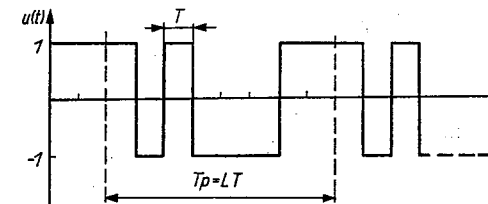


Bild 6.26  
Periodische Testfolge aus einem VFV  $2^3$

Zur Gewinnung von Testsignalfolgen mit größerer Periodenlänge können auch Versuchspläne mit einer größeren Zahl von Einflußfaktoren herangezogen werden.

Da in der Matrix  $M$  auch die zufallsbeeinflussten zurückliegenden Ausgangswerte enthalten sind, ist es nicht möglich, die Güte der Schätzung anhand von Funktionalen der Informationsmatrix zu beurteilen. Zum Vergleich der „voreingestellten“ Testfolgen mit den PRBS-Folgen wurde deshalb in [6.3] die MSE-Matrix (Mean-Square-Error-Matrix) herangezogen:

$$\text{MSE}(\hat{s}) = E\{(\hat{s} - s)(\hat{s} - s)^T\} = E\{[M^T M]^{-1} M^T n^* n^{*T} M [M^T M]^{-1}\}, \quad (6.167)$$

die bei unkorreliertem Fehler  $n^*$  die Kovarianzmatrix des geschätzten Parametervektors  $\hat{s}$  darstellt. Bei korreliertem Fehler  $n^*$  enthält sie außerdem auch den durch die Verschiebung hervorgerufenen Anteil der Schätzung, die sog. Biasmatrix (s. Abschn. 6.3.1). Ausführliche Untersuchungen an simulierten Beispielen [6.26] haben gezeigt, daß bezüglich von Funktionalen, wie der Determinante und der Spur der MSE-Matrix, die Verwendung der aus optimalen Versuchsplänen gewonnenen Testsignalfolgen zu ähnlichen Ergebnissen führt wie die Verwendung von PRBS-Folgen. Sie stellen somit eine echte Alternative zu den bisher am häufigsten verwendeten PRBS-Folgen dar.

Auf weitere Methoden zur Erstellung von Testsignalfolgen für das Differenzengleichungsmodell soll hier nicht näher eingegangen werden, da Vergleiche gezeigt haben, daß sie zu keiner besseren Schätzgüte führen als die PRBS- bzw. voreingestellten Testfolgen [6.12, 6.3].

#### 6.4.4.4. Testsignalfolgen für nichtlineare Differenzgleichungsmodelle

Auch für einfache nichtlineare Systeme mit Hammerstein-Struktur (Nichtlinearität 2. Ordnung) wurden außer den bereits beschriebenen mehrstufigen pseudozufälligen Testfolgen eine Reihe anderer Möglichkeiten getestet [6.3, 6.25]. Zur Beurteilung der Schätzgüte wurden dabei die für lineare Differenzgleichungsmodelle verwendeten Gütekriterien herangezogen. Dabei hat sich gezeigt, daß nur die für das Hammerstein-Modell (bei Stützstellenbeschreibung der Volterra-Kerne) aus Plackett-Burman-Plänen abgeleiteten Testsignalfolgen (s. Abschn. 6.4.4.2) ähnlich gute Schätzergebnisse zeigen wie die PRBS-Folgen. Da jedoch für das Hammerstein-Modell eine wesentlich stärkere Parameterabhängigkeit der Schätzgüte festzustellen war als für lineare Modelle, können keine allgemeingültigen Aussagen getroffen werden. Der durchgeführte Vergleich verschiedener Arten von Testfolgen läßt jedoch die Aussage zu, daß die fünfwertigen pseudozufälligen Folgen bezüglich der erreichbaren Schätzgüte und des zu ihrer Erzeugung notwendigen Aufwands für diese Modellklasse ohne Alternative sind [6.3, 6.25].

## 6.5. Schätzung des Zustands/Zustandsfilter

### 6.5.1. Aufgabe und Voraussetzungen

Die im Abschnitt 4.4 vorgenommenen Betrachtungen wurden unter der Annahme eines ungestörten Systems durchgeführt. Es wurde gezeigt, daß die Beobachter für die Ermittlung des Zustands gestörter und zeitvarianter Systeme ungeeignet sind. In den folgenden Abschnitten soll auf die Ermittlung des Zustandsvektors eines linearen Systems eingegangen werden, das durch Störungen auf die Zustands- und Ausgangsgrößen gekennzeichnet ist. Wenn die Beobachtung der Zustände mit statistischen Methoden erfolgt, wird von einer Filterung gesprochen. Damit stellt die Filterung die Verallgemeinerung der im Abschnitt 4.4 behandelten Beobachteraufgabe dar.

In Fortsetzung der Arbeiten von Wiener [6.31] zum Entwurf optimaler Filter hat Kalman [6.32, 6.33] zur Schätzung der Zustände linearer Systeme einen rekursiven Filteralgorithmus in Form eines Differenzgleichungssystems entworfen. Wegen seiner Allgemeingültigkeit und großen Praxisrelevanz wird in den weiteren Ausführungen nur auf die zeitdiskrete Betrachtungsweise näher eingegangen [3.24, 4.14]. Der Entwurf von Filtern für die kontinuierliche Betrachtungsweise wurde von Kalman und Bucy in [6.33] vorgestellt und in der Spezialliteratur [4.14] ausführlich betrachtet.

Bei der Ableitung der Filtergleichungen für den Zustandsvektor  $q$  wird von der Beschreibung für die zeitdiskreten Größen im Abschnitt 4.4 ausgegangen (Bild 6.27):

$$\begin{aligned} q(k+1) &= A^* q(k) + B^* u(k) + v(k) \\ x(k) &= C^* q(k) + z(k). \end{aligned} \quad (6.168)$$

Ferner wird für die Störungen  $v_i(k)$  auf die Zustandsgrößen und  $z_i(k)$  auf die Ausgangsgrößen angenommen, daß sie folgende Eigenschaften haben:

$$a) \quad E\{v(k)\} = 0, \quad E\{v(k) v(k)^T\} = V(k) \quad (6.169)$$

mit

$$V(k) = E \left\{ \begin{bmatrix} v_1(k) & v_1(k) & \dots & v_1(k) & v_n(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_n(k) & v_1(k) & \dots & v_n(k) & v_n(k) \end{bmatrix} \right\};$$

$$b) \quad E\{z(k)\} = 0, \quad E\{z(k) \cdot z(k)^T\} = Z(k)$$

mit

$$Z(k) = E \left\{ \begin{bmatrix} z_1(k) & z_1(k) & \dots & z_1(k) & z_m(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_m(k) & z_1(k) & \dots & z_m(k) & z_m(k) \end{bmatrix} \right\};$$

$$c) \quad E\{v_i(k) v_i(k-l)\} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

$$E\{z_i(k) z_i(k-l)\} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Außerdem wird vorausgesetzt, daß die Systemmatrizen  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  bekannt sind und mindestens  $n$  Meßwerte der Eingangsgrößen  $u_i(k)$  und der Ausgangsgrößen  $x_i(k)$  über einen Beobachtungszeitraum vorliegen.

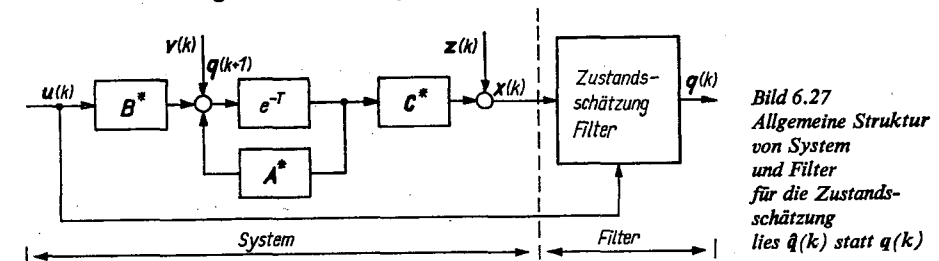


Bild 6.27  
Allgemeine Struktur  
von System  
und Filter  
für die Zustands-  
schätzung  
lies  $\hat{q}(k)$  statt  $q(k)$

Auf der Grundlage der in den Gln. (6.168) und (6.169) gemachten Annahmen und der vorliegenden Beobachtungen der Eingangs- und Ausgangsgrößen wird eine Schätzvorschrift (ein Filter) gesucht, die den Zustandsfehler

$$\tilde{q}(k) = q(k) - \hat{q}(k) \quad (6.170)$$

über ein Gütekriterium minimiert (s. Bild 6.27). Von der Vielzahl der möglichen Wege zur Herleitung der Filtergleichungen wird in Anlehnung an [4.14] die Anwendung der Methode der verallgemeinerten Regression gewählt, weil sie die vorhandene A-priori-Information über die Störungen berücksichtigt sowie eine Ableitung in wenigen Schritten gestattet und weil die Theorie dieser Methode bereits im Abschnitt 5.2.4 vorgestellt wurde. Weitere Möglichkeiten zur Ableitung der Filtergleichungen sind in [4.14] enthalten.

Das Ziel der folgenden Abschnitte besteht darin, ausgehend von dem Gütekriterium der verallgemeinerten Regression

$$Q = e^T W^{-1} e \quad (6.171)$$

und der Schätzvorschrift

$$\hat{s} = [M^T W^{-1} M]^{-1} M^T W^{-1} x, \quad (6.172)$$

die Beziehungen für die Schätzung der Zustandsgrößen herzuleiten. Dazu ist es notwendig, die Zustandsbeschreibungen umzuformen in eine Gleichung der Form

$$x^* = M^* s + n^*. \quad (6.173)$$

### 6.5.2. Zustandsschätzung aus den gemessenen Ausgangsgrößen des Systems

Wird davon ausgegangen, daß auf das System keine Eingangsgrößen  $u_i(k)$  wirken, gilt folgende Systembeschreibung:

$$q(k+1) = A^* q(k) + v(k) \quad (6.174)$$

$$x(k) = C^* q(k) + z(k).$$

Zur Schätzung der Zustandsgrößen stehen damit die abgetasteten Werte der Ausgangsgrößen  $x_i(k)$  und als A-priori-Information die Kovarianzmatrizen  $V$  der Störungen auf die Zustandsgrößen und  $Z$  der Störungen auf die Ausgangsgrößen zur Verfügung.

Bei der Herleitung der Gleichungen für die Anwendung der Markov-Schätzung wird davon ausgegangen, daß zum  $k$ -ten Zeitpunkt der geschätzte Zustandsvektor  $\hat{q}(k)$  und die Kovarianzmatrix des Zustandsfehlers

$$\tilde{P}(k) = E\{\tilde{q}(k) \tilde{q}(k)^T\} \quad (6.175)$$

bekannt sind. Aus Gl. (6.174) erhält man den extrapolierten Zustandsvektor  $q^*(k+1)$  mit diesen Informationen zu

$$q^*(k+1) = A^* \hat{q}(k). \quad (6.176)$$

Der extrapolierte Zustand enthält die gesamte alte Information über den zu erwartenden Zustand  $q(k+1)$ . Wird in Gl. (6.176) entsprechend Gl. (6.170) die Beziehung für den geschätzten Zustand  $\hat{q}(k)$  eingesetzt, gilt

$$q^*(k+1) = A^* q(k) - A^* \tilde{q}(k). \quad (6.177)$$

Bei Verwendung der Beziehungen von Gl. (6.174) ergibt sich

$$q^*(k+1) = q(k+1) - (A^* \tilde{q}(k) + v(k)). \quad (6.178)$$

In Gl. (6.178) ist der *Extrapolationsfehler*

$$\tilde{q}^*(k+1) = A^* \tilde{q}(k) + v(k)$$

enthalten, dessen Kovarianzmatrix  $Q(k+1)$  unter den angenommenen Voraussetzungen für die Störungen folgende Gestalt hat:

$$Q(k+1) = E\{\tilde{q}^*(k+1) \tilde{q}^{*T}(k+1)\} = A^* \tilde{P}(k) A^{*T} + V(k). \quad (6.179)$$

Zum  $(k+1)$ -ten Zeitpunkt kommt in Form der Ausgangsgleichung

$$x(k+1) = C^* q(k+1) + z(k+1) \quad (6.180)$$

ein weiterer Gleichungssatz zur Schätzung der Zustandsgrößen hinzu. Damit gilt mit Gl. (6.178) folgendes Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q^*(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix}}_{x^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ C^* \end{bmatrix}}_{M^*} \underbrace{q(k+1)}_s + \underbrace{\begin{bmatrix} -A^* q(k) - v(k) \\ z(k+1) \end{bmatrix}}_{n^*}. \quad (6.181)$$

Die Systembeschreibung ist somit entsprechend der Zielstellung durch

$$x^* = M^* s + n^* \quad (6.182)$$

gegeben. Wird als Modellgleichung zum  $(k+1)$ -ten Schritt

$$\hat{x}^* = M^* \hat{s} \quad (6.183)$$

verwendet, ergeben sich mit der Fehlergleichung

$$e = x^* - \hat{x}^*$$

für die Komponenten des Fehlervektors

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

mit

$$e_1 = [q^*(k+1) - \hat{q}(k+1)], \quad e_2 = [x(k+1) - \hat{x}(k+1)].$$

Die Kovarianzmatrix des Störungsvektors  $n^*$  erhält man aus Gl. (6.181) zu

$$W = E\{n^* n^{*T}\} = \begin{bmatrix} Q(k+1) & 0 \\ 0 & Z(k+1) \end{bmatrix}. \quad (6.184)$$

Damit ergibt sich für das Gütekriterium der verallgemeinerten Regression entsprechend Gl. (6.171) für diesen Modelltyp

$$Q = e_1^T Q^{-1}(k+1) e_1 + e_2^T Z^{-1}(k+1) e_2. \quad (6.185)$$

Werden die Beziehungen für die einzelnen Komponenten der Fehlervektoren in Gl. (6.185) eingesetzt, gilt

$$Q = [q^*(k+1) - \hat{q}(k+1)]^T Q^{-1}(k+1) [q^*(k+1) - \hat{q}(k+1)] + [x(k+1) - \hat{x}(k+1)]^T Z^{-1}(k+1) [x(k+1) - \hat{x}(k+1)]. \quad (6.186)$$

Durch Ausmultiplizieren und Bildung der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{q}(k+1)} = 0 \quad (6.187)$$

erhält man nach einigen Umformungen [4.14] die Vorschrift für den *Kalmanschen Filteralgorithmus* zu

$$\hat{q}(k+1) = A^* \hat{q}(k) + K(k+1) [x(k+1) - C^* A^* \hat{q}(k)] \quad (6.188)$$

mit

$$K(k+1) = Q(k+1) C^{*T} [Z(k+1) + C^* Q(k+1) C^{*T}]^{-1}$$

$$Q(k+1) = A^* \tilde{P}(k) A^{*T} + V(k).$$

Die Kovarianzmatrix  $\tilde{P}(k)$  des Zustandsfehlers  $\tilde{q}(k)$  kann mit den Beziehungen für die Parametervarianzen der verallgemeinerten Regression entsprechend Abschnitt 5.2.4

$$\tilde{P}(k) = E \{ \tilde{q}(k) \tilde{q}^T(k) \} = [M^* W^{-1} M^*]^{-1} \quad (6.189)$$

und unter Beachtung der Bedeutungen der Matrizen  $M^*$  – s. Gl. (6.182) – und  $W^{-1}$  – s. Gl. (6.184) – rekursiv nach folgender Vorschrift ermittelt werden:

$$\tilde{P}(k) = \begin{bmatrix} [I \mid C^T] \begin{bmatrix} Q^{-1}(k) & 0 \\ 0 & Z^{-1}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ C^* \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\tilde{P}(k) = [Q^{-1}(k) + C^{*T} Z^{-1}(k) C^*]^{-1}. \quad (6.190)$$

Unter Anwendung des Inversionslemmas für Matrizen (s. Abschn. 5.4.3) kann Gl. (6.190) wiederum in die rekursive

$$\tilde{P}(k) = Q(k) - K(k) C^* Q(k) \quad (6.191)$$

übergeführt werden. Damit sind alle Gleichungen für die Lösung der Schätz Aufgabe erstellt. Die Struktur des Filters ist im Bild 6.28 dargestellt.

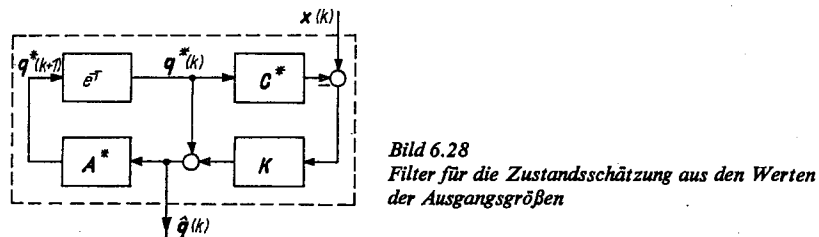


Bild 6.28  
Filter für die Zustandsschätzung aus den Werten der Ausgangsgrößen

### 6.5.3. Zustandsschätzung aus den gemessenen Eingangs- und Ausgangsgrößen des Systems

In Erweiterung der Betrachtungen im Abschnitt 6.5.2 wird jetzt davon ausgegangen, daß Meßwerte der Eingangsgrößen  $u_i(k)$  zur Lösung der Schätz Aufgabe zur Verfügung stehen. Damit kann die in Gl. (6.168) angegebene Systembeschreibung verwendet werden. Analog zu den Ableitungen im Abschnitt 6.5.2 erhält man als rekursive Schätzvorschrift die Beziehung

$$\hat{q}(k+1) = A^* \hat{q}(k) + B^* u(k) + K(k+1) [x(k+1) - C^* (A^* \hat{q}(k) + B^* u(k))] \quad (6.192)$$

mit den Berechnungsvorschriften der Matrizen  $K(k+1)$ ,  $Q(k+1)$  und  $\tilde{P}(k)$  entsprechend den Beziehungen Gl. (6.188). Die Struktur dieses Filters ist im Bild 6.29 dargestellt. Bei diesem Filter sind die Ausdrücke

$$A^* \hat{q}(k) + B^* u(k)$$

die extrapolierten Zustände  $q^*(k+1)$ ,  
die beobachteten extrapolierten Zustände,

$$C^* [A^* \hat{q}(k) + B^* u(k)]$$

$$x(k+1) - C^* A^* \hat{q}(k) - C^* B^* u(k)$$

die Fehler zwischen gemessenen und vorhergesagten Werten der Ausgangsgrößen.

Wie bei allen rekursiven Schätzalgorithmen besteht ein Problem in der Festlegung der Startwerte  $\hat{q}(0)$  der Zustände und  $\tilde{P}(0)$  der Kovarianzmatrix des Zustandsfehlers.

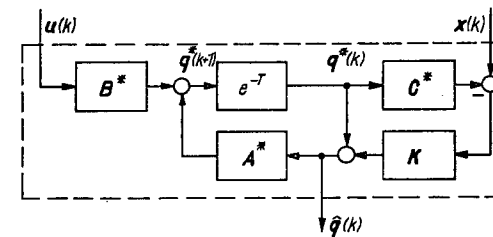


Bild 6.29  
Filter für die Zustandsschätzung aus den Werten der Eingangs- und Ausgangsgrößen

Liegen bereits  $l \geq n$  Beobachtungen der Ausgangsgrößen vor, können durch eine Anwendung der direkten Regression die Startwerte ermittelt werden. Wird von der Systembeschreibung

$$q(k+1) = A^* q(k), \quad x(k) = C^* q(k) + z(k) \quad (6.193)$$

ausgegangen, so kann die Zustandsgleichung für  $l$  Beobachtungen umgeformt werden in

$$\begin{aligned} q(k) &= A^{*-1} q(k+1) \\ &\vdots \\ q(k+l-1) &= A^{*-(l-1)} q(k+1). \end{aligned} \quad (6.194)$$

Werden die gewonnenen  $l$  Gleichungen in die Ausgangsbeziehung von Gl. (6.168) eingesetzt, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x(k) &= C^* A^{*-1} q(k+1) + z(k) \\ &\vdots \\ x(k+l-1) &= C^* A^{*-(l-1)} q(k+1) + z(k+l-1). \end{aligned} \quad (6.195)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_x \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{M^*} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_q \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_z$

Für den Parametervektor  $q$  des Gleichungssystems

$$x = M^* q + z$$

ergibt sich die Schätzvorschrift zu

$$\hat{q} = [M^{*T} M^*]^{-1} M^{*T} x \quad (6.196)$$

mit

$$\tilde{P} = [M^{*T} M^*]^{-1}.$$

|                 |                                                                       |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Beispiel<br>6.6 | Untersuchung des Verhaltens des Kalman-Filters<br>(diskontinuierlich) |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------|

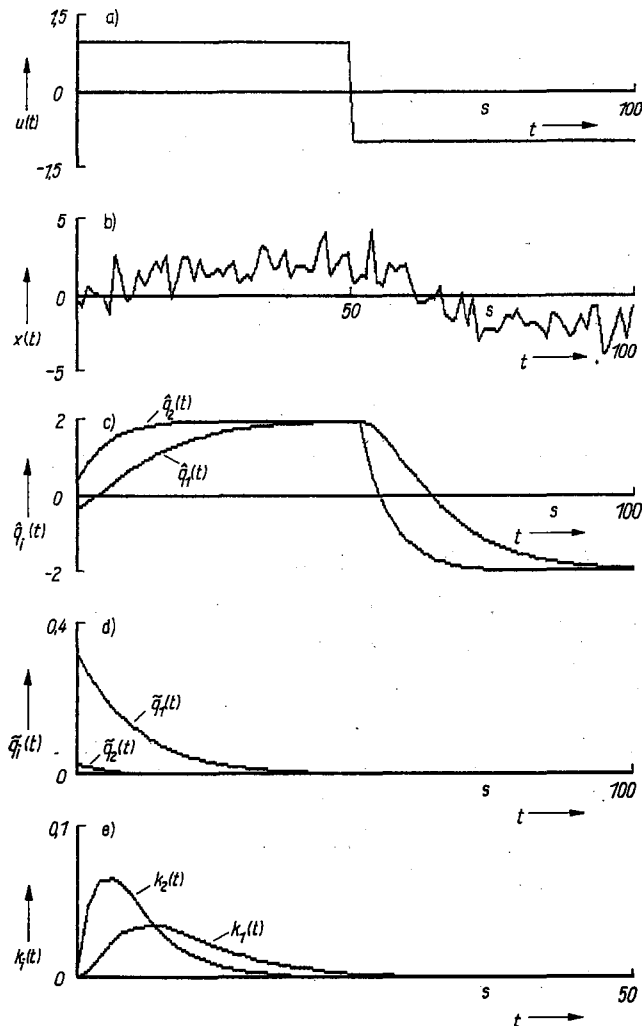
**Gegeben:** Abgetastete Werte der Eingangs- und Ausgangssignale des Systems gemäß Beispiel 4.1, Zustandsgleichungen mit

$$q_1(t) \triangleq x(t), \quad q_2(t) \triangleq x'(t),$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 \text{ s}^{-1} & 0,1 \text{ s}^{-1} \\ 0 & -0,2 \text{ s}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4 \text{ s}^{-1} \end{bmatrix} u(t),$$

$$x(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + z(t).$$

Die Störung ist normalverteilt NV(0, ...) und unkorreliert.



|                 |                                                                       |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Beispiel<br>6.6 | Untersuchung des Verhaltens des Kalman-Filters<br>(diskontinuierlich) |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------|

Abtastzeit  $T = 1 \text{ s}$ ,  
 Beobachtungszeit  $T_0 = 100 \text{ s}$ ,  
 Startwerte  $\hat{q}(0) = [-0,353; -0,033]$ ,  

$$\tilde{P}(0) = \begin{bmatrix} 0,0089 & -0,094 \\ -0,094 & 0,991 \end{bmatrix}.$$

**Gesucht:** Verlauf der Zustandsfehler  $\tilde{q}_i(k)$ ,  $i = 1, 2$ , und der Elemente der Verstärkungsmatrix  $K(k+1)$ .

**Ergebnis:** 1. Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgröße des Systems (Bild a und b),  
 2. Verlauf der geschätzten Zustandsgrößen  $\hat{q}_i(k)$  (Bild c),  
 3. Verlauf der Zustandsschätzfehler  $\tilde{q}_i(k)$  (Bild d),  
 4. Verlauf der Elemente der Verstärkungsmatrix  $K(k+1)$  (Bild e).

Die dargestellten Verläufe der Zustandsfehler  $\tilde{q}_i(k)$  zeigen, daß die Schätzung schnell konvergiert und beide Zustandsgrößen trotz der Ausgangsstörung gut ermittelt werden können. Im Gegensatz zu den konstanten Elementen der Verstärkungsmatrix beim Beobachter sind diese beim Kalman-Filter eine Funktion der Beobachtungen.

Die erhaltenen Schätzungen  $\hat{q}$  und  $\tilde{P}$  werden als Startvektor  $\hat{q}(0)$  bzw. Startmatrix  $\tilde{P}(0)$  in Gl. (6.192) und Gl. (6.188) eingesetzt.

Liegen keine Anfangsschätzungen für die Startwerte vor, so können analog zur Vorgehensweise bei der Methode der rekursiven Regression (s. Abschn. 5.4.3) folgende Startwerte verwendet werden:

$$\hat{q}(0) = 0; \quad \tilde{P}(0) = cI \quad \text{mit} \quad 10^4 \leq c \leq 10^{15}.$$

Das Konvergenzverhalten ist bei dieser Wahl der Startwerte gut und weist grundsätzlich die Eigenschaften der im Abschnitt 5.2 diskutierten Verfahren auf.

Im Beispiel 6.6 ist der Verlauf der Zustandsschätzung für ein gestörtes  $T_2$ -System dargestellt. Sehr gut ist das Konvergenzverhalten der Schätzung und die Entwicklung der Elemente der Verstärkungsmatrix  $K(k+1)$  zu erkennen. Die entworfenen beiden Varianten der Filter von Gl. (6.188) und Gl. (6.192) liefern Zustandsschätzungen mit einer minimalen mittleren quadratischen Abweichung der Ausgangsgrößen und einer minimalen Streuung für die geschätzten Zustände. Die Kalman-Filter in der angegebenen Form passen sich Zustandsänderungen an, solange die Elemente der Verstärkungsmatrix  $K(k+1)$  nicht konvergiert sind. Um dieses Konvergieren zu vermeiden, kann im Filteralgorithmus analog zu den Betrachtungen im Abschnitt 5.4.3 eine geeignete konstante Matrix in jedem Abtastzeitpunkt hinzugefügt werden.

Liegen keine A-priori-Informationen über die Kovarianzmatrizen  $V$  und  $Z$  vor, kann die Schätzung des Zustands unter der Annahme, daß die Störungen auf die Zustandsgrößen  $v_i(k) = 0$  und die Störungen auf die Ausgangsgrößen  $z_i(k)$  statistisch unabhängig sind, begonnen werden. Die Gleichungen für das Kalman-Filter (6.188) und (6.192) gehen dann in die der rekursiven Regression über.

Auf die Behandlung der Zustandsschätzung bei nichtlinearen Systemen, bei korrelierten Störungen und bei einer kontinuierlichen Betrachtungsweise wird an dieser Stelle verzichtet. Diese Probleme sind in der recht umfangreichen Literatur dargestellt [3.24, 4.14, 6.34].

## 6.6. Ausgewählte Probleme der Schätzung dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt soll auf einige Probleme der Bildung von Modellen dynamischer Systeme hingewiesen werden, die bei der Lösung von praktischen Aufgaben von Bedeutung sind. Dies betrifft Fragen der Parameterschätzung in geschlossenen Ketten, der von Mehrgrößensystemen sowie die Strukturprüfung und die Wahl einer geeigneten Abtastzeit  $T$ .

### 6.6.1. Parameterschätzung in geschlossenen Ketten

Alle bisher vorgestellten Parameterschätzverfahren sind davon ausgegangen, daß keine Rückführung zwischen dem Ausgang und dem Eingang des Systems besteht. Viele reale Prozesse existieren jedoch als rückgekoppelte Systeme. Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit, der Stabilität oder der Funktionsfähigkeit ist häufig ein Auftrennen der Rückführungen nicht möglich. Eine Nichtbeachtung führt jedoch in der Regel zu falschen Modellen für das System. Die Ursache liegt darin, daß durch die Rückführung der gestörten Ausgangsgröße (z.B. durch einen Regler auf den Eingang des Systems) die Eingangsgröße  $u(t)$  mit der Störung  $z(t)$  korreliert ist (Bild 6.30). Damit wird eine wesentliche Bedingung für die Identifizierbarkeit des Systems verletzt.

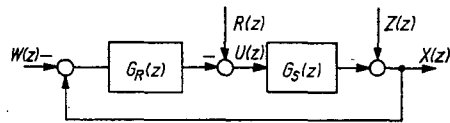


Bild 6.30  
Struktur des geschlossenen Regelkreises

Nach den in den letzten Jahren durchgeführten umfangreichen Untersuchungen zu diesem Problem [1.40, 1.52, 6.10, 6.35 bis 6.49] ist das System u. a. identifizierbar, wenn

1. zwischen den Meßorten des Eingangs- und des Ausgangssignals keine Störung auftritt,
2. ein zusätzliches Testsignal  $r(t)$ , das mit der Störung  $z(t)$  unkorreliert ist, auf den Kreis aufgeprägt werden kann – es kann auch die Führungsgröße  $w(t)$  verwendet werden,
3. das Übertragungsverhalten des Reglers  $G_R$  bekannt ist,
4. zwischen verschiedenen Reglern umgeschaltet werden kann,
5. bestimmte Bedingungen zwischen den Ordnungen der Regelstrecke und des Reglers eingehalten werden.

Als prinzipielle Vorgehensweisen wurden die sog. indirekten und direkten Methoden entwickelt.

Bei den *indirekten Methoden* wird das nichtparametrische oder das parametrische Modell ermittelt in den Stufen

- Schätzung des Gesamtübertragungsverhaltens  $G$  der geschlossenen Kette
- Berechnung des Systemübertragungsverhaltens  $G_S$  aus  $G$  und bekanntem  $G_R$ .

Außer diesen beiden Methoden wurde speziell für geschlossene Ketten die sog. „Verbundprozeßmethode“ entworfen [6.38]. Sie wird an dieser Stelle nicht weiter betrachtet.

Unter den oben genannten Bedingungen ergibt sich im Fall einer zeitdiskreten Betrachtungsweise und der im Bild 6.30 dargestellten Struktur die Beziehung

$$X(z) = \frac{G_S(z)}{1 + G_R(z) G_S(z)} R(z) + \frac{1}{1 + G_R(z) G_S(z)} Z(z). \quad (6.197)$$

Diese Gleichung kann in die Struktur einer offenen Kette entsprechend Bild 6.31 umgeformt werden, so daß für das Verhalten des geschlossenen Kreises bezüglich der Eingangsgröße  $R(z)$  gilt

$$G(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{G_S(z)}{1 + G_R(z) G_S(z)}. \quad (6.198)$$

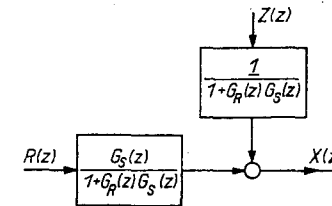


Bild 6.31  
Umgeformte offene Struktur des Regelkreises von Bild 6.30

Aus der mit einem Schätzverfahren (z.B. mit der rekursiven Hilfsvariablenschätzung) ermittelten Übertragungsfunktion  $\hat{G}(z)$  kann dann unter Verwendung der bekannten Reglerübertragungsfunktion  $G_R(z)$  durch Rückrechnung die gesuchte diskrete Übertragungsfunktion

$$\hat{G}_S(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1 - G_R(z) \hat{G}(z)} \quad (6.199)$$

gewonnen werden.

Dem Vorteil der Anwendbarkeit aller Schätzverfahren, die für die offene Kette geeignet sind, stehen der numerische Aufwand und Konvergenzprobleme als Nachteile entgegen [6.36, 6.37].

Die *direkten Methoden* bestimmen unmittelbar aus den Eingangssignalen  $u(t)$  bzw.  $r(t)$  oder  $w(t)$  und dem Ausgangssignal parametrische oder nichtparametrische Modelle. Als Methoden haben sich u. a. das Korrelationsverfahren [1.40] und die Parameterschätzverfahren der Regression, der verallgemeinerten Regression sowie der Hilfsvariablenschätzung bewährt [1.52, 6.37]. Beim Korrelationsverfahren werden die beiden Signale  $u(t)$  und  $x(t)$  mit dem zusätzlich auf den geschlossenen Kreis aufgeprägten Signal  $r(t)$  bzw.  $w(t)$  korreliert. Für den Fall  $r(t) = 0$  und  $w(t) \neq 0$  gilt

$$R_{wu}(\tau) = \int_0^\infty g_{wu}(t) R_{ww}(\tau - t) dt \quad (6.200)$$

$$R_{wx}(\tau) = \int_0^\infty g_{wx}(t) R_{ww}(\tau - t) dt.$$

Durch Anwendung der Fourier-Transformation ergeben sich die Leistungsspektren zu

$$S_{wu}(\omega) = G_{wu}(j\omega) S_{ww}(\omega) \quad (6.201)$$

$$S_{wx}(\omega) = G_{wx}(j\omega) S_{ww}(\omega).$$

Für die Frequenzgänge in Gl. (6.201) gilt mit der Struktur von Bild 6.30

$$G_{wu}(j\omega) = \frac{G_R(j\omega)}{1 + G_R(j\omega) G_S(j\omega)} \quad (6.202)$$

$$G_{wx}(j\omega) = \frac{G_R(j\omega) G_S(j\omega)}{1 + G_R(j\omega) G_S(j\omega)}.$$

Damit ergibt sich der gesuchte Frequenzgang  $\hat{G}_s(j\omega)$  aus

$$\hat{G}_s(j\omega) = \frac{\hat{G}_{wx}(j\omega)}{\hat{G}_{wu}(j\omega)} = \frac{\hat{S}_{wx}(j\omega)}{\hat{S}_{wu}(j\omega)}. \quad (6.203)$$

Bei den Parameterschätzverfahren hat sich ähnlich wie bei der Identifikation in der offenen Kette die Hilfsvariablenschätzung als sehr leistungsfähig erwiesen [6.40]. Auf ihre Anwendung soll deshalb kurz eingegangen werden. Angenommen wird, daß für die abgetasteten Signale im Bild 6.30 gilt

$$r(k) \neq 0, \quad w(k) = 0, \quad z(k) \neq 0.$$

Bei der Anwendung dieser Methode zur Schätzung rückgekoppelter Systeme muß ein Vektor der Hilfsvariablen  $h(k)$  aufgebaut werden, bei dem außer den mit der Störung  $z(k)$  korrelierten Ausgangssignalwerten  $x(k)$  auch die über die Rückführung mit der Störung  $z(k)$  korrelierten Eingangssignalwerte  $u(k)$  ersetzt werden müssen. Nach einem Vorschlag in [6.37] werden abgetastete Werte des aufgeprägten Signals  $r(k)$  als erster Teil des Vektors der Hilfsvariablen verwendet. Die für das Ausgangssignal  $x(k)$  eingesetzten Werte  $\hat{x}_H(k)$  werden in diesem speziellen Fall über das Hilfsmodell

$$\hat{X}(z) = \frac{\hat{B}_H(z^{-1})}{\hat{A}_H(z^{-1})} R(z)$$

ermittelt. Damit hat der Vektor der Hilfsvariablen folgendes Aussehen:

$$h^T(k) = [-\hat{x}_H(k-1) \dots -\hat{x}_H(k-m); r(k-1) \dots r(k-m)]. \quad (6.204)$$

Umfangreiche Untersuchungen in [6.36, 6.37, 6.38] haben gezeigt, daß die direkten den indirekten Methoden überlegen sind. Wenn die genannten Bedingungen an die Identifizierbarkeit gegeben sind, liefert die Parameterschätzung in offener und geschlossener Kette nahezu gleichwertige Ergebnisse [6.36, 6.42].

Weiterführende und vertiefende Betrachtungen zu diesem Problem sind in [6.10, 6.36 bis 6.40] zu finden.

## 6.6.2. Verfahren zur Strukturprüfung

Die Ermittlung der Ordnung des Modells ist, wenn keine A-priori-Informationen aus der theoretischen Prozeßanalyse vorliegen, eine weitere schwierig zu lösende Aufgabe. Wie bereits im Abschnitt 1.3 und in den jeweiligen Abschnitten zur Ermittlung von Signal- und Systemmodellen erwähnt, geht es darum, die wesentlichen Eigenschaften der Signale und der Systeme durch Modelle mit einer minimalen Ordnung abzubilden. Zur Ermittlung dieser auch als „Modelle optimaler Kompliziertheit“ bezeichneten Signal- oder Systemmodelle dienen Strukturprüfungsverfahren. Aus der Vielfalt der entworfenen Verfahren werden im Rahmen dieses Buches nur diejenigen kurz vorgestellt, die auf einer Bewertung des Ausgangsfehlers oder auf einer Analyse der diskreten Übertragungsfunktion beruhen. Weiterführende Untersuchungen sind [1.50, 1.52, 6.43] zu entnehmen.

### Verfahren zur Bewertung des Ausgangsfehlers

Auf der Basis des gemessenen und des geschätzten Ausgangssignals  $x(k)$  und  $\hat{x}(k)$  wurden sehr einfache und effektive Strukturprüfungsverfahren entworfen.

**Signalfehler-test.** Beim Signalfehler-test wird entsprechend der Beziehung

$$e(k, \hat{n}) = x(k) - \hat{x}(k, \hat{n}) \quad (6.205)$$

für die verschiedenen geschätzten Modellordnungen  $\hat{n}_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, \hat{n}_{\max}$ , durch einen optischen Vergleich der Signalverläufe (z. B. Übergangsfunktion, Gewichtsfunktion) die wahrscheinlichste Modellordnung bestimmt. Dieses Verfahren kann nur bei ungestörten Systemen angewendet werden.

**Fehlerfunktionstest.** Beim Fehlerfunktionstest wird die Reststreuung (s. Abschn. 5.2.2) als Kriterium zur Auswahl der Modellordnung benutzt. Damit gilt

$$s_R^2(\hat{n}) = \frac{1}{m-l} \sum_{i=1}^m [x(i) - \hat{x}(i, \hat{n})]^2. \quad (6.206)$$

Die wahrscheinlichste Modellordnung ist vorhanden, wenn die Reststreuung minimal ist.

**F-Test.** Durch einen Vergleich der Reststreuung für verschiedene Modellordnungen  $\hat{n}_i$  mit der geschätzten Streuung  $s_x^2$  – s. Abschnitt 5.5.2, Gln. (5.146) bis (5.148) – kann über den F-Test

$$F = \frac{s_R^2(\hat{n})}{s_x^2} \quad (6.207)$$

für ein gewähltes Signifikanzniveau  $\alpha$  die wahrscheinlichste Modellordnung für Signal- und Systemmodelle ermittelt werden (s. Abschnitte 3.3.2 und 5.5.2).

**Auswahlkriterien bei Aufteilung der Beobachtungen.** Diese sehr leistungsfähige und weitentwickelte Strategie [1.50, 6.44] beruht darauf, daß die Modellordnung über einen Vergleich von geschätzten Parametern oder Signalen einer Lernfolge und Prüffolge ermittelt wird. Als Modellauswahlkriterien werden Genauigkeitskriterien und Übereinstimmungskriterien verwendet. Als Beispiel sei hier das Regularitätskriterium für eine Lernfolge des Umfangs  $k_1$  und eine Prüffolge vom Umfang  $k_2$  angegeben. Es lautet nach [1.50]:

$$\Delta^2(k_2, \hat{n}) = \sum_{k=1}^{k_2} [x(k) - \hat{x}(k, k_1, \hat{n})]^2. \quad (6.208)$$

Es wird wiederum die Modellordnung gewählt, die einen minimalen Wert des Kriteriums liefert. Diese Gruppe von Verfahren hat sich besonders bei der Lösung von Vorhersageproblemen und bei geringen Datenmengen bewährt [1.50, 6.44].

### Verfahren zur Beurteilung der geschätzten diskreten Übertragungsfunktion

Ausgangspunkt der Verfahren zur Strukturermittlung sind Schätzungen der Polynome  $\hat{A}(z^{-1})$  und  $\hat{B}(z^{-1})$  entsprechend den im Abschnitt 6.3 vorgestellten Verfahren mit verschiedenen Modellordnungen  $\hat{n} = 1, 2, \dots, \hat{n}_{\max}$ .

**Polynomtest.** Beim Polynomtest wird untersucht, ob die Polynome  $\hat{A}(z^{-1})$  und  $\hat{B}(z^{-1})$  gemeinsame Wurzeln besitzen. Für verschiedene Modellordnungen werden die Pole und die Nullstellen in der  $z$ -Ebene dargestellt. Ist die Ordnung des Modells  $\hat{n}$  zu groß gegenüber der Systemordnung, werden einige Pole annähernd durch Nullstellen kompensiert. Die Modellordnung wird so weit reduziert, bis keine Pol-Nullstellen-Kompensation mehr erfolgt [6.43]. Das Verfahren ist sehr leistungsfähig, ist aber gleichzeitig durch subjektive Faktoren der Bewertung geprägt (Nutzung grafischer Mittel).

**Kombinierter Polynom- und Dominanztest.** Der kombinierte Test stellt den Versuch dar, die Festlegung der Modellordnung durch die zusätzliche Verwendung von Dominanzwerten der Pole zu objektivieren. Er wird in folgenden Schritten realisiert [1.52, 6.43]:

1. Schätzung eines Modells mit maximal möglicher Ordnung  $\hat{n}_{\max}$  und Darstellung der Pole und Nullstellen in der  $z$ -Ebene.
2. Anwendung des Polynomtestes für Pole, die eindeutig durch Nullstellen kompensiert werden, d.h. Reduktion der Ordnung auf  $n_1$ .
3. Die Prüfung der Dominanz der verbleibenden Pole des Modells

$$\hat{G}(z) = \sum_{\theta=1}^{\hat{n}_1} \frac{c_\theta}{z - z_\theta} = \sum_{\theta=1}^{\hat{n}_1} \frac{\alpha_\theta (1 - z_\theta)}{z - z_\theta} \quad (6.209)$$

mit

$$\alpha_\theta = c_\theta / (1 - z_\theta)$$

erfolgt auf der Grundlage des Dominanzmaßes  $D$  der Pole. Es wurde in [6.45] gezeigt, daß der Endwert der Übergangsfolge des Modells von Gl. (6.209)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \sum_{\theta=1}^{\hat{n}_1} \operatorname{Re} \{ \alpha_\theta \} \quad (6.210)$$

einen Verstärkungsfaktor beschreibt. Damit können die einzelnen Faktoren  $\alpha_\theta$  als Verstärkungsfaktoren der Pole interpretiert werden. Als Maß für den Einfluß jedes Poles erhält man durch Normierung aus Gl. (6.210) das Dominanzmaß  $D_\theta$  zu

$$D_\theta = \frac{R\{\alpha_\theta\}}{\sum_{i=1}^{\hat{n}_1} R\{\alpha_i\}}; \quad i = 1, 2, \dots, \hat{n}_1. \quad (6.211)$$

Eine weitere Reduktion der Modellordnung kann nun bei vorgegebener Genauigkeit anhand der  $D_\theta$ -Werte erfolgen.

Der kombinierte Polynom- und Dominanztest hat sich bei ungestörten und gestörten Systemen zur Strukturermittlung von Differenzgleichungsmodellen als sehr leistungsfähig erwiesen.

### 6.6.3. Parameterschätzung linearer Mehrgrößensysteme

Die Erstellung eines Modells für ein lineares Mehrgrößensystem mit  $l$  Eingangsgrößen  $u_i(k)$  und  $m$  Ausgangsgrößen  $x_j(k)$  ist in vielen realen Prozessen erforderlich. Dabei besteht die Aufgabe darin, für das Mehrgrößensystem einen Modellansatz zu finden, der alle Zusammenhänge zwischen den Eingangs- und Ausgangssignalen sowie die Kopplungen zwischen den Ausgangssignalen beschreibt. Neben der Beschreibung im Zustandsraum (s. Abschn. 6.5) und durch Gewichtsfunktionsmodelle (s. Abschn. 6.2) hat sich die Verwendung von Übertragungsfunktionen durchgesetzt. Betrachtet wird an dieser Stelle die Modellbeschreibung eines linearen zeitdiskreten Mehrgrößensystems.

Entsprechend Bild 6.32 gilt für das Gesamtmodell des Mehrgrößensystems

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1(z) \\ \vdots \\ \hat{X}_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(z) & \dots & \hat{G}_{1l}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{G}_{m1}(z) & \dots & \hat{G}_{ml}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ \vdots \\ U_l(z) \end{bmatrix}. \quad (6.212)$$

Die diskrete Übertragungsfunktion für den Zusammenhang zwischen dem  $i$ -ten Eingang und dem  $j$ -ten Ausgang lautet dann:

$$\hat{G}_{ji}(z) = \frac{\hat{B}_{ji}(z^{-1})}{\hat{A}_{ji}(z^{-1})} = \frac{\hat{b}_{0,ji} + \hat{b}_{1,ji}z^{-1} + \dots + \hat{b}_{n_{ji},ji}z^{-n_{ji}}}{1 + \hat{a}_{1,ji}z^{-1} + \dots + \hat{a}_{n_{ji},ji}z^{-n_{ji}}}. \quad (6.213)$$

Das Gesamtmodell des Systems kann entsprechend der Anzahl der Ausgangssignale in  $m$  unabhängige Teilmodelle mit jeweils  $r$  ( $r \leq l$ ) Eingangssignalen  $u_i(k)$  für den  $j$ -ten Ausgang aufgespalten werden (Bild 6.33).



Bild 6.32. Gesamtmodell eines linearen Mehrgrößensystems



Bild 6.33. Teilmodell eines linearen Mehrgrößensystems

Damit ergibt sich für das  $j$ -te Teilsystem

$$X_j(z) = G_{j1}(z) U_{j1}(z) + \dots + G_{jr}(z) U_{jr}(z) + Z_j(z) \quad (6.214)$$

$$G_{ji}(z) = \frac{B_{ji}(z^{-1})}{A_{ji}(z^{-1})}; \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Um eine parameterlineare Fehlergleichung in analoger Form zur Vorgehensweise wie im Abschnitt 6.3 zu erhalten, werden die in Gl. (6.207) vorhandenen unterschiedlichen Nennerpolynome  $A_{ji}(z^{-1})$  durch die Bildung eines gemeinsamen Hauptnenners beseitigt.

Damit folgt für den Hauptnenner

$$A_j^*(z^{-1}) = \prod_{i=1}^r A_{ji}(z^{-1}) = 1 + a_{1,j}^* z^{-1} + \dots + a_{n_j,j}^* z^{-n_j} \quad (6.215)$$

mit

$$n_j = \sum_{i=1}^r n_{ji}.$$

Durch Einsetzen von Gl. (6.215) in Gl. (6.214) erhält man die Beziehung

$$A_j^*(z^{-1}) X_j(z) = B_{j1}^*(z^{-1}) U_{j1}(z) + \dots + B_{jr}^*(z^{-1}) U_{jr}(z) + A_j^*(z^{-1}) Z_j(z). \quad (6.216)$$

Die erweiterten Zählerpolynome  $B_{ji}^*(z^{-1})$  ergeben sich aus

$$B_{ji}^*(z^{-1}) = \frac{B_{ji}(z^{-1})}{A_{ji}(z^{-1})} A_j^*(z^{-1}) \quad (6.217)$$

$$B_{ji}^*(z^{-1}) = \hat{b}_{0,ji}^* + \hat{b}_{1,ji}^* z^{-1} + \dots + \hat{b}_{n_{ji},ji}^* z^{-n_{ji}}.$$

Aus Gl. (6.216) erhält man im Zeitbereich die Beschreibung zum  $k$ -ten Zeitpunkt

$$x_j(k) = - \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}^* x_j(k-i) + \sum_{i=0}^{n_j} \sum_{\mu=1}^r \hat{b}_{\mu,j}^* u_{\mu j}(k-i) + z_j(k) \quad (6.218)$$

mit

$$z_j(k) = z_j(k) + \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}^* z_j(k-i).$$

Für die Parameterschätzung ergibt sich damit als Meßwertvektor  $m^T(k)$  für das  $j$ -te Teilsystem

$$m_j^T(k) = [x_j(k-1) \dots x_j(k-n_j) : u_{j1}(k) \dots u_{j1}(k-n_{j1}) : \dots : u_{jr}(k) \dots u_{jr}(k-n_{jr})] \quad (6.219)$$

und als Parametervektor  $s_j^T$

$$s_j^T = [-a_{1,j}^* \dots -a_{n,j}^* : b_{0,j1}^* \dots b_{n,j1}^* : \dots : b_{0,jr}^* \dots b_{n,jr}^*] \quad (6.220)$$

Mit diesem Meßwert- und Parametervektor können die in den Abschnitten 6.3.2 und 6.3.3 vorgestellten Methoden der Regression und der Hilfsvariablen-schätzung angewendet werden. Gegenüber der Schätzung von Eingrößensystemen treten besonders bei einer großen Anzahl von Einflußgrößen und einer hohen Modellordnung Probleme bezüglich der benötigten Rechenzeit und des Speicherplatzes auf. Eine Lösung zur Reduzierung dieses Problems wurde in [1.52] aufgezeigt. Wirken Ausgangssignale des Gesamtsystems auf das betrachtete  $j$ -te Ausgangssignal, so ist die Anzahl der in Gl. (6.212) betrachteten Eingangssignale des  $j$ -ten Teilmodells um maximal  $m-1$  Signale auf  $r = l + m - 1$  zu erhöhen.

Die Erweiterung des Meßwert- und Parametervektors erfolgt dann in analoger Weise [6.46].

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß durch die Bildung dieser Teilmodelle die statische und die dynamische Wirkung der ausgewählten Eingangssignale auf das  $j$ -te Ausgangssignal entsprechend dem gewählten Gütekriterium gut abgebildet werden. Durch die Bildung des gemeinsamen Hauptnenners ist eine erwartungstreue Schätzung der Parameter der einzelnen diskreten Übertragungsfunktionen  $G_{jr}(z)$  in der Regel nicht möglich [1.31, 6.46]. Auf die Wahl einer geeigneten Abtastzeit bei der Parameterschätzung von Mehrgrößensystemen wird im Abschnitt 6.6.4 eingegangen.

#### 6.6.4. Möglichkeiten zur Wahl der Abtastzeit $T$

Die meisten der vorgestellten Verfahren zur Parameter- und Zustandsschätzung gehen davon aus, daß die Eingangs- und Ausgangssignale als abgetastete Signale mittels eines Digitalrechners weiterverarbeitet werden. Häufig haben technische und nichttechnische Prozesse kontinuierliche Eigenschaften, so daß eine Analog-Digital-Wandlung erfolgen muß. Die Abtastzeit  $T$  muß nun so gewählt werden, daß durch diese Wandlung kein Informationsverlust auftritt.

Theoretisch tritt kein Informationsverlust auf, wenn die Abtastzeit  $T$  entsprechend dem Abtasttheorem von Shannon

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}}; \quad (6.221)$$

$\omega_{\max}$  maximale Frequenz des Signals,

gewählt wird. In der Regel ist  $\omega_{\max}$  nicht bekannt.

Um den Informationsverlust klein zu halten, sollte die Abtastzeit  $T$  so klein wie möglich gewählt werden. Diese Strategie führt aber dazu, daß in der Meßwertmatrix  $M$  Spalten linear abhängig werden. Dadurch wird die Matrix  $[M^T M]^{-1}$  singulär, und eine

Parameterschätzung ist nicht mehr möglich. Wird auf der anderen Seite die Abtastzeit  $T$  sehr groß gewählt, so wird nur das statische Verhalten abgebildet. In der Praxis hat sich deshalb die Wahl der Abtastzeit für Eingrößensysteme nach folgender Strategie bewährt:

**Schritt 1.** Ermittlung oder Abschätzung der Summenzeitkonstante  $T_z$  bzw. der Zeit  $t_{0,63}$  einer aufgenommenen Sprungantwort (s. Abschn. 4.2)

**Schritt 2.** Wahl der Abtastzeit  $T$  durch

a) Gewichtsfunktionsmodell [6.24]

$$T \approx (3 \dots 5) T_z / r$$

bei  $r$  Stützstellen von  $g(t)$ ;  $10 \leq r \leq 20$ ,

b) Differenzgleichungsmodell [1.44]

$$T \approx (0,18 \dots 0,36) T_z.$$

Bei Mehrgrößensystemen kann die Tastperiode nach der gleichen Strategie gewonnen werden, wenn die Teilsysteme ein annähernd gleiches dynamisches Verhalten aufweisen. Besitzen die Teilsysteme ein sehr unterschiedliches Zeitverhalten, ist ggf. die Identifikation mit unterschiedlichen Abtastzeiten wiederholt durchzuführen.

## 6.7. Übungsaufgaben zum Abschnitt 6

### Aufgabe 6.1

Auf zwei unterschiedliche Systeme wird eine Testfolge  $u(k)$ , die aus einem Plackett-Burman-Plan für  $m+1=7$  gewonnen wurde, mit einer Abtastzeit von  $T=1,3$  s aufgeprägt. Die abgetasteten Werte der Eingangs- und Ausgangssignale sind in Tafel 6.13 dargestellt.

Tafel 6.13. Meßwerte für ein System mit einem Eingang und zwei Ausgängen

| $k$      | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $u(k)$   | +1     | +1     | +1     | -1     | +1     | -1     |
| $x_1(k)$ | 0,261  | 0,592  | 0,785  | 0,386  | 0,238  | 0,102  |
| $x_2(k)$ | -0,059 | 0,428  | 0,81   | 1,02   | -0,011 | 0,318  |
| $k$      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     |
| $u(k)$   | -1     | +1     | +1     | +1     | -1     | +1     |
| $x_1(k)$ | -0,279 | -0,238 | 0,152  | 0,674  | 0,146  | 0,164  |
| $x_2(k)$ | -0,069 | -8,70  | -0,169 | 0,814  | 0,793  | -0,046 |
| $k$      | 12     | 13     | 14     | 15     | 16     | 17     |
| $u(k)$   | -1     | -1     | -1     | -1     | -1     | -1     |
| $x_1(k)$ | 0,333  | -0,273 | -0,620 | -0,894 | -0,732 | -1,09  |
| $x_2(k)$ | 0,476  | -0,059 | -0,823 | -1,017 | -0,797 | -1,130 |
| $k$      | 18     | 19     |        |        |        |        |
| $u(k)$   | -1     | -1     |        |        |        |        |
| $x_1(k)$ | -0,993 | -1,0   |        |        |        |        |
| $x_2(k)$ | -0,991 | -1,0   |        |        |        |        |

Die den Systemausgängen überlagerte Störung hat die Standardabweichung  $\sigma_z = 0,1$  und den Erwartungswert  $E\{z\} = 0$ . Lösen Sie folgende Teilaufgaben:

- Stellen Sie die Testfolge und die gemessenen Ausgangswerte als Funktion der Abtastschritte  $k$  dar!
- Wandeln Sie die Testfolge in den zur Schätzung der Stützstellen notwendigen Versuchsplan um!
- Kennzeichnen Sie in Übereinstimmung mit dem Versuchsplan die Abtastzeitpunkte, von denen Werte der Ausgangsgrößen zur Auswertung benötigt werden, und ordnen Sie diese den entsprechenden Versuchsplanzeilen zu!
- Berechnen Sie mit Hilfe der Regression die Stützstellenvektoren  $\hat{g}_1$  und  $\hat{g}_2$ !
- Berechnen Sie die Varianzen und Kovarianzen von  $\hat{g}_1$  und  $\hat{g}_2$ !
- Stellen Sie die geschätzten Stützstellen der beiden Gewichtsfunktionen als Funktion der Zeit dar!
- Bestimmen Sie aus den geschätzten Stützstellen die Verstärkungen der beiden Systeme!

#### Aufgabe 6.2

Gegeben sind die in Tafel 6.14 angegebenen Meßwerte eines Systems mit einem Eingang und einem Ausgang. Als Testfolge wurde eine PRBS-Folge mit einer Abtastschrittweite von  $T = 5$  s und der Länge  $L = 7$  verwendet. Lösen Sie folgende Teilaufgaben:

- Stellen Sie die Testfolge und die gemessenen Ausgangswerte als Funktion der Zeit dar!
- Berechnen Sie für eine Ordnung von  $m = 1$  die Parameter des Differenzgleichungsmodells (Ansatz ohne  $b_0$ )!
- Berechnen Sie mit den Modellparametern für die gegebene Eingangsfolge die Komponenten des geschätzten Ausgangsvektors  $\hat{x}$ !
- Bestimmen Sie Restsumme und Reststreuung!
- Überprüfen Sie die Signifikanz der geschätzten Parameter, und ermitteln Sie die Konfidenzintervalle für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$ !

Tafel 6.14. Meßwerte eines Systems mit einem Eingang und einem Ausgang

| $k$    | 0  | 1    | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    |
|--------|----|------|------|-------|------|-------|-------|------|
| $u(k)$ | +1 | +1   | -1   | +1    | -1   | -1    | +1    | 0    |
| $x(k)$ | 0  | 1,89 | 3,23 | -0,13 | 2,04 | -0,86 | -2,42 | 0,44 |

## Lösungen der Übungsaufgaben

### Aufgabe 2.1

- a) Für die Verteilungsfunktion und für die Verteilungsdichte ergibt sich

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{6}x + \frac{2}{3} & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{6} & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

- b) Der Erwartungswert der stetigen Zufallsgröße ist

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{-2}^0 x dx + \frac{1}{3} \int_0^2 x dx \\ &= \frac{x^2}{12} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{6} \Big|_0^2 = -\frac{4}{12} + \frac{4}{6} \\ E\{X\} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- c) Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsgröße sich im Bereich  $0 \leq x \leq 3$  befindet, ist

$$\begin{aligned} P(0 \leq x \leq 3) &= F(3) - F(0) = 1 - \frac{1}{3} \\ P(0 \leq x \leq 3) &= 0,666. \end{aligned}$$

### Aufgabe 2.2

- a) Für die Augenzahlen ergeben sich die in Tafel L1 angegebenen Kombinationen (links: erster Würfel; rechts: zweiter Würfel). Aus Tafel L1 ergeben sich die im Bild L1 dargestellte Verteilung und die im Bild L2 dargestellte Verteilungsfunktion.

Tafel L1. Augenzahlen der beiden Würfel und ihre Wahrscheinlichkeit

| $x_i$  | 2              | 3              | 4                       | 5                                | 6                                         | 7                                                  | 8                                         | 9                                | 10                      | 11             | 12             |
|--------|----------------|----------------|-------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------|-------------------------|----------------|----------------|
|        | 1   1          | 1   2<br>2   1 | 1   3<br>2   2<br>3   1 | 1   4<br>2   3<br>3   2<br>4   1 | 1   5<br>2   4<br>3   3<br>4   2<br>5   1 | 1   6<br>2   5<br>3   4<br>4   3<br>5   2<br>6   1 | 2   6<br>3   5<br>4   4<br>5   3<br>6   2 | 3   6<br>4   5<br>5   4<br>6   3 | 4   6<br>5   5<br>6   4 | 5   6<br>6   5 | 6   6          |
| $P(x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$          | $\frac{4}{36}$                   | $\frac{5}{36}$                            | $\frac{6}{36}$                                     | $\frac{5}{36}$                            | $\frac{4}{36}$                   | $\frac{3}{36}$          | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

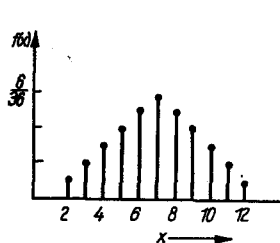


Bild L1. Verteilung zu Aufgabe 2.2

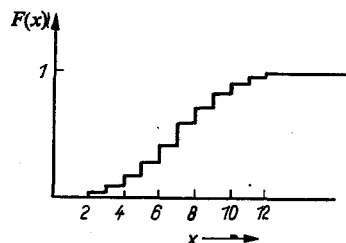


Bild L2. Verteilungsfunktion zu Aufgabe 2.2

b) Der Erwartungswert ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 E\{X\} &= \sum_{i=1}^n x_i p_i \\
 &= \frac{1}{36} (2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 \\
 &\quad + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12) \\
 E\{X\} &= 7.
 \end{aligned}$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, mit der die summierten Augenzahlen beider Würfel im Bereich  $6 \leq x \leq 12$  sind, erhält man aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
 P(6 \leq x \leq 12) &= P(12) - P(6) = \frac{36 - 15}{36} \\
 P(6 \leq x \leq 12) &= 0,58.
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 2.3

Zur Lösung der Aufgabe werden folgende Beziehungen verwendet:

Anzahl der Intervalle

$$n_k = 1 + 3,2 \lg n,$$

$n$  Umfang der Stichprobe;

Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^k x_m^* H_{am},$$

$x_m^*$  Klassenmittelwert (Klasse  $m$ )

$H_{am}$  absolute Häufigkeit (Klasse  $m$ );

Streuung

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^k (x_m^* - \bar{x})^2 H_{am};$$

Schiefe

$$\gamma = \frac{1}{(n-1)s^3} \sum_{m=1}^k (x_m^* - \bar{x})^3 H_{am}.$$

Damit ergibt sich für die Klassenanzahl der Verteilungen bei  $n = 40$  Beobachtungen

$$n_k = 1 + 3,2 \lg n = 6,13.$$

Gewählt wurde die Klassenanzahl  $n_k = 6$ . Für die erste Stichprobe ergeben sich

$$x_{\min} = -2,25, \quad x_{\max} = 3,36, \quad \Delta m = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_k} = 0,935.$$

Tafel L2. Zwischenwerte zur Lösung der Aufgabe 2.3a

| $m$ | $x_{m-1}$ | $x_m$  | $H_{am}$ | $x_m^*$ | $(x_m^* - \bar{x})^2$ | $(x_m^* - \bar{x})^3$ |
|-----|-----------|--------|----------|---------|-----------------------|-----------------------|
| 1   | -2,250    | -1,315 | 4        | -1,7825 | 2,832                 | -4,767                |
| 2   | -1,315    | -0,380 | 11       | -0,8475 | 0,560                 | -0,419                |
| 3   | -0,380    | 0,555  | 18       | 0,0875  | 0,035                 | 0,007                 |
| 4   | 0,555     | 1,490  | 4        | 1,0225  | 1,259                 | 1,421                 |
| 5   | 1,490     | 2,425  | 2        | 1,9575  | 4,231                 | 8,704                 |
| 6   | 2,425     | 3,360  | 1        | 2,8925  | 8,925                 | 26,785                |

Mit den in Tafel L2 angegebenen Zwischenwerten erhält man folgende Maßzahlen:

$$\bar{x} = -0,0995, \quad s^2 = 1,0402, \quad \gamma = 0,6354.$$

Bei exakter Berechnung lauten die Maßzahlen:

$$\bar{x} = -0,0815, \quad s^2 = 1,178, \quad \gamma = 0,74.$$

Im Bild L3 ist die ermittelte Verteilung der ersten Stichprobe dargestellt. Sie kann durch eine Normalverteilung angenähert werden.

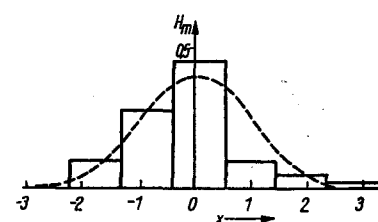


Bild L3. Verteilung der ersten Stichprobe zu Aufgabe 2.3

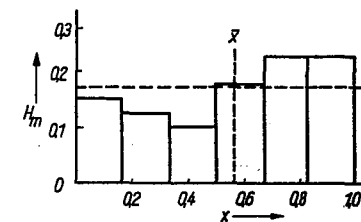


Bild L4. Verteilung der zweiten Stichprobe zu Aufgabe 2.3

Für die zweite Stichprobe ergeben sich

$$x_{\min} = 0, \quad x_{\max} = 0,99, \quad \Delta m = 0,165.$$

Mit den in Tafel L3 angegebenen Zwischenwerten erhält man die Maßzahlen

$$\bar{x} = 0,5568, \quad s^2 = 0,0830, \quad \gamma = -0,3785.$$

Im Bild L4 ist die ermittelte Verteilung der zweiten Stichprobe dargestellt. Sie kann durch eine Gleichverteilung angenähert werden.

Tafel L3. Zwischenwerte zur Lösung der Aufgabe 2.3b

| m | $x_{m-1}$ | $x_m$ | $H_{am}$ | $x_m^*$ | $(x_m^* - \bar{x})^2$ | $(x_m^* - \bar{x})^3$ |
|---|-----------|-------|----------|---------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 0         | 0,165 | 6        | 0,0825  | 0,2251                | -0,1068               |
| 2 | 0,165     | 0,330 | 5        | 0,2475  | 0,0957                | -0,0296               |
| 3 | 0,330     | 0,495 | 4        | 0,4125  | 0,0206                | -0,0030               |
| 4 | 0,495     | 0,660 | 7        | 0,5775  | 0                     | 0                     |
| 5 | 0,660     | 0,825 | 9        | 0,7425  | 0,0345                | 0,0064                |
| 6 | 0,825     | 0,990 | 9        | 0,9075  | 0,1230                | 0,0431                |

Tafel L4. Zwischenwerte zur Lösung der Aufgabe 2.3c

| m | $x_{m-1}$ | $x_m$   | $H_{am}$ | $x_m^*$ | $(x_m^* - \bar{x})^2$ | $(x_m^* - \bar{x})^3$ |
|---|-----------|---------|----------|---------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 3,000     | 64,167  | 21       | 33,58   | 3556,8                | -212124,6             |
| 2 | 64,167    | 125,330 | 9        | 94,75   | 2,3                   | 3,6                   |
| 3 | 125,330   | 186,500 | 4        | 155,92  | 3931,4                | 246500,7              |
| 4 | 186,500   | 247,667 | 3        | 217,08  | 15341,5               | 1900207,9             |
| 5 | 247,667   | 308,834 | 2        | 278,25  | 34236,4               | 6334782,8             |
| 6 | 308,834   | 370,000 | 1        | 339,42  | 60614,8               | 14923457,0            |

Für die dritte Stichprobe erhält man

$$x_{\min} = 3, \quad x_{\max} = 370, \quad \Delta m = 61,167.$$

Mit den in Tafel L4 angegebenen Zwischenwerten erhält man die Maßzahlen

$$\bar{x} = 93,219, \quad s^2 = 6809,005, \quad \gamma = 1,361.$$

Die aus der Stichprobe ermittelte empirische Verteilung ist im Bild L5 dargestellt. Die Verteilung dieser Stichprobe kann durch eine Exponentialverteilung angenähert werden.

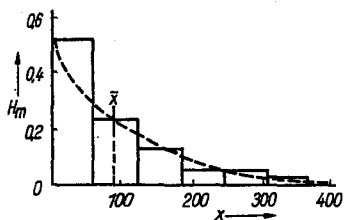


Bild L5  
Verteilung der dritten Stichprobe  
zu Aufgabe 2.3

#### Aufgabe 2.4

Ausgehend von der Hypothese

$$H_0: \mu = \mu_0 = 8 \mu\text{m}$$

wird mit dem Tafelwert  $z_\alpha = 1,96$  aus Tafel A1 der z-Test durchgeführt.

Es gilt

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{8,3 \mu\text{m} - 8,0 \mu\text{m}}{0,632 \mu\text{m}} \sqrt{150}$$

$$z = 5,813$$

und somit für den Test  $z > z_\alpha$ , d. h., die Hypothese wird abgelehnt. Damit unterscheiden sich der Stichprobenmittelwert und der Erwartungswert signifikant voneinander. Die Anlage muß überprüft werden.

#### Aufgabe 2.5

Betrachtet wird die mittlere Differenz zwischen den Meßergebnissen der Geräte I und II

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{II} - x_{III}); \quad n = 15$$

$$= \frac{1}{15} (-60) = -4 \mu\text{m},$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{II} - x_{III} - \bar{x})^2 = \frac{1}{14} 960 = 68,57 (\mu\text{m})^2,$$

$$s = 8,28 \mu\text{m}.$$

Die Hypothese lautet:  $H: \mu = \mu_0 = 0$ .

Für die Testgröße ergibt sich

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} = \frac{-4}{8,28} \sqrt{15} = -1,87.$$

Unter Verwendung des Tafelwerts für die Testgröße aus Tafel A2 zu

$$t_{0,01;14} = 2,98$$

ergibt sich für den t-Test

$$|t| = 1,87 < t_{0,01;14} = 2,98.$$

Damit wird die Hypothese angenommen, und der Unterschied in den Meßwerten beider Geräte kann als zufällig angesehen werden.

#### Aufgabe 2.6

Die Überprüfung der Behauptung erfolgt mit dem  $\chi^2$ -Test. Für die Testgröße gilt

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

Aus den Beobachtungen erhält man für

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} 240 = 24 ^\circ\text{C},$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} 1,52 = 0,168 (^\circ\text{C})^2.$$

Mit der Hypothese  $H: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,25 (^\circ\text{C})^2$  ergibt sich für die Testgröße

$$\chi^2 = \frac{9 \cdot 0,168}{0,25} = 6,048.$$

Für einen Tafelwert  $\chi^2_{0,01;9} = 21,67$  aus Tafel A3 ergibt sich für den Test  $\chi^2 < \chi^2_{0,01;9}$ , d.h., die Hypothese wird angenommen. Damit ist die Behauptung des Herstellers, daß seine Steuereinrichtung die Sollwerttemperatur von 24 °C mit einer Streuung von  $\sigma^2 = 0,25$  (°C)<sup>2</sup> garantiert, mit einer Sicherheit von 99 % bestätigt.

### Aufgabe 2.7

Die Hypothese  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  wird mit dem  $F$ -Test überprüft. Zur Durchführung des Testes werden berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$\bar{x}_{0_2} = 5,44 \text{ mg O}_2/\text{l}, \quad s_{0_2}^2 = 0,093 \text{ (mg O}_2/\text{l})^2,$$

$$\bar{x}_{0_2} = 5,05 \text{ mg O}_2/\text{l}, \quad s_{0_2}^2 = 0,266 \text{ (mg O}_2/\text{l})^2.$$

Für die Testgröße  $F$  erhält man mit den Werten für die Streuungen

$$F = \frac{s_{0_2}^2}{s_{0_2}^2} = \frac{0,266}{0,093} = 2,86.$$

Der Test ergibt mit einem Tafelwert von  $F_{0,05;7,4} = 6,09$  aus Tafel A4

$$F = 2,86 < F_{0,05;7,4} = 6,09.$$

Damit wird die Hypothese, daß sich die Streuungen beider Meßwertreihen nur zufällig unterscheiden, angenommen.

### Aufgabe 2.8

Ausgehend von der Beziehung für das Konfidenzintervall

$$\bar{x} - \frac{t_{\alpha/2;f} s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{t_{\alpha/2;f} s}{\sqrt{n}}$$

folgt mit dem Tafelwert

$$t_{0,025;10} = 2,23 \quad (\text{Tafel A2})$$

und

$$\frac{t_{0,025;10} s}{\sqrt{n}} = \frac{2,23 \cdot 3,507}{\sqrt{11}} = 2,358 \text{ min}^{-1}$$

das Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Herzfrequenz mit einer Sicherheit von 95 %

$$152,64 \text{ min}^{-1} < \mu < 157,35 \text{ min}^{-1}.$$

### Aufgabe 2.9

Aus der Beziehung

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2;f}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;f}}$$

folgt für

$$\chi^2_{0,05;19} = 30,1,$$

$$\chi^2_{0,95;19} = 10,1 \quad \text{aus Tafel A3}$$

und den Werten für  $s^2$  und  $f = m - 1$

$$\frac{19 \cdot 1,8 (\%)^2}{30,1} < \sigma^2 < \frac{19 \cdot 1,8 (\%)^2}{10,1}.$$

Damit ergibt sich für das Konfidenzintervall der Streuung der Bereich

$$1,136 (\%)^2 < \sigma^2 < 3,386 (\%)^2.$$

### Aufgabe 2.10

a) Mit der Anzahl der Beobachtungen ( $n = 40$ ) ergibt sich die Anzahl der Klassen

$$n_k = 1 + 3,2 \lg 40 = 6,13.$$

Gewählt wurde  $n_k = 6$ .

Die Grenzen der Verteilungen und die Klassenbreite ergeben sich für  $X$  zu

$$x_{\min} = -1,67, \quad x_{\max} = 3,43,$$

$$\Delta m_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_k} = 0,85$$

Tafel L.5. Ergebnisse der Analyse der zweidimensionalen Zufallsgröße

|       |                   |                    |                    |                    |                   |                    |      |      |
|-------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|------|------|
|       | -1,67             | -0,82              | 0,03               | 0,88               | 1,73              | 2,58               | 3,43 |      |
|       | 3,63              |                    |                    |                    |                   |                    |      |      |
|       | 0                 | 0                  | 0                  | 2<br>2/40<br>1,57  | 2<br>2/40<br>4,90 | 3<br>3/40<br>12,35 |      | 7/40 |
| 2,83  | 0                 | 0                  | 0                  | 4<br>4/40<br>1,86  | 3<br>3/40<br>4,35 | 0                  |      | 7/40 |
| 2,03  | 0                 | 1<br>1/40<br>-0,47 | 2<br>2/40<br>-0,32 | 3<br>3/40<br>0,43  | 0                 | 0                  |      | 6/40 |
| 1,23  | 0                 | 0                  | 5<br>5/40<br>0,99  | 2<br>2/40<br>0,35  | 0                 | 0                  |      | 7/40 |
| 0,43  | 0                 | 3<br>3/40<br>4,84  | 3<br>3/40<br>1,67  | 1<br>1/40<br>-0,50 | 0                 | 0                  |      | 7/40 |
| -0,37 | 2<br>2/40<br>8,81 | 2<br>2/40<br>5,30  | 2<br>2/40<br>1,84  | 0                  | 0                 | 0                  |      | 6/40 |
| -1,17 |                   |                    |                    |                    |                   |                    |      |      |
|       | 2/40              | 6/40               | 12/40              | 12/40              | 5/40              | 3/40               |      |      |

und für  $Y$  zu

$$y_{\min} = -1,17, \quad y_{\max} = 3,63,$$

$$\Delta m_y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{n_k} = 0,80.$$

Mit diesen Festlegungen ergeben sich die in der Tafel L5 dargestellten Werte der absoluten Verbundhäufigkeit (erste Zahl im Feldinnern der Tafel L5) und der Verbundwahrscheinlichkeit (zweite Zahl im Feldinnern der Tafel L5)

$$P(x, y) = \frac{H_a(x, y)}{n}.$$

- b) Die Randhäufigkeiten werden durch Aufsummieren der Verbundhäufigkeiten für jeweils eine Spalte bzw. Zeile gefunden. Sie sind am Rand unten ( $\hat{P}(x)$ ) bzw. rechts am Rand ( $\hat{P}(y)$ ) in Tafel L5 eingetragen. Als Verteilung sind sie im Bild L6a und b dargestellt. Aus der Darstellung kann geschlossen werden, daß die Zufallsgröße  $X$  annähernd normalverteilt und die Zufallsgröße  $Y$  annähernd gleichverteilt ist.

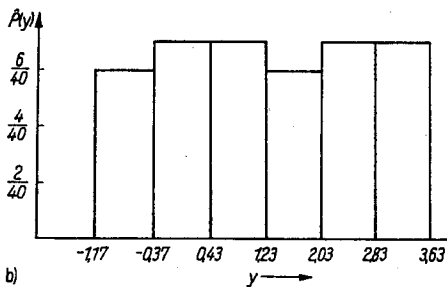
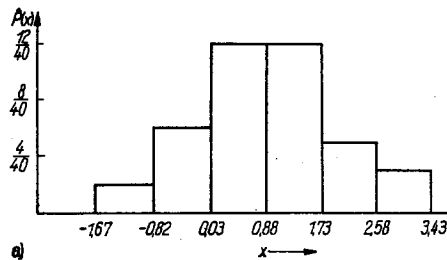


Bild L6  
Randverteilungen zu Aufgabe 2.10

- a) Randverteilung für die Zufallsgröße  $X$   
b) Randverteilung für die Zufallsgröße  $Y$

- c) Die Berechnung des einfachen Korrelationskoeffizienten auf der Grundlage der Klasseneinteilung erfolgt nach der Beziehung

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{s_X s_Y},$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k (x_{mi}^* - \bar{x})(y_{mj}^* - \bar{y}) H_a(x_i, y_j).$$

Damit ist die Ermittlung der Mittelwerte und Streuungen für die Zufallsgrößen notwendig. Für die Mittelwerte gilt unter Verwendung der Zwischenergebnisse in den Tafeln L6 und L7

$$1. \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^k x_m^* H_a(x_m) = \frac{1}{40} 36,23$$

$$\bar{x} = 0,91.$$

$$2. \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^k y_m^* H_a(y_m) = \frac{1}{40} 50,80$$

$$\bar{y} = 1,27.$$

| $m$ | $x_{mu}$ | $x_{mo}$ | $x_m^*$ | $H_a(x_m)$ | $x_m^* H_a(x_m)$ |
|-----|----------|----------|---------|------------|------------------|
| 1   | -1,67    | -0,82    | -1,25   | 2          | -2,50            |
| 2   | -0,82    | 0,03     | -0,39   | 6          | -2,34            |
| 3   | 0,03     | 0,88     | 0,46    | 12         | 5,52             |
| 4   | 0,88     | 1,73     | 1,31    | 12         | 15,72            |
| 5   | 1,73     | 2,58     | 2,16    | 5          | 10,80            |
| 6   | 2,58     | 3,43     | 3,01    | 3          | 9,03             |

Tafel L6  
Zwischenergebnisse  
zur Berechnung  
des Mittelwertes  $\bar{x}$

| $m$ | $y_{mu}$ | $y_{mo}$ | $y_m^*$ | $H_a(y_m)$ | $y_m^* H_a(y_m)$ |
|-----|----------|----------|---------|------------|------------------|
| 1   | -1,17    | -0,37    | -0,77   | 6          | -4,62            |
| 2   | -0,37    | 0,43     | 0,03    | 7          | 0,21             |
| 3   | 0,43     | 1,23     | 0,83    | 7          | 5,81             |
| 4   | 1,23     | 2,03     | 1,63    | 6          | 9,78             |
| 5   | 2,03     | 2,83     | 2,42    | 7          | 17,01            |
| 6   | 2,83     | 3,64     | 3,23    | 7          | 22,61            |

Tafel L7  
Zwischenergebnisse  
zur Berechnung  
des Mittelwertes  $\bar{y}$

| $m$ | $x_m^* - \bar{x}$ | $(x_m^* - \bar{x})^2$ | $y_m^* - \bar{y}$ | $(y_m^* - \bar{y})^2$ |
|-----|-------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|
| 1   | -2,16             | 4,67                  | -2,04             | 4,16                  |
| 2   | -1,30             | 1,69                  | -1,24             | 1,54                  |
| 3   | -0,45             | 0,20                  | -0,44             | 0,19                  |
| 4   | 0,40              | 0,16                  | 0,36              | 0,13                  |
| 5   | 1,25              | 1,56                  | 1,16              | 1,35                  |
| 6   | 2,10              | 4,41                  | 1,96              | 3,84                  |

Tafel L8  
Zwischenergebnisse  
zur Berechnung  
der Streuungen  $s_x^2$  und  $s_y^2$

Die Streuungen ergeben sich mit Verwendung der Zwischenergebnisse der Tafel L8 zu

$$1. s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^k (x_m^* - \bar{x})^2 H_a(x_m) = \frac{1}{39} 44,83$$

$$s_x^2 = 1,15.$$

$$2. s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^k (y_m^* - \bar{y})^2 H_a(y_m) = \frac{1}{39} 74,18$$

$$s_y^2 = 1,90.$$

Damit kann der Korrelationskoeffizient unter Verwendung des als dritte Zahl in den Feldern von Tafel L5 dargestellten Ausdrucks

$$(x_{mi}^* - \bar{x})(y_{mj} - \bar{y}) H_a(x_i, y_j)$$

nach der Beziehung

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (x_{mi}^* - \bar{x})(y_{mj} - \bar{y}) H_a(x_i, y_j)}{s_x s_y}$$

berechnet werden. Es gilt

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{1}{39} \frac{47,97}{1,07 \cdot 1,38}$$

$$\hat{\rho}(X, Y) = 0,83.$$

Der positive Korrelationskoeffizient bestätigt die Lage der Verteilung in Tafel L5.

### Aufgabe 2.11

- a) Mit den Mittelwerten  $\bar{x} = 0$  und  $\bar{y} = 2,5$  sowie den Werten in Tafel L9 ergibt sich für die Kovarianz

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0$$

und damit für den Korrelationskoeffizienten

$$\hat{\rho}(X, Y) = 0.$$

Der entsprechende Zusammenhang für diesen Wertebereich ist im Bild L7 eingetragen.

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $y_i - \bar{y}$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ |
|-------|-------|-----------------|-----------------|----------------------------------|
| -2    | 4     | -2              | 1,5             | -3                               |
| -1    | 1     | -1              | -1,5            | 1,5                              |
| 1     | 1     | 1               | -1,5            | -1,5                             |
| 2     | 4     | 2               | 1,5             | 3                                |

Tafel L9  
Zwischenwerte  
zur Berechnung  
der Aufgabe 2.11a

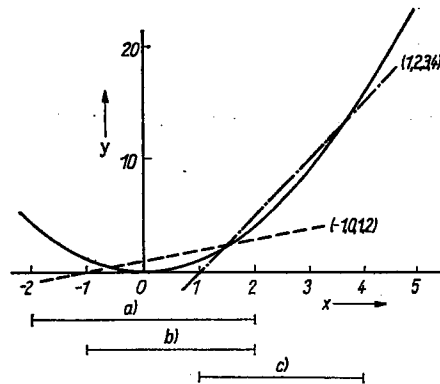


Bild L7  
Funktioneller Verlauf  $y = x^2$   
zu Aufgabe 2.11

- b) Mit den Mittelwerten  $\bar{x} = 0,5$  und  $\bar{y} = 1,5$  und den Werten in Tafel L10 ergibt sich für

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{3} 5 = 1,67,$$

$$s_x^2 = 1,67, \quad s_x = 1,29$$

$$s_y^2 = 3,0, \quad s_y = 1,73,$$

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{1,67}{1,29 \cdot 1,73} = 0,75.$$

Der diesen Bereich charakterisierende Zusammenhang ist wiederum im Bild L7 dargestellt.

Tafel L10. Zwischenwerte zur Berechnung der Aufgabe 2.11b

| $x_i$    | $y_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $y_i - \bar{y}$ | $(y_i - \bar{y})^2$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ |
|----------|-------|-----------------|---------------------|-----------------|---------------------|----------------------------------|
| -1       | 1     | -1,5            | 2,25                | -0,5            | 0,25                | 0,75                             |
| 0        | 0     | -0,5            | 0,25                | -1,5            | 2,25                | 0,75                             |
| 1        | 1     | 0,5             | 0,25                | -0,5            | 0,25                | -0,25                            |
| 2        | 4     | 1,5             | 2,25                | 2,5             | 6,25                | 3,75                             |
| $\Sigma$ |       |                 | 5                   |                 | 9                   | 5                                |

Tafel L11. Zwischenwerte zur Berechnung der Aufgabe 2.11c

| $x_i$    | $y_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $y_i - \bar{y}$ | $(y_i - \bar{y})^2$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ |
|----------|-------|-----------------|---------------------|-----------------|---------------------|----------------------------------|
| 1        | 1     | -1,5            | 2,25                | -6,5            | 42,25               | 9,75                             |
| 2        | 4     | -0,5            | 0,25                | -3,5            | 12,25               | 1,75                             |
| 3        | 9     | 0,5             | 0,25                | 1,5             | 2,25                | 0,75                             |
| 4        | 16    | 1,5             | 2,25                | 8,5             | 72,25               | 12,75                            |
| $\Sigma$ |       |                 | 5                   |                 | 129                 | 25                               |

- c) In diesem Wertebereich liegen die Mittelwerte  $\bar{x} = 2,5$  und  $\bar{y} = 7,5$  vor. Mit den in Tafel L11 dargestellten Werten folgt für die Größen

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{3} 25 = 8,33,$$

$$s_x^2 = 1,67, \quad s_x = 1,29$$

$$s_y^2 = 43,0, \quad s_y = 6,56,$$

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{8,33}{1,29 \cdot 6,56} = 0,984.$$

Auch für diesen Wertebereich ist der lineare Zusammenhang im Bild L7 eingetragen. Insgesamt ist zu sehen, daß der Korrelationskoeffizient keine Aussagen über einen evtl. vorhandenen nichtlinearen Zusammenhang erlaubt. Er ist ein Maß für den Grad der Annäherung der Meßwerte an eine Gerade.

## Aufgabe 2.12

Der empirisch ermittelte Korrelationskoeffizient ergibt sich aus

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Mit den Mittelwerten  $\bar{x} = 3$  und  $\bar{y} = 7$  und den in Tafel L 12 dargestellten Werten ergibt sich der Korrelationskoeffizient zu

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{32}{\sqrt{28 \cdot 52}} = \frac{32}{5,3 \cdot 7,21}$$

$$\hat{\rho}(X, Y) = 0,84.$$

Da der berechnete Korrelationskoeffizient größer als der kritische Korrelationskoeffizient ist, ist er mit 95 % statistisch gesichert.

Tafel L 12. Zwischenwerte zur Berechnung der Aufgabe 2.12

| $x_i$    | $y_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $y_i - \bar{y}$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(y_i - \bar{y})^2$ |
|----------|-------|-----------------|-----------------|----------------------------------|---------------------|---------------------|
| 0        | 3     | -3              | -4              | 12                               | 9                   | 16                  |
| 2        | 6     | -1              | -1              | 1                                | 1                   | 1                   |
| 1        | 4     | -2              | -3              | 6                                | 4                   | 9                   |
| 4        | 11    | 1               | 4               | 4                                | 1                   | 16                  |
| 3        | 7     | 0               | 0               | 0                                | 0                   | 0                   |
| 5        | 10    | 2               | 3               | 6                                | 4                   | 9                   |
| 6        | 8     | 3               | 1               | 3                                | 9                   | 1                   |
| $\Sigma$ |       |                 |                 | 32                               | 28                  | 52                  |

## Aufgabe 2.13

Die Korrelationskoeffizienten werden mit der Hypothese  $H_0: \rho(X, Y) = 0$  und dem  $t$ -Test auf Signifikanz geprüft. Die Korrelationskoeffizienten sind signifikant, wenn

$$\left| \frac{\hat{\rho}(X, Y)}{\sqrt{1 - \hat{\rho}^2(X, Y)}} \sqrt{n - m} \right| > t_{\alpha, f}$$

ist. Die Werte des ersten Teils des Tests sind in Tafel L 13 für  $n = 67$  und  $m = 7$  eingetragen.

Tafel L 13. Berechnete Testwerte  $t$  für Aufgabe 2.13

|       | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $x$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $u_1$ | —     |       |       |       |       |       |     |
| $u_2$ | 2,97  | —     |       |       |       |       |     |
| $u_3$ | 0,40  | 0,26  | —     |       |       |       |     |
| $u_4$ | 0,39  | 1,76  | 1,03  | —     |       |       |     |
| $u_5$ | 1,88  | 2,60  | 0,56  | 0,09  | —     |       |     |
| $u_6$ | 0,36  | 1,13  | 0,61  | 0,12  | 0,12  | —     |     |
| $x$   | 3,87  | 8,25  | 0,60  | 0,65  | 3,12  | 0,45  | —   |

Mit den Tafelwerten für den  $t$ -Test (s. Anhang, Tafel A2)

$$t_{0,1;60} = 1,67; \quad t_{0,01;60} = 2,66$$

ergibt sich die in Tafel L 14 dargestellte Matrix der signifikanten Korrelationskoeffizienten. Für die Sicherheit von 99 % sind nur noch die unterstrichenen Korrelationskoeffizienten statistisch gesichert.

|       | $u_1$        | $u_2$         | $u_3$  | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$         | $x$ |
|-------|--------------|---------------|--------|-------|-------|---------------|-----|
| $u_1$ | <u>0,358</u> |               |        |       |       |               |     |
| $u_2$ |              |               |        |       |       |               |     |
| $u_3$ |              |               |        |       |       |               |     |
| $u_4$ |              |               | -0,221 |       |       |               |     |
| $u_5$ |              | 0,236         | -0,318 |       |       |               |     |
| $u_6$ |              |               |        |       |       |               |     |
| $x$   | <u>0,447</u> | <u>-0,729</u> |        |       |       | <u>-0,374</u> |     |

Tafel L 14  
Statistisch gesicherte  
Zusammenhänge  
für Aufgabe 2.13

## Aufgabe 3.1

Mit der Signalbeschreibung

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

folgt für die Autokorrelationsfunktion  $R_{xx}(\tau)$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} a \sin(\omega_0 t + \varphi) a \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) dt.$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ergibt sich mit

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \omega_0 t + \varphi$$

$$\alpha = 2(\omega_0 t + \varphi) - \beta.$$

Aus dem Zusammenhang

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi$$

erhält man durch Einsetzen der Beziehung für  $\alpha$  die Vorschrift für  $\beta$  zu  $\beta = -\omega_0 \tau$ .  
Damit ergibt sich für die Größe  $\alpha$

$$\alpha = 2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau.$$

Mit diesen beiden Beziehungen ergibt sich unter Beachtung, daß  $\cos(-\omega_0\tau) = \cos \omega_0\tau$  ist, für die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned}
 R_{xx}(\tau) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} -\frac{a^2}{2} [\cos \{2(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 \tau\} - \cos \omega_0 \tau] dt \\
 &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau \int_{-T_0}^{T_0} dt - \frac{a^2}{2} \int_{-T_0}^{T_0} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi + \omega_0 \tau) dt \\
 &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau \frac{2T_0}{2T_0} - \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2} \frac{1}{2T_0} \underbrace{\int_{-T_0}^{T_0} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi + \omega_0 \tau) dt}_{\rightarrow 0 \text{ (Abschätzung)}},
 \end{aligned}$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

Es ist zu sehen, daß die Frequenz und die Amplitude des Signals in der Korrelationsfunktion enthalten sind. Die Phaseninformation des Signals ist in der Autokorrelationsfunktion nicht enthalten. Der Effektivwert des Signals ergibt sich zu

$$\sqrt{R_{xx}(0)} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = 220 \text{ V.}$$

### Aufgabe 3.2

Auf der Grundlage der Beziehung

$$\hat{R}_{xx}(mT) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(iT) x(i+m)T$$

ergeben sich mit den Meßwerten von Tafel 3.7 für die Autokorrelationsfunktion folgende Werte:

$$\hat{R}_{xx}(0) = \frac{1}{8} (0 + 1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 1) = \frac{12}{8} = 1,5$$

$$\hat{R}_{xx}(1) = \frac{1}{8} (0 + 2 + 2 + 0 - 0 + 2 + 2 - 0) = \frac{8}{8} = 1,0$$

$$\hat{R}_{xx}(2) = \frac{1}{8} (0 + 1 + 0 - 1 - 0 + 1 - 0 - 1) = 0$$

$$\hat{R}_{xx}(3) = \frac{1}{8} (0 + 0 - 2 - 2 - 0 - 0 - 2 - 2) = -\frac{8}{8} = -1,0$$

$$\hat{R}_{xx}(4) = \frac{1}{8} (0 - 1 - 4 - 1 + 0 - 1 - 4 - 1) = -\frac{12}{8} = -1,5$$

$$\hat{R}_{xx}(5) = \frac{1}{8} (0 - 2 - 2 + 0 + 0 - 2 - 2 - 0) = -\frac{8}{8} = -1,0$$

$$\hat{R}_{xx}(6) = \frac{1}{8} (0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 - 0 + 1) = 0$$

$$\hat{R}_{xx}(7) = \frac{1}{8} (0 + 0 + 2 + 2 + 0 - 0 + 2 + 2) = \frac{8}{8} = 1,0.$$

Im Bild L8 ist der Verlauf der Korrelationsfunktion dargestellt.

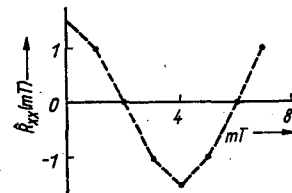


Bild L8. Korrelationsfunktion zu Aufgabe 3.2

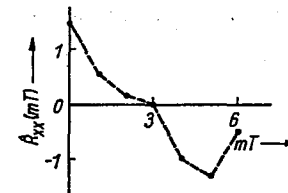


Bild L9. Korrelationsfunktion zu Aufgabe 3.3

### Aufgabe 3.3

Mit der Gleichung

$$\hat{R}_{xx}(mT) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} x(iT) x[(i+m)T]$$

ergeben sich für die Werte der Korrelationsfunktion des in Tafel 3.8 dargestellten Signals

$$\hat{R}_{xx}(0) = \frac{1}{8} (0 + 1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 1) = \frac{12}{8} = 1,5$$

$$\hat{R}_{xx}(1) = \frac{1}{7} (0 + 2 - 2 - 0 - 0 + 2 + 2) = \frac{4}{7} = 0,57$$

$$\hat{R}_{xx}(2) = \frac{1}{6} (0 - 1 + 0 + 1 - 0 + 1) = \frac{1}{6} = 0,167$$

$$\hat{R}_{xx}(3) = \frac{1}{5} (0 + 0 - 2 + 2 - 0) = 0$$

$$\hat{R}_{xx}(4) = \frac{1}{4} (0 - 1 - 4 + 1) = -\frac{4}{4} = -1,0$$

$$\hat{R}_{xx}(5) = \frac{1}{3} (0 - 2 - 2) = -\frac{4}{3} = -1,33$$

$$\hat{R}_{xx}(6) = \frac{1}{2} (0 - 1) = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

Die Autokorrelationsfunktion ist im Bild L9 dargestellt.

### Aufgabe 3.4

Unter Verwendung der Berechnungsvorschrift

$$\hat{R}_{xx}(mT) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(iT) x[(i+m)T]$$

und den Signalwerten von Tafel 3.9 ergeben sich für die unnormierte und normierte Autokorrelationsfunktion

a) ohne Zentrierung

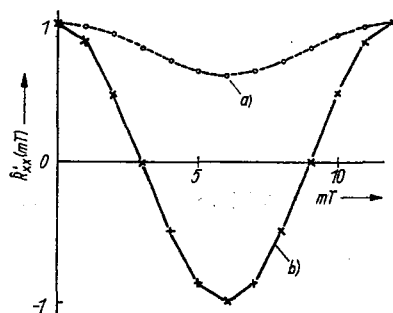
$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{xx}(0) &= \frac{1}{12} (4 + 5,76 + 6,25 + 5,76 + 4 + 2,25 + 1 + 0,36 + 0,25 + 0,36 + 1 + 2,25) \\
 &= \frac{33,24}{12} = 2,77
 \end{aligned}$$

$$\hat{R}'_{xx}(0) = \frac{2,77}{2,77} = 1,00.$$

Für die weiteren Verschiebungen ergeben sich die in Tafel L15 angegebenen Werte, die im Bild L10 dargestellt sind.

Tafel L15. Werte der Korrelationsfunktion zu Aufgabe 3.4a

|                     |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $mT$                | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
| $\hat{R}'_{xx}(mT)$ | 1    | 0,97 | 0,91 | 0,81 | 0,72 | 0,65 | 0,62 | 0,65 |
| $mT$                | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   |      |
| $\hat{R}'_{xx}(mT)$ | 0,72 | 0,81 | 0,91 | 0,97 | 1    | 0,97 | 0,91 |      |

Bild L10  
Korrelationsfunktion zu Aufgabe 3.4

## b) mit Zentrierung

Für  $\bar{x} = 1,5$  ergibt sich auf Grundlage der in Tafel L16 angegebenen Meßwerte

$$\begin{aligned}\hat{R}_{xx}(0) &= \frac{1}{12} (0,25 + 0,81 + 1 + 0,81 + 0,25 + 0 + 0,25 + 0,81 + 1 + 0,81 + 0,25 + 0) \\ &= \frac{6,24}{12} = 0,52 = \sigma_x^2\end{aligned}$$

$$\hat{R}'_{xx}(0) = \frac{0,52}{0,52} = 1.$$

Die Werte der Korrelationsfunktion für die Verschiebungen  $m > 0$  sind in Tafel L17 angegeben und ebenfalls im Bild L10 eingetragen. Im Bild L10 wird der Einfluß des Mittelwerts auf die Autokorrelationsfunktion sehr deutlich.

Tafel L16. Meßwerte zu Aufgabe 3.4b

|         |     |     |   |     |     |   |      |      |    |      |      |    |
|---------|-----|-----|---|-----|-----|---|------|------|----|------|------|----|
| $iT$    | 1   | 2   | 3 | 4   | 5   | 6 | 7    | 8    | 9  | 10   | 11   | 12 |
| $x(iT)$ | 0,5 | 0,9 | 1 | 0,9 | 0,5 | 0 | -0,5 | -0,9 | -1 | -0,9 | -0,5 | 0  |

Tafel L17. Werte der Korrelationsfunktion zu Aufgabe 3.4b

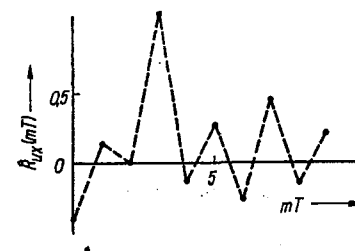
|                     |       |      |     |     |      |       |      |     |
|---------------------|-------|------|-----|-----|------|-------|------|-----|
| $mT$                | 0     | 1    | 2   | 3   | 4    | 5     | 6    |     |
| $\hat{R}'_{xx}(mT)$ | 1     | 0,87 | 0,5 | 0   | -0,5 | -0,87 | -1   |     |
| $mT$                | 7     | 8    | 9   | 10  | 11   | 12    | 13   | 14  |
| $\hat{R}'_{xx}(mT)$ | -0,87 | -0,5 | 0   | 0,5 | 0,87 | 1     | 0,87 | 0,5 |

## Aufgabe 3.5

Die auf der Grundlage der in Tafel 3.10 dargestellten Meßwerte durchgeführten Rechnungen ergeben die in Tafel L18 angegebenen Werte für die Kreuzkorrelationsfunktion  $\hat{R}_{ux}(mT)$ . Aus Bild L11 ist zu erkennen, daß das Maximum bei einer Verschiebung von  $m = 3$  auftritt. Damit wird eine Totzeit von  $T_t = 3T$  aus der Korrelationsanalyse ermittelt.

Tafel L18. Werte der Kreuzkorrelationsfunktion zu Aufgabe 3.5

|                    |       |      |                |      |       |      |
|--------------------|-------|------|----------------|------|-------|------|
| $mT$               | 0     | 1    | 2              | 3    | 4     | 5    |
| $\hat{R}_{ux}(mT)$ | -0,42 | 0,13 | -0,05<br>-0,03 | 1,07 | -0,13 | 0,27 |
| $mT$               | 6     | 7    | 8              | 9    |       |      |
| $\hat{R}_{ux}(mT)$ | -0,29 | 0,46 | -0,16<br>-0,23 | 0,22 |       |      |

Bild L11  
Kreuzkorrelationsfunktion zu Aufgabe 3.5

## Aufgabe 3.6

## a) Aus der Beziehung

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

ergibt sich mit der vorgegebenen Korrelationsfunktion

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Wird für den Ausdruck

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$$

verwendet und beachtet, daß die sin-Funktion ungerade ist, erhält man für das Spektrum den Ausdruck

$$S_{xx}(\omega) = \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 \tau \cos \omega\tau d\tau.$$

Dieser Ausdruck kann durch Anwendung des Zusammenhangs

$$\frac{1}{2} [\cos \alpha + \cos \beta] = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

mit

$$\omega_0 \tau = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \omega \tau = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\alpha = \omega \tau + \omega_0 \tau = 2\omega_0 \tau - \beta, \quad \omega \tau = \frac{2\omega_0 \tau - \beta - \beta}{2} = \omega_0 \tau - \beta$$

umgeformt werden in

$$S_{xx}(\omega) = \frac{a^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \{\cos(\omega \tau + \omega_0 \tau) + \cos(\omega_0 \tau - \omega \tau)\} d\tau,$$

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2\pi}{2\pi} \frac{a^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \{\cos \tau (\omega_0 + \omega) + \cos \tau (\omega_0 - \omega)\} d\tau.$$

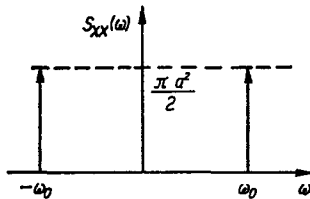
Mit den Ausdrücken

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau d\tau = \delta(\omega) \quad \text{und} \quad \delta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{für } \omega = 0 \end{cases} \quad \text{verschobener Diracimpuls}$$

ergibt sich für das Leistungsdichtespektrum

$$S_{xx}(\omega) = \frac{\pi a^2}{2} [\delta(\omega_0 + \omega) + \delta(\omega_0 - \omega)].$$

Das Spektrum stellt ein Linienspektrum dar und ist im Bild L12 dargestellt.

Bild L12  
Leistungsdichtespektrum zu Aufgabe 3.6

b) Die Leistung ergibt sich aus der Beziehung

$$P = U^2/R \quad \text{mit} \quad U^2 = \overline{x^2(t)}.$$

Unter Verwendung der Parsevalschen Beziehung erhält man für

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega$$

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega_0 + \omega) + \delta(\omega_0 - \omega)] d\omega$$

$$\overline{x^2(t)} = \frac{a^2}{2}.$$

Damit ergibt sich die Leistung zu

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\overline{x^2(t)}}{R} = \frac{a^2}{2R} = 1 \text{ kW}.$$

## Aufgabe 3.7

a) Es ergeben

$$\overline{x^2(t)} = R_{xx}(0) = 9 + 25 = 34$$

$$\bar{x}^2(t) = R_{xx}(\infty) = 9$$

$$\bar{x}(t) = 3.$$

b) Die Standardabweichung ergibt sich aus

$$s^2 = \overline{x^2(t)} - \bar{x}^2(t) = 25$$

$$\sigma = 5.$$

c) Das Autoleistungsdichtespektrum wird in folgenden Schritten ermittelt:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} (9 + 25 e^{-5|\tau|}) \cos \omega \tau d\tau$$

$$S_{xx}(\omega) = 18 \int_0^{\infty} \cos \omega \tau d\tau + 50 \int_0^{\infty} e^{-5\tau} \cos \omega \tau d\tau$$

$$S_{xx}(\omega) = 18 \delta(\omega) + 50 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-5\tau} \cos \omega \tau d\tau}_{I_1},$$

$$I_1 = \frac{1}{\omega} e^{-5\tau} \sin \omega \tau - \underbrace{\int_0^{\infty} (-5) e^{-5\tau} \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau d\tau}_{I_2},$$

$$I_2 = \frac{5}{\omega^2} e^{-5\tau} \cos \omega \tau - \int_0^{\infty} \left( -\frac{25}{\omega^2} e^{-5\tau} \cos \omega \tau \right) d\tau,$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-5\tau} \cos \omega \tau d\tau$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-5\tau} \sin \omega \tau - \frac{5}{\omega^2} e^{-5\tau} \cos \omega \tau - \frac{25}{\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-5\tau} \cos \omega \tau d\tau$$

$$I_1 \left( 1 + \frac{25}{\omega^2} \right) = \frac{1}{\omega} e^{-5\tau} \sin \omega \tau - \frac{5}{\omega^2} e^{-5\tau} \cos \omega \tau$$

$$I_1 = \frac{\omega}{\omega^2 + 25} e^{-5\tau} \sin \omega \tau - \frac{5}{\omega^2 + 25} e^{-5\tau} \cos \omega \tau.$$

Damit ergibt sich das Autoleistungsspektrum zu

$$S_{xx}(\omega) = 18\delta(\omega) + 50I_1 \Big|_0^\infty,$$

$$S_{xx}(\omega) = 18\delta(\omega) + \frac{250}{\omega^2 + 25}.$$

### Aufgabe 3.8

- a) Unter der Annahme, daß die Werte normalverteilt sind und  $\bar{x} = 0$ , ergibt sich mit einer statistischen Sicherheit von 95%

$$-1,96\sigma_x < x(t) < 1,96\sigma_x.$$

Damit gilt

$$\hat{\sigma}_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{3,92} = \frac{3,36 - (-2,25)}{3,92} = 1,43,$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = 2,04 \text{ (exakter Wert: 1,39).}$$

- b) Für  $n = 40$  Beobachtungen ergibt sich entsprechend den Beziehungen im Abschnitt 3.2.3.4 für einen Abfall des Spektrums von 80 dB/Dekade ein Faktor  $k = 2,0$ . Um die Nulldurchgänge  $n_0$  ermitteln zu können, müssen die Meßwerte zentriert werden:  $x_z(t) = x(t) - \bar{x}$ . Dieses kann man sich sparen und dafür die Durchgänge durch den Mittelwert  $\bar{x}$  zählen. Mit  $\bar{x} = -0,08$  (exakter Wert) ergibt sich die Anzahl der Nulldurchgänge zu  $n_0 = 17$ .

Damit erhält man für die unterschiedlichen Tastperioden die in Tafel L19 angegebenen Grenzfrequenzen.

| Tastzeit $T$                       | 0,1 s | 1 s   | 10 s   |
|------------------------------------|-------|-------|--------|
| Meßdauer<br>(1. Wert bei $t = 0$ ) | 3,9 s | 39 s  | 390 s  |
| $\bar{n} = n_0/T_0$                | 4,36  | 0,436 | 0,0436 |
| $\omega_g/s^{-1}$                  | 8,72  | 0,872 | 0,0872 |

Tafel L19  
Grenzfrequenzen  
zu Aufgabe 3.8b

- c) Aus der Beziehung

$$\overline{x^2} = R_{xx}(0) = \sigma_x^2 \quad \text{für } \bar{x} = 0 \text{ (zentrierte Werte)}$$

kann mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{xx}(\omega) d\omega$$

bei Näherung des Spektrums durch ein Rechteck aus

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\pi} S_{xx}(0) \omega_g$$

| Tastzeit    | 0,1 s   | 1 s    | 10 s   |
|-------------|---------|--------|--------|
| $S_{xx}(0)$ | 0,735 s | 7,35 s | 73,5 s |

Tafel L20  
Leistungsspektrumswerte  
zu Aufgabe 3.8c

der Gleichanteil  $S_{xx}(0)$  aus der Beziehung

$$S_{xx}(0) = \frac{\sigma^2 \pi}{\omega_g}$$

ermittelt werden. In Tafel L20 sind die Ergebnisse für die gewählten Tastzeiten dargestellt. Der prinzipielle Verlauf der approximierten Spektren ist im Bild L13 dargestellt. Er zeigt, daß bei konstanter Leistung des Signals mit der Zunahme der Grenzfrequenz die Höhe des Spektrums abnimmt.

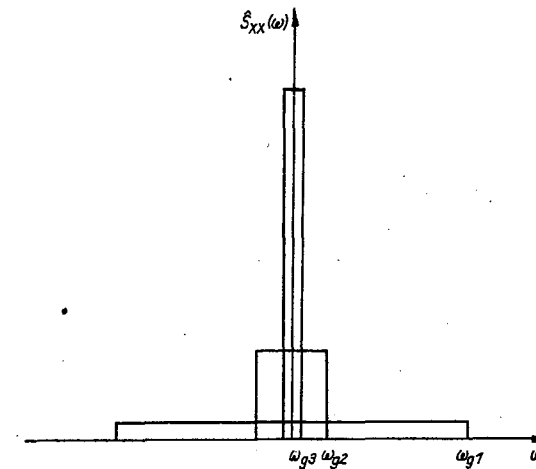


Bild L13  
Prinzipieller Verlauf  
der approximierten  
Spektren zu Aufgabe 3.8

### Aufgabe 3.9

- a) Die Mittelwertbildung der ersten und vierten Serie ergibt  $\bar{x}_1 = 3,11$ ,  $\bar{x}_4 = 19,38$ . Aus der Differenz beider Mittelwerte ist bereits auf einen Trend zu schließen. Für den F-Test gilt

$$F = \frac{s_R^2}{s_x^2},$$

$$s_R^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2; \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i = 11,1$$

$$s_R^2 = (3,11 - 11,1)^2 + (19,38 - 11,1)^2 = 63,8 + 68,6 = 132,1,$$

$$s_x^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2 = \frac{116,5 + 123}{2} = 119,8,$$

$$F = \frac{132,1}{119,8} = 1,10 < F_{0,05; 18; 1} = 4,41.$$

Damit liegt bezüglich der Streuung  $\sigma^2$  Stationarität vor. Für den Test auf Gleichheit der Erwartungswerte der ersten und vierten Serie, d.h. der Überprüfung der Hypothese  $H: \mu_0 = \mu_1 = \mu_4$ , erhält man mit den Beziehungen im Abschnitt 3.4.2

$$\frac{3,11 - 19,38}{\sqrt{116,5 \cdot 9 + 123 \cdot 9}} \sqrt{\frac{100 \cdot 18}{20}} = -3,33,$$

$$|t| = 3,33 > t_{0,05; 18} = 2,10.$$

Damit wird die Hypothese abgelehnt und ein Trend in der Zufallsgröße mit einer Sicherheit von 95% bestätigt.

b) Der Parameter  $\hat{a}$  der einfachen Trendfunktion

$$\hat{x}(kT) = \hat{a}kT$$

ergibt sich zu

$$\hat{a} = \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_1}{t_4 - t_1} = \frac{19,38 - 3,11}{30 \text{ s}} = 0,54 \text{ s}^{-1}$$

mit  $t_1 = 5 \text{ s}$  und  $t_4 = 35 \text{ s}$ .

Der Trendverlauf ist im Bild L14 eingetragen.

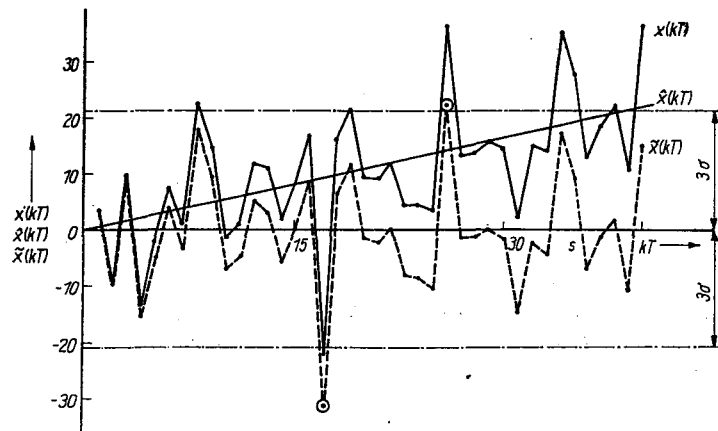


Bild L14. Verlauf der Signale  $x(kT)$ ,  $\hat{x}(kT)$  und  $\tilde{x}(kT)$  zu Aufgabe 3.9

c) Die Korrektur des Trends erfolgt durch die Beziehung

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

Das Ergebnis der Korrektur ist im Bild L14 dargestellt.

d) Für eine statistische Sicherheit von 99,7% ergeben sich die Toleranzgrenzen zu

$$-3\sigma < x(t) - \bar{x} < 3\sigma.$$

Mit  $\sigma = 7$  und  $\bar{x} = -0,0975$  erhält man den Bereich  $-20,9 < x(t) < 21,1$ . Damit ergeben sich der 17. und 26. trendkorrigierte Meßwert der Zufallsgröße als Fehlmessung.

### Aufgabe 3.10

a) Als Lösungsschema wird der Gauß-Algorithmus verwendet:

$$\begin{bmatrix} T & x \end{bmatrix} \quad \hat{a} = [T^T T]^{-1} T^T x$$

$$\begin{bmatrix} T^T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T^T T & T^T x \end{bmatrix} \quad T^T T \hat{a} = T^T x$$

Gauß-Algorithmus  $\rightarrow$  Rückwärtsrekursion  $\hat{a}$

Damit gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,1 \\ 11,6 \\ 20,4 \\ 20,9 \\ 41,8 \\ 56,2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 166 \\ 756,3 \\ 3782,7 \end{bmatrix}.$$

Die Auflösung der Gleichungen

$$1. 6\hat{a}_0 + 21\hat{a}_1 + 91\hat{a}_2 = 166,$$

$$2. 21\hat{a}_0 + 91\hat{a}_1 + 441\hat{a}_2 = 756,3,$$

$$3. 91\hat{a}_0 + 441\hat{a}_1 + 2275\hat{a}_2 = 3782,7$$

ergibt die Parameter:  $\hat{a}_0 = 1,93$ ,  $\hat{a}_1 = 3,02 \text{ s}^{-1}$ ,  $\hat{a}_2 = 1,0 \text{ s}^{-2}$ . Die Signifikanz der Parameter wird mit dem  $t$ -Test für die Hypothese  $H_0: a_i = 0$  nach der Vorschrift

$$|\hat{a}_i| > t_{\alpha, f} s_R \sqrt{p_{ii}}$$

durchgeführt.

Für die Reststreuung  $s_R^2\{z\}$  erhält man nach der Beziehung

$$s_R^2 = \frac{1}{l - n - 1} \sum_{k=1}^l [x(kT) - \hat{x}(kT)]^2$$

die in Tafel L21 dargestellten Zwischenwerte. Damit ergibt sich die Reststreuung zu

$$s_R^2 = 0,46.$$

Die Hauptdiagonalelemente  $p_{ii}$  der Matrix  $P$

$$P = [T^T T]^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{bmatrix}^{-1}$$

Tafel L 21. Zwischenwerte zu Aufgabe 3.10b ;

| $kT$ | $\hat{a}_0$ | $\hat{a}_1 kT$ | $\hat{a}_2 (kT)^2$ | $\hat{x}(kT)$ | $[x(kT) - \hat{x}(kT)]^2$ |
|------|-------------|----------------|--------------------|---------------|---------------------------|
| 1    | 1,93        | 3,02           | 1                  | 5,95          | 0,02                      |
| 2    |             | 6,04           | 4                  | 11,97         | 0,14                      |
| 3    |             | 9,06           | 9                  | 19,99         | 0,17                      |
| 4    |             | 12,08          | 16                 | 30,01         | 0,01                      |
| 5    |             | 15,10          | 25                 | 42,03         | 0,05                      |
| 6    |             | 18,12          | 36                 | 56,05         | 0,02                      |
|      |             |                |                    |               | $\Sigma 0,41$             |

ergeben sich zu

$$P = \begin{bmatrix} 19,57 & \dots & \dots \\ \dots & 1,40 & \dots \\ \dots & \dots & 0,03 \end{bmatrix}.$$

Damit erhält man folgende Aussagen aus dem Signifikanztest (Parameter ohne Dimension):

$$\hat{a}_0 = 1,93 < 4,303 \cdot 0,46 \sqrt{19,57} = 8,76 \quad \text{nicht signifikant,}$$

$$\hat{a}_1 = 3,02 > 4,303 \cdot 0,46 \sqrt{1,40} = 2,34 \quad \text{signifikant,}$$

$$\hat{a}_2 = 1,00 > 4,303 \cdot 0,46 \sqrt{0,03} = 0,34 \quad \text{signifikant.}$$

Die Matrix  $T$  lautet für die Abtastzeit  $T = 0,5$  s für den gewählten Modellansatz:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1,5 & 2,25 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2,5 & 6,25 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

### Aufgabe 3.11

Entsprechend dem Lösungsschema für den Gauß-Algorithmus (s. Aufgabe 3.10) erhält man mit den Werten von Tafel 3.13 und dem gewählten Modellansatz für die Matrix  $T^T$

$$T^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0,86 & 1 & 0,86 & 0,5 & 0 & -0,5 & -0,86 & -1 & -0,86 & -0,5 \\ 1 & 0,86 & 0,5 & 0 & -0,5 & -0,86 & -1 & -0,86 & -0,5 & 0 & 0,5 & 0,86 \end{bmatrix}$$

und für die Gleichung

$$T^T T \hat{a} = T^T x$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 5,956 & 0 \\ 0 & 0 & 5,956 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,45 \\ 6,00 \\ 3,00 \end{bmatrix}.$$

Damit ergeben sich die Schätzwerte der Parameter zu

$$\hat{a}_0 = -0,037, \quad \hat{a}_1 = 1,007, \quad \hat{a}_2 = 0,503.$$

Die wahren Parameter waren  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0,5$ .

### Aufgabe 3.12

Im Bild L15a ist der Verlauf der gemessenen und mit einem nichtrekursiven Filter ermittelten Signalwerte dargestellt. Deutlich ist die gute Filterung der hochfrequenten Störung zu erkennen. Die durch das Filter hervorgerufene Phasenverschiebung ist null.

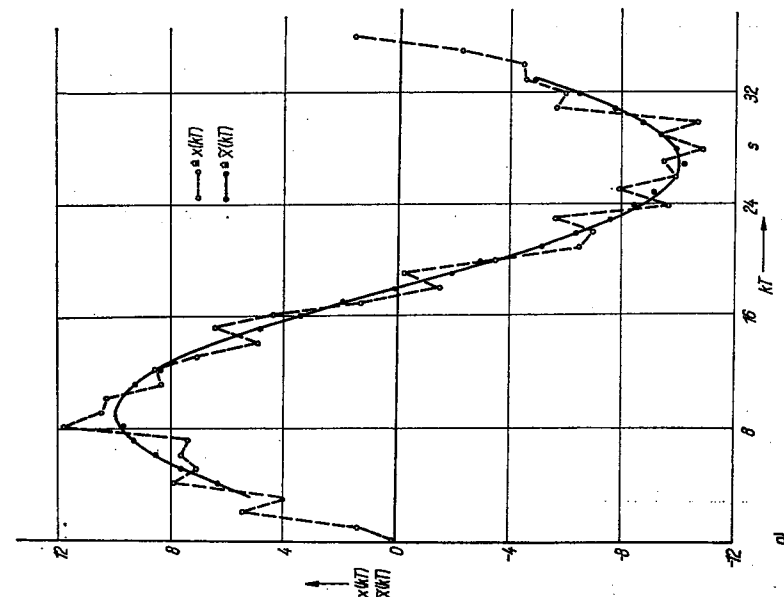
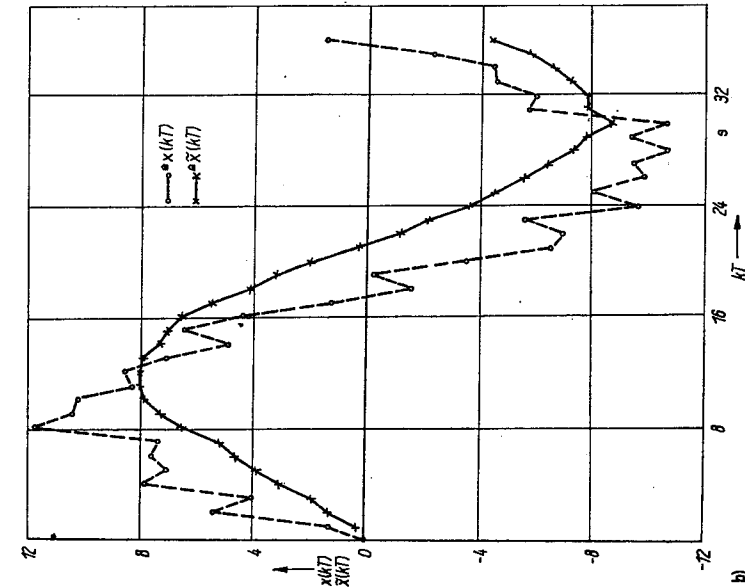


Bild L15. Verlauf der gemessenen und gefilterten Signalwerte zu Aufgabe 3.12  
a) nichtrekursives Filter; b) rekursives Filter

Der im Bild L15b dargestellte Verlauf der gefilterten Werte zeigt, daß rekursive Filter ebenfalls die Störung beseitigen, aber eine Phasenverschiebung durch das Filter verursacht wird.

**Aufgabe 4.1**

Die Verstärkung wird aus der Darstellung im Bild L16 bestimmt zu

$$K = \frac{x(\infty)}{u_0} = 5.$$

Nach dem Verfahren von Strejc werden aus Bild L16 bestimmt

$$t_{0,7} = 18,1 \text{ s} = 1,2 \text{ s} (T_1 + T_2),$$

$$T_1 + T_2 = 15,1 \text{ s},$$

$$t_{0,7/4} = 4,53 \text{ s},$$

$$x(t_{0,7/4}) = 0,63, \text{ d.h. } h(t_{0,7/4}) = 0,13.$$

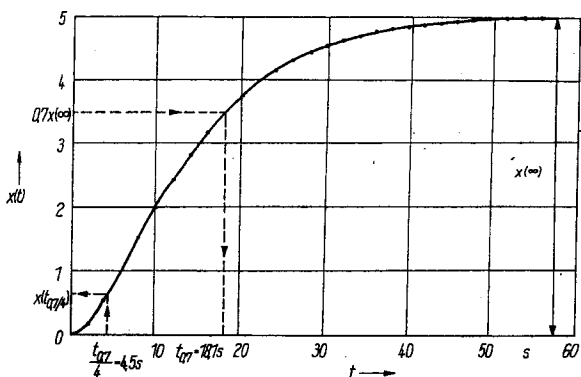


Bild L16  
Sprungantwort  
nach Tafel 4.8

Aus Tafel 4.2 wird für den Wert  $h(t_{0,7/4}) = 0,13$  das Zeitkonstantenverhältnis  $T_2/T_1 = 0,5$  entnommen. Damit gilt für

$$T_1 = \frac{t_{0,7}}{1,2 \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right)} = \frac{18,1 \text{ s}}{1,2 (1 + 0,5)} = 10,1 \text{ s},$$

$$T_2 = 15,1 \text{ s} - T_1 = 5,0 \text{ s}$$

und die Übertragungsfunktion  $G(p)$

$$G(p) = \frac{5}{(1 + p \cdot 10,1 \text{ s}) (1 + p \cdot 5,0 \text{ s})}.$$

**Aufgabe 4.2**

Aus der im Bild L17 dargestellten Sprungantwort werden folgende Kenngrößen ermittelt:

$$K = \frac{x(\infty)}{u_0} = 5,$$

$$t_{0,63} = 23,6 \text{ s},$$

$$t_{0,63/2} = 11,8 \text{ s},$$

$$x(t_{0,63/2}) = 1,2, \text{ d.h. } h(t_{0,63/2}) = 1,2/5 = 0,24.$$

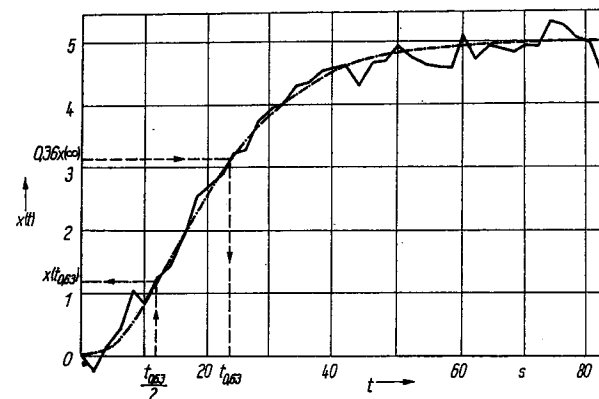


Bild L17  
Sprungantwort  
nach Tafel 4.9

- a) Anwendung findet das von *Sponer* entwickelte Verfahren. Aus Tafel 4.4 erhält man für  $h(t_{0,63/2}) = 0,24$  die Ordnung  $n = 3$  und den Faktor  $D'(n) = 0,319$ . Damit erhält man für die Zeitkonstante  $T'$ :

$$T' = D'(n) t_{0,63} = 0,319 \cdot 23,6 \text{ s} = 7,5 \text{ s}.$$

Für das Gesamtmodell gilt somit

$$G(p) = \frac{5}{(1 + p \cdot 7,5 \text{ s})^3}.$$

- b) Für das Modell mit  $n$  gestaffelten Zeitkonstanten wird das Verfahren von *Radtke* angewendet. Aus Tafel 4.4 erhält man für  $h(t_{0,63/2}) = 0,24$  die Ordnung  $n = 3$  und den Faktor  $D(n) = 0,522$ . Für die Zeitkonstante  $T'$  gilt

$$T' = D(n) t_{0,63} = 0,522 \cdot 23,6 \text{ s} = 12,3 \text{ s}.$$

Das Gesamtmodell lautet dann

$$G(p) = \frac{5}{(1 + p \cdot 12,3 \text{ s}) (1 + p \cdot 6,2 \text{ s}) (1 + p \cdot 4,1 \text{ s})}.$$

Die Überprüfung der ermittelten Modelle erfolgt anhand der Übergangsfunktionen.

Modell a)

$$h(t) = 1 - \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left( \frac{t}{T'} \right)^i \right] e^{-t/T'}$$

$$\hat{x}(t_1) = 5h(t_1) = 2,5 \quad (x(t_1) = 2,71),$$

$$\hat{x}(t_2) = 5h(t_2) = 4,5 \quad (x(t_2) = 4,58);$$

Modell b)

$$h(t) = (1 - e^{-t/T'})^n,$$

$$\hat{x}(t_1) = 5h(t_1) = 2,6 \quad (x(t_1) = 2,71),$$

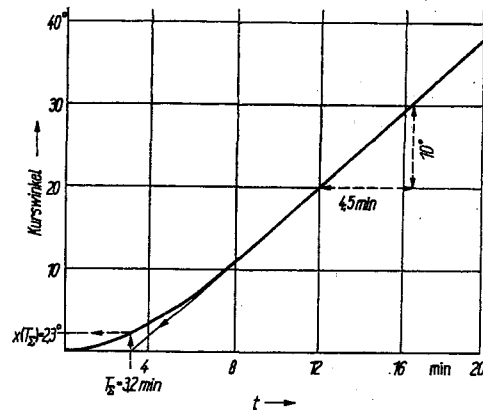
$$\hat{x}(t_2) = 5h(t_2) = 4,45 \quad (x(t_2) = 4,58).$$

**Aufgabe 4.3**

Aus der Darstellung im Bild L18 ergeben sich

$$1. K_I = \frac{\tan \alpha}{u_0} = \frac{10^\circ}{\underbrace{4,5 \text{ min}}_{\text{Anstieg } 1/u_0}} \frac{1}{10^\circ} = 0,22 \text{ min}^{-1},$$

$$2. T_E = 3,2 \text{ min} \quad \text{und} \quad x(T_E) = 2,3^\circ.$$

Bild L18  
Sprungantwort nach Tafel 4.10

a) Für die Systembeschreibung

$$G(p) = \frac{K_I}{p(1 + pT')^n}$$

ergibt sich mit

$$\frac{x(T_E)}{T_E K_I u_0} = \frac{2,25^\circ}{3,2 \text{ min} \cdot 10^\circ \cdot 0,22 \text{ min}^{-1}} = 0,32$$

aus Tafel 4.5 die Ordnung  $n = 2$ . Damit erhält man die Zeitkonstante  $T'$  zu

$$T' = \frac{T_E}{n} = \frac{3,2 \text{ min}}{2} = 1,6 \text{ min}$$

und die ermittelte Übertragungsfunktion zu

$$G(p) = \frac{0,22 \text{ min}^{-1}}{p(1 + p \cdot 1,6 \text{ min})^2}.$$

b) Für die Systembeschreibung

$$G(p) = \frac{K_I}{p \prod_{i=1}^n \left( 1 + p \frac{T'}{i} \right)}$$

ergibt sich mit

$$\frac{x(T_E)}{T_E K_I u_0} = 0,32$$

aus Tafel 4.5 die Ordnung  $n = 2$ . Damit erhält man für die Zeitkonstante

$$T' = T_E D'_1(n) = 3,2 \text{ min} \cdot 0,666 = 2,13 \text{ min}$$

und für die ermittelte Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{0,22 \text{ min}^{-1}}{p(1 + p \cdot 2,13 \text{ min})(1 + p \cdot 1,07 \text{ min})}.$$

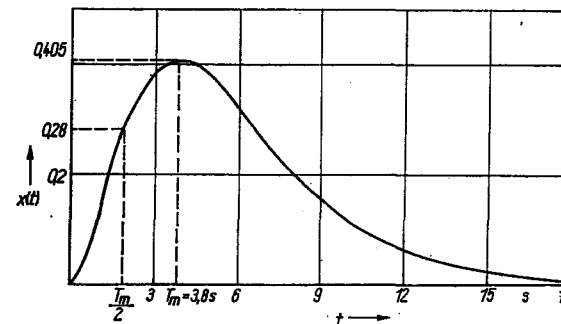
**Aufgabe 4.4**

Aus der im Bild L19 aufgetragenen Impulsantwort werden die Kennwerte

$$x(T_m) = 0,405 \quad \text{und} \quad x(T_m/2) = 0,28$$

ermittelt. Damit ergibt sich aus dem Verhältnis beider Kennwerte

$$x(T_m)/x(T_m/2) = 1,446$$

aus Tafel 4.6 eine Ordnung von  $n = 3$ .Bild L19  
Impulsantwort  
nach Tafel 4.11Für die Ordnung  $n = 3$  ergibt sich wieder aus Tafel 4.6 das Verhältnis  $T_m/T' = 2$  und damit für die Zeitkonstante  $T'$  der Wert

$$T' = 3,8 \text{ s} / 2 = 1,9 \text{ s}.$$

Der Verstärkungsfaktor  $K$  ergibt sich aus dem Tafelwert  $T'x(T_m)/K = 0,271$  (mit  $u_0 = A = 1$ ) zu

$$K = \frac{1,9 \text{ s} \cdot 0,405}{0,271} = 2,84.$$

Damit lautet die Approximation der Systembeschreibung

$$G(p) = \frac{2,84}{(1 + p \cdot 1,9 \text{ s})^3}.$$

Die Überprüfung der Modellgüte erfolgt über die Berechnung der Gleichungen

$$x(t) = \frac{u_0 K}{T'^n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t/T'},$$

$$x(t) = \frac{2,84}{(1,9 \text{ s})^3} \frac{t^2}{2} e^{-t/1,9 \text{ s}}, \quad u_0 = A = 1.$$

Für die Zeitpunkte  $t_i$  erhält man folgende Resultate:

| $t/\text{s}$           | 3     | 6     | 9    | 12   |
|------------------------|-------|-------|------|------|
| $x(t)/\text{Modell}$   | 0,39  | 0,30  | 0,15 | 0,06 |
| $x(t)/\text{Original}$ | 0,385 | 0,315 | 0,15 | 0,06 |

Die Übereinstimmung zwischen gemessener und approximierter Impulsantwort kann als gut bezeichnet werden.

#### Aufgabe 4.5

Zur Ermittlung der Parameter der Übertragungsfunktion sind aus der im Bild L20 dargestellten Impulsantwort entsprechend dem Verfahren von Radtke zu ermitteln

$x_0 = 2,97$  aus Impulsbreite  $T = 5 \text{ s}$ ,

$T_{00} = 19,9 \text{ s}$ ,  $x_m = 4,98$ ,

$x_0/x_m = 0,60$ ,  $\Delta T/T_{00} = 0,25$ .

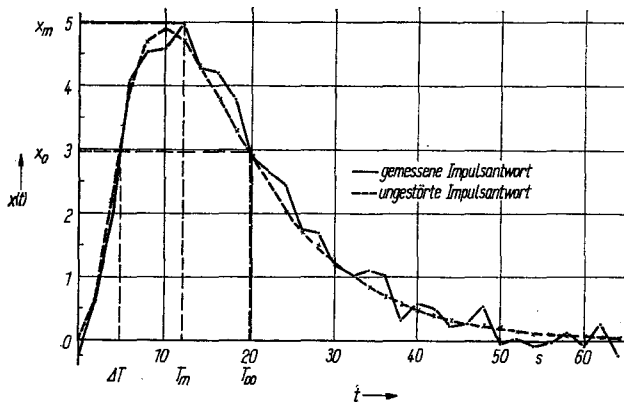


Bild L 20  
Impulsantwort  
nach Tafel 4.12

Aus Bild 4.13a wird entsprechend den Kennwerten  $x_0/x_m$  und  $T/T_{00}$  die Ordnung zu  $n = 2$  ermittelt. Mit der gewählten Ordnung  $n = 2$  und dem Kennwert  $x_0/x_m$  wird aus Bild 4.13b das Verhältnis  $T'/\Delta T = 2,2$  ermittelt. Damit ergibt sich die Zeitkonstante zu  $T' = 11 \text{ s}$ .

Die Verstärkung des Systems ermittelt sich aus

$$K = \frac{1}{u_0} \frac{x_0}{x}, \quad x = (1 - e^{-T/T'})^n.$$

Mit den bereits ermittelten Werten erhält man für  $x = 0,133$  und  $K = 5,58$ .

Damit lautet die ermittelte Übertragungsfunktion:

$$G(p) = \frac{5,58}{(1 + p \cdot 11 \text{ s})(1 + p \cdot 5,5 \text{ s})}.$$

Der Vergleich mit den wahren Parametern zeigt, daß bei stärker gestörten Systemen bei einer Auswertung mit den deterministischen Methoden größere Parameterfehler auftreten. Ist die Störung hochfrequent, bringt eine Glättung der aufgenommenen Impulsantwort eine Verbesserung der Parameterermittlung.

#### Aufgabe 4.6

Die Approximation des im Bild L21 dargestellten Frequenzgangs wird mit der Ermittlung der Geraden bei kleinen Frequenzen begonnen. Entsprechend den in Tafel 4.7 dargestellten Elementarfrequenzgängen ergeben sich für die Aufgabe folgende Teilfrequenzgänge:

- a) mit  $k^* = -1$  mit  $G_1(j\omega) = 1/j\omega \cdot 0,1 \text{ s}$ , d.h. I-Glied,
- b) mit  $k^* = -1$  mit  $G_2(j\omega) = 1/(1 + j\omega \cdot 1 \text{ s})$ , d.h.  $T_1$ -Glied,
- c) mit  $k^* = +1$  mit  $G_3(j\omega) = (1 + j\omega \cdot 0,3 \text{ s})$ , d.h.  $T_D$ -Glied,
- d) mit  $k^* = -1$  mit  $G_4(j\omega) = 1/(1 + j\omega \cdot 0,1 \text{ s})$ , d.h.  $T_1$ -Glied.

Dabei ist zu beachten, daß durch den relativ geringen Abstand zwischen den Polen und den Nullstellen eine schrittweise Korrektur des approximierten Frequenzgangs mit den im Bild 4.20 dargestellten Werten erfolgen muß. Die Vorgehensweise wird im Bild L21 gezeigt.

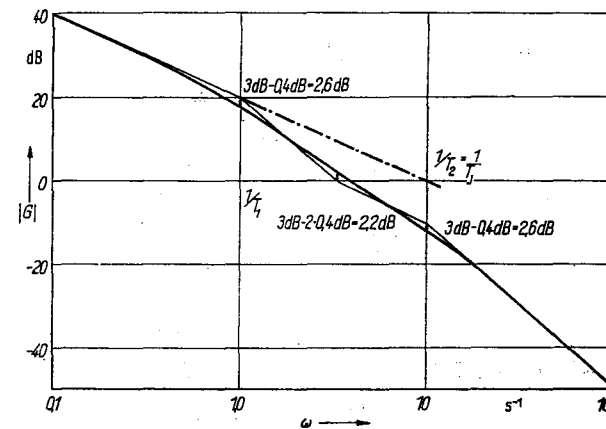


Bild L 21  
Amplitudenfrequenzgang  
nach Tafel 4.13

Aus den ermittelten Teilfrequenzgängen ergibt sich folgende Übertragungsfunktion des Systems:

$$G(p) = \frac{(1 + p \cdot 0,3 \text{ s})}{p \cdot 0,1 \text{ s} (1 + p \cdot 1 \text{ s}) (1 + p \cdot 0,1 \text{ s})}$$

#### Aufgabe 4.7

Für die Frequenzgangbeschreibung

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^m \left[ 1 + \sum_{i=1}^n a_i (j\omega)^i \right]}$$

ergibt sich aus den vorgegebenen Meßwerten für die Parameter der Ordnung  $m = 0$  und  $n = 3$ . Damit sind nach dem Verfahren von Sweda die Parameter folgenden Modells zu ermitteln:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega a_1 - \omega^2 a_2 - j\omega^3 a_3}$$

Mit den Bestimmungsgleichungen der Parameter entsprechend Abschnitt 4.3.3 erhält man

$$K = 2,7, \quad a_1 = \frac{1}{\omega_1} \frac{(1 - \omega_1^2/\omega_2^2)}{(1 - \omega_2^2/\omega_3^2)} = 14,14 \text{ s},$$

$$a_2 = 1/\omega_2^2 = 43,8 \text{ s}^2, \quad a_3 = a_1/\omega_3^2 = 29,8 \text{ s}^3$$

und somit für die Beschreibung

$$G(j\omega) = \frac{2,7}{1 + j\omega \cdot 14,14 \text{ s} - \omega^2 \cdot 43,8 \text{ s}^2 - j\omega^3 \cdot 29,8 \text{ s}^3}$$

#### Aufgabe 5.1

a) Als Lösungsschema für die Regressionsgleichung

$$\hat{a} [M^T M] = M^T x$$

wird der Gauß-Algorithmus verwendet (s. Aufgabe 3.10). Für den Modellansatz

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u$$

gilt somit unter Verwendung der Meßwerte in Tafel 5.21

$$\begin{array}{cc} & M \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1,33 \\ -0,32 \\ -0,60 \\ 1,18 \\ -1,09 \\ -0,49 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ \begin{array}{c} 6,475 \\ -0,990 \\ -1,705 \\ 6,500 \\ -3,405 \\ -0,840 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & M^T M \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1,33 \\ -0,32 \\ -0,60 \\ 1,18 \\ -1,09 \\ -0,49 \end{array} & \begin{array}{c} 6 \\ 0,01 \\ 5,05 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} M^T x \\ \begin{array}{c} 6,025 \\ 21,76 \end{array} \end{array}$$

Aus den Bestimmungsgleichungen

$$6\hat{a}_0 + 0,01\hat{a}_1 = 6,025,$$

$$0,01\hat{a}_0 + 5,05\hat{a}_1 = 21,76$$

erhält man als Schätzung für die Parameter

$$\hat{a}_0 = 1,0, \quad \hat{a}_1 = 4,3.$$

Die Restquadratsumme  $S_R$  ergibt sich aus den in Tafel L22 dargestellten Zwischenwerten zu

$$S_R = 0,779.$$

| Nr. | $\hat{a}_0 u_0$ | $\hat{a}_1 u_1$ | $\hat{x}$ | $(x - \hat{x})^2$ |
|-----|-----------------|-----------------|-----------|-------------------|
| 1   | 1               | 5,72            | 6,72      | 0,060             |
| 2   | 1               | -1,38           | -0,38     | 0,372             |
| 3   | 1               | -2,58           | -1,58     | 0,013             |
| 4   | 1               | 5,07            | 6,07      | 0,185             |
| 5   | 1               | -4,69           | -3,69     | 0,076             |
| 6   | 1               | -2,11           | -1,11     | 0,073             |

Tafel L22  
Zwischenwerte zu  
Aufgabe 5.1a

Für den Signifikanztest und die Bestimmung der Konfidenzintervalle entsprechend den Beziehungen im Abschnitt 5.2.2 ist die Ermittlung der Elemente  $p_{ii}$  der Matrix  $P = [M^T M]^{-1}$  erforderlich.

Für den Modellansatz und die vorhandenen Meßwerte gilt

$$P = \frac{1}{30,3} \begin{bmatrix} 5,05 & -0,01 \\ -0,01 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,168 & \dots \\ \dots & 0,198 \end{bmatrix}.$$

Damit ergeben sich für die Parameter  $\hat{a}_i$  nach der Vorschrift

$$|\hat{a}_i| \geq t_{\alpha/2, f} S_R \sqrt{p_{ii}}$$

mit

$$t_{\alpha/2, f} \hat{=} t_{0,025, 3} = 3,18 \quad (\text{Tafel A2}),$$

$$S_R^2 = \frac{1}{n - l - 1} S_R = \frac{1}{3} 0,779 = 0,26$$

folgende Aussagen mit einer 95%igen Sicherheit:

$$1. \hat{a}_0 \text{ ist signifikant, da } 1,0 > 3,18 \cdot 0,57 \sqrt{0,168} = 0,665,$$

$$2. \hat{a}_1 \text{ ist signifikant, da } 4,3 > 3,18 \cdot 0,51 \sqrt{0,198} = 0,737.$$

Für die Toleranzbänder erhält man nach der Beziehung

$$|\hat{a}_i - a_i| = t_{\alpha/2, f} S_R \sqrt{p_{ii}}$$

für die Parameter

$$a_0: 0,335 < a_0 < 1,665,$$

$$a_1: 3,56 < a_1 < 5,04.$$

b) Die Parameterschätzung des Modellansatzes

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u + \hat{a}_2 u^2$$

erfolgt in analoger Weise. Damit ergibt sich entsprechend der Lösung mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{c} M \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1,33 & 1,769 & 6,475 \\ 1 & -0,32 & 0,102 & -0,990 \\ 1 & -0,6 & 0,36 & -1,705 \\ 1 & 1,18 & 1,392 & 6,500 \\ 1 & -1,09 & 1,188 & -3,415 \\ 1 & -0,49 & 0,24 & -0,84 \end{array} \right] x \\ \\ M^T M \\ \left[ \begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 0,01 & 5,05 \\ 1,33 & -0,32 & -0,6 & 1,18 & -1,09 & -0,49 & 0,01 & 5,05 & 2,34 \\ 1,769 & 0,102 & 0,36 & 1,392 & 1,188 & 0,24 & 5,05 & 2,34 & 6,68 \end{array} \right] \begin{array}{ccc} 6,025 \\ 21,76 \\ 15,53 \end{array} \\ \\ M^T x \end{array}$$

Aus den Bestimmungsgleichungen

$$6\hat{a}_0 + 0,01\hat{a}_1 + 5,05\hat{a}_2 = 6,025,$$

$$0,01\hat{a}_0 + 5,05\hat{a}_1 + 2,34\hat{a}_2 = 21,76,$$

$$5,05\hat{a}_0 + 2,34\hat{a}_1 + 6,68\hat{a}_2 = 15,53$$

werden folgende Parameterwerte ermittelt:

$$\hat{a}_0 = 0,74, \quad \hat{a}_1 = 4,17, \quad \hat{a}_2 = 0,31.$$

Mit diesen Parameterwerten ergibt sich die Restquadratsumme aus den Zwischenwerten in Tafel L23 zu

$$S_R = 0,651.$$

Tafel L23. Zwischenwerte zu Aufgabe 5.1b

| Nr. | $\hat{a}_0 u_0$ | $\hat{a}_1 u_1$ | $\hat{a}_2 u_2$ | $\hat{x}$ | $(x - \hat{x})^2$ |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------|-------------------|
| 1   | 0,74            | 5,55            | 0,53            | 6,82      | 0,133             |
| 2   | 0,74            | -1,33           | 0,03            | -0,56     | 0,185             |
| 3   | 0,74            | -2,5            | 0,11            | -1,65     | 0,003             |
| 4   | 0,74            | 4,92            | 0,42            | 6,09      | 0,177             |
| 5   | 0,74            | -4,55           | 0,36            | -3,44     | 0,001             |
| 6   | 0,74            | -2,04           | 0,07            | -1,23     | 0,152             |

Zur Vorbereitung der Signifikanztests und zur Ermittlung der Konfidenzintervalle ist die Berechnung der Matrixelemente  $p_{ij}$  erforderlich. Aus der Matrix

$$M^T M = \begin{bmatrix} 6 & 0,01 & 5,05 \\ 0,01 & 5,05 & 2,34 \\ 5,05 & 2,34 & 6,68 \end{bmatrix}$$

erhält man für die Determinante den Wert  $D = 40,95$  und für die Matrix

$$M^T M^{-1} = \begin{bmatrix} 0,689 & \dots & \dots \\ \dots & 0,356 & \dots \\ \dots & \dots & 0,739 \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich folgende Aussagen für die Signifikanz der Parameter mit einer Sicherheit von 95%:

1.  $\hat{a}_0$  ist nicht signifikant, da  $0,74 < 4,3 \cdot 0,571 \cdot 0,83 = 2,04$ ,

2.  $\hat{a}_1$  ist signifikant, da  $4,17 > 4,3 \cdot 0,571 \cdot 0,597 = 1,47$ ,

3.  $\hat{a}_2$  ist nicht signifikant, da  $0,3 < 4,3 \cdot 0,571 \cdot 0,86 = 2,11$ .

Die Toleranzbänder ergeben sich zu

$$a_0: -1,30 < a_0 < 2,78,$$

$$a_1: 2,70 < a_1 < 5,64,$$

$$a_2: -1,78 < a_2 < 2,42.$$

Ein Vergleich der gewählten Modellansätze zeigt, daß sich die Restquadratsumme mit Erhöhung der Modellordnung nur gering verbessert. Der Signifikanztest zeigt, daß in beiden Modellansätzen der lineare Teil signifikant ist. Aus beiden Tatsachen kann geschlossen werden, daß für den vorliegenden Meßwertsatz ein Modellansatz der Form

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u$$

gewählt werden sollte.

### Aufgabe 5.2

Für den gewählten Modellansatz und die in Tafel 5.22 angegebenen Eingangs- und Ausgangssignalwerte ergibt sich für das Lösungsschema der Regressionsgleichung (s. Aufgabe 3.10)

$$\begin{array}{c} M \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 16,2 \\ 3 & 1 & 1 & 10,5 \\ 2 & 1 & 1 & 8,0 \\ 1 & 2 & 4 & 15,5 \\ 3 & 1 & 1 & 9,9 \\ 3 & 2 & 4 & 19,9 \end{array} \right] x \\ \\ M^T M \\ \left[ \begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 33 & 18 & 28 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 18 & 15 & 27 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 4 & 28 & 27 & 51 \end{array} \right] \begin{array}{ccc} 168,8 \\ 131,6 \\ 234,8 \end{array} \\ \\ M^T x \end{array}$$

Aus den Bestimmungsgleichungen

$$33\hat{a}_1 + 18\hat{a}_2 + 28\hat{a}_3 = 168,6,$$

$$18\hat{a}_1 + 15\hat{a}_2 + 27\hat{a}_3 = 131,6,$$

$$28\hat{a}_1 + 27\hat{a}_2 + 51\hat{a}_3 = 234,8$$

ergeben sich die Schätzwerte der Parameter zu

$$\hat{a}_1 = 2,03, \quad \hat{a}_2 = 1,25, \quad \hat{a}_3 = 2,83.$$

Zur Ermittlung der Varianzen der Parameter nach der Beziehung (s. Abschn. 5.2.2)

$$\text{var} \{\hat{a}_i\} = s_R^2 \sqrt{p_{ii}}$$

sind die Reststreuung  $s_R^2$  und die Hauptdiagonalelemente der Matrix  $P$  zu bestimmen.

| Nr. | $x$  | $\bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ |
|-----|------|-----------|-------------------|
| 1   | 16,2 | 15,83     | 0,137             |
| 2   | 10,5 | 10,17     | 0,109             |
| 3   | 8,0  | 8,14      | 0,020             |
| 4   | 15,5 | 15,83     | 0,109             |
| 5   | 9,9  | 10,17     | 0,084             |
| 6   | 19,9 | 19,89     | 0,000             |

Tafel L 24  
Zwischenwerte zu Aufgabe 5.2

Die Reststreuung ergibt sich aus den Zwischenrechnungen in Tafel L 24 für die Restquadratsumme zu

$$s_R^2 = \frac{0,459}{6-3-1} = 0,23.$$

Aus der Matrix

$$M^T M = \begin{bmatrix} 33 & 18 & 28 \\ 18 & 15 & 27 \\ 28 & 27 & 51 \end{bmatrix}$$

erhält man die Diagonalelemente der Matrix analog zu Aufgabe 5.1

$$P = [M^T M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,288 & \dots & \dots \\ \dots & 7,192 & \dots \\ \dots & \dots & 1,368 \end{bmatrix}.$$

Damit ergeben sich folgende Varianzen für die Parameter:

$$\text{var} \{\hat{a}_1\} = 0,07, \quad \text{var} \{\hat{a}_2\} = 1,65, \quad \text{var} \{\hat{a}_3\} = 0,31.$$

### Aufgabe 5.3

a) Durch Anwendung des Lösungsschemas für die Regression erhält man mit den in Tafel 5.23 angegebenen Werten und dem gewählten Modellansatz analog zu Aufgabe 3.10

$$\begin{array}{c} M \\ \left[ \begin{array}{cc|c} -1,5 & -2 & -9,7 \\ -0,5 & 0 & -0,1 \\ 0,5 & 0 & 2,0 \\ 1,5 & 2 & 7,8 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M^T & M^T M & M^T x \\ \left[ \begin{array}{cc|c} -1,5 & -0,5 & 0,5 & 1,5 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 27,3 \\ 6 & 8 & 35 \end{array} \right] & \end{array}$$

die Bestimmungsgleichungen für die Parameter

$$5\hat{a}_1 + 6\hat{a}_2 = 27,3,$$

$$6\hat{a}_1 + 8\hat{a}_2 = 35.$$

Für die Kovarianzmatrix der Parameter erhält man nach der Beziehung

$$\text{Cov} \{\hat{a}\} = P \sigma_z^2 \quad \text{mit} \quad \sigma_z^2 = 1, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -1,5 \\ -1,5 & 1,25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cov} \{\hat{a}\} = \begin{bmatrix} 2 & -1,5 \\ -1,5 & 1,25 \end{bmatrix}.$$

b) Die Parameterschätzung bei der Auswertung des vollständigen Versuchsplans erfolgt nach der Beziehung

$$\hat{a} = \frac{1}{n} M^T x.$$

Damit folgt für die Parameter unter Beachtung von Tafel 5.24

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{4} (4 - 2 + 6) = 2, \quad \hat{a}_2 = \frac{1}{4} (4 + 2 + 6) = 3.$$

Die Kovarianzmatrix für die Parameter hat folgendes Aussehen:

$$\text{Cov} \{\hat{a}\} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

Bei der Betrachtung der Kovarianzmatrizen der Varianten a) und b) ist deutlich der Vorteil einer Versuchsplanung zu erkennen, die sich in einer Unabhängigkeit der Schätzung und minimalen Parametervarianzen ausdrückt.

### Aufgabe 5.4

a) Entsprechend der Regressionsvorschrift für die Versuchsplanung und den Meßergebnissen in Tafel 5.25 ergibt sich der Parametervektor  $\hat{a}$  zu

$$\hat{a} = \frac{1}{8} I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,6 \\ 5,1 \\ -3,5 \\ -17,5 \\ 9,9 \\ 12,3 \\ -9,3 \\ -6,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 2,2 \\ 9,9 \end{bmatrix}.$$

Zur Ermittlung der Varianz der Parameter kann aus den Nullpunktversuchen  $n_0$  die Streuung der Störung  $\sigma_z^2$  abgeschätzt werden.

Aus den in Tafel L 23 dargestellten Zwischenwerten ergibt sich

$$s_z^2 = \frac{1}{(n_0 - 1)} \sum_{j=1}^{n_0} (x_j - \bar{x})^2 = 265,7/11 = 24,15.$$

Damit gilt für die Varianzen der Parameter  $\hat{a}_i$

$$\text{var} \{\hat{a}_i\} = \frac{1}{n} s_z^2 = \frac{1}{8} 24,15 = 3,06.$$

b) Verwendet wird der  $F$ -Test in der Form

$$F = s_R^2 / s_z^2$$

zur Prüfung der Hypothese  $H_0: \sigma_R^2 = \sigma_z^2$ .

Benötigt wird die Reststreuung, die aus den in Tafel L24 dargestellten Zwischenwerten nach der Vorschrift

$$s_R^2 = \frac{1}{n - l - 1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2 = \frac{109,6}{4} = 27,4$$

ermittelt wird.

Der Test mit diesen berechneten Streuungen und dem Tafelwert  $F_{4,11;0,05} = 3,36$  ergibt

$$F = \frac{s_R^2}{s_z^2} = \frac{27,4}{24,15} = 1,15 < 3,36.$$

Das bedeutet, daß die Hypothese angenommen wird und der Modellansatz adäquat ist, da sich beide Streuungen mit einer Sicherheit von 95% nur zufällig voneinander unterscheiden.

### Aufgabe 5.5

Für den Modellansatz

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \hat{a}_3 u_3$$

erhält man mit den Werten in Tafel 5.27 und der Schätzvorschrift

$$\hat{a} = \frac{1}{n} M^T x$$

$$\hat{a} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 175,44 \\ -15,12 \\ 7,50 \\ 11,66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,93 \\ -1,89 \\ 0,94 \\ 1,46 \end{bmatrix}$$

Analog ergeben sich die geschätzten Parameter für den Modellansatz

$$\hat{x} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \hat{a}_3 u_3 + \hat{a}_{12} u_1 u_2 + \hat{a}_{13} u_1 u_3$$

$$\hat{a} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 175,44 \\ -15,12 \\ 7,50 \\ 11,66 \\ -2,86 \\ -2,54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,93 \\ -1,89 \\ 0,94 \\ 1,46 \\ -0,36 \\ -0,32 \end{bmatrix}$$

### Aufgabe 6.1

- Die Testfolge und die gemessenen Ausgangswerte sind im Bild L22 dargestellt.
- Der aus der Testfolge zur Schätzung der Stützstellen erstellte Versuchsplan ist in Tafel L25 dargestellt.
- Die Abtastzeitpunkte der Ausgangsgrößen, die zur Auswertung benötigt werden, sind im Bild L22 durch Pfeile gekennzeichnet. Die Zuordnung dieser Werte zu den Versuchsplanzeilen wird in Tafel L25 gezeigt.

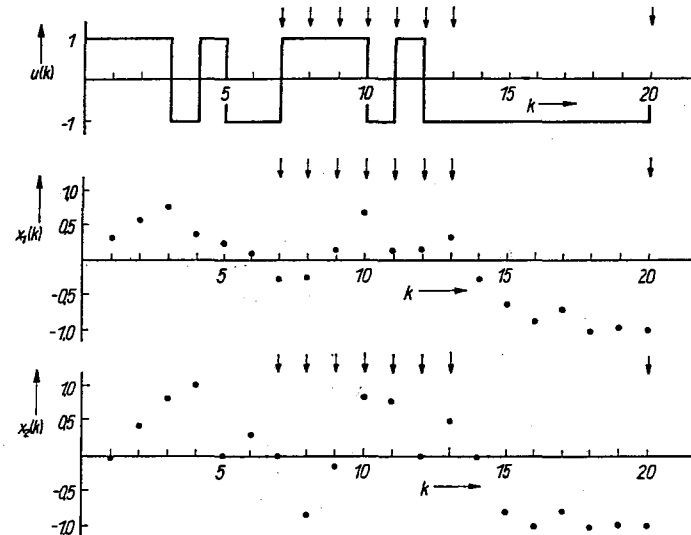


Bild L22. Verlauf der Testfolge und der gemessenen Ausgangswerte zu Aufgabe 6.1

Tafel L25. Versuchsplan zur Schätzung der Stützstellen der Gewichtsfunktionen zu Aufgabe 6.1

| $u(k)$ | $u(k-1)$ | $u(k-2)$ | $u(k-3)$ | $u(k-4)$ | $u(k-5)$ | $u(k-6)$ | $x_1(k)$ | $x_2(k)$ |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| -1     | -1       | +1       | -1       | +1       | +1       | +1       | -0,279   | -0,069   |
| +1     | -1       | -1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -0,238   | -0,870   |
| +1     | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | +1       | 0,152    | -0,169   |
| +1     | +1       | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | 0,674    | 0,814    |
| -1     | +1       | +1       | +1       | -1       | -1       | +1       | 0,146    | 0,793    |
| +1     | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | -1       | 0,164    | -0,046   |
| -1     | +1       | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | 0,333    | 0,476    |
| -1     | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1,000   | -1,000   |

d) Nach der Schätzvorschrift

$$\hat{g}_1 = \frac{1}{nT} M^T x$$

(s. Abschn. 6.4.4) erhält man für die Stützstellen der Gewichtsfunktion des ersten Systems

$$\hat{g}_1 = \frac{1}{8 \cdot 1,3 \text{ s}} \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,279 \\ -0,238 \\ 0,152 \\ 0,674 \\ 0,146 \\ 0,164 \\ 0,333 \\ -1,000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{g}_1 = \begin{bmatrix} 0,1492 \\ 0,2556 \\ 0,1402 \\ 0,0825 \\ 0,0758 \\ 0,0988 \\ -0,0375 \end{bmatrix} s^{-1}.$$

Analog ergeben sich die Stützstellen der Gewichtsfunktion des zweiten Systems zu

$$\hat{g}_2 = \frac{1}{8 \cdot 3 s} \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,069 \\ -0,870 \\ -0,169 \\ 0,814 \\ 0,793 \\ -0,046 \\ 0,476 \\ -1,000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{g}_2 = \begin{bmatrix} -0,0198 \\ 0,1625 \\ 0,1273 \\ 0,0323 \\ 0,0189 \\ 0,0323 \\ -0,0232 \end{bmatrix} s^{-1}.$$

e) Die Varianzen der geschätzten Stützstellen ergeben sich aus der Beziehung

$$\text{var} \{\hat{g}(i)\} = \frac{1}{T^2} p_{ii} \sigma_z^2 \quad \text{mit} \quad p_{ii} = 1/8$$

für das erste System zu

$$\text{var} \{\hat{g}(i)\} = \frac{1}{8 \cdot 1,3^2 s^2} 0,1^2 = 7,4 \cdot 10^{-4} s^{-2}; \quad i = 0, \dots, 6$$

und für das zweite System zu

$$\text{var} \{\hat{g}(i)\} = \frac{1}{8 \cdot 3^2 s^2} 0,1^2 = 1,4 \cdot 10^{-4} s^{-2}; \quad i = 0, \dots, 6.$$

Für die Kovarianzen ergibt sich

$$\text{cov} \{\hat{g}(i), \hat{g}(j)\} = 0; \quad i, j = 0, \dots, 6, \quad i \neq j,$$

da der verwendete Versuchsplan orthogonal ist.

f) Die geschätzten Stützstellen der Gewichtsfunktionen sind im Bild L23 dargestellt.

g) Die Verstärkung entspricht der Fläche, die durch die Gewichtsfunktion eingeschlossen wird.

Daraus folgt als allgemeine Vorschrift

$$\hat{K} = T \sum_{i=0}^m \hat{g}(i).$$

Für das erste System ergibt sich somit

$$\hat{K} = 1,3 s \cdot 0,765 s^{-1} = 0,994$$

und für das zweite System

$$\hat{K} = 3 s \cdot 0,33 s^{-1} = 0,991.$$

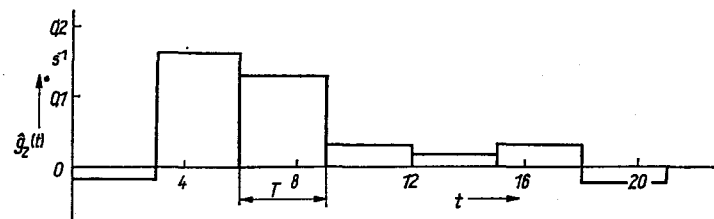
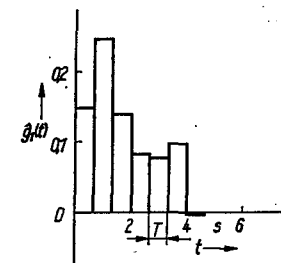


Bild L23. Geschätzte Gewichtsfunktionen der Teilstrecken zu Aufgabe 6.2

### Aufgabe 6.2

a) Die Testfolge und die gemessenen Ausgangswerte sind im Bild L24 dargestellt.

b) Der Regressionsansatz lautet:

$$\hat{x}(k) = \hat{b}_1 u(k-1) - \hat{a}_1 x(k-1).$$

Die Parameter des Differenzgleichungsmodells ergeben sich aus der Schätzvorschrift

$$\hat{s} = [M^T M]^{-1} M^T x$$

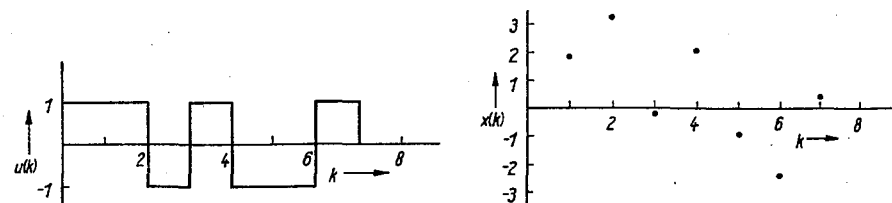


Bild L24. Verlauf der Testfolge und der gemessenen Ausgangswerte zu Aufgabe 6.2

mit

$$M = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ +1 & 1,89 \\ -1 & 3,23 \\ +1 & -0,13 \\ -1 & 2,04 \\ -1 & -0,86 \\ +1 & -2,42 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1,89 \\ 3,23 \\ -0,13 \\ 2,04 \\ -0,86 \\ -2,42 \\ 0,44 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergeben sich die Matrizen

$$M^T M = \begin{bmatrix} 7 & -5,07 \\ -5,07 & 24,78 \end{bmatrix}, \quad [M^T M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,168 & 0,034 \\ 0,034 & 0,047 \end{bmatrix}$$

sowie der Vektor

$$M^T x = \begin{bmatrix} 10,974 \\ 4,68 \end{bmatrix}.$$

Der Parametervektor  $\hat{s}$  ergibt sich dann zu

$$\hat{s} = [M^T M]^{-1} M^T x = \begin{bmatrix} 0,168 & 0,034 \\ 0,034 & 0,047 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10,974 \\ 4,68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,003 \\ 0,593 \end{bmatrix}.$$

Die geschätzten Parameter sind

$$\hat{b}_1 = 2,003, \quad \hat{a}_1 = -0,593.$$

c) Der geschätzte Ausgang berechnet sich zu

$$\hat{x}(k) = \hat{b}_1 u(k-1) - \hat{a}_1 x(k-1)$$

bzw.

$$\hat{x}(k) = 2,003u(k-1) + 0,593x(k-1).$$

Die aus dieser Gleichung berechneten Werte sind in Tafel L26 enthalten.

d) Die Restsumme  $S_R$  ergibt sich aus

$$S_R = \sum_{k=1}^7 (x(k) - \hat{x}(k))^2 = 68,28 \cdot 10^{-3}.$$

Daraus resultiert eine Reststreuung von

$$s_R^2 = \frac{S_R}{n-l-1} = \frac{68,28 \cdot 10^{-3}}{7-2-1} = 17,07 \cdot 10^{-3}.$$

Tafel L26. Schätzung der Ausgangsgröße und ihrer Varianz der Aufgabe 6.2

| $u(k-1)$ | $x(k-1)$ | $x(k)$ | $x(k) - \hat{x}(k)$ | $[x(k) - \hat{x}(k)]^2$ |
|----------|----------|--------|---------------------|-------------------------|
| +1       | 0        | 2,003  | -0,113              | $12,77 \cdot 10^{-3}$   |
| +1       | 1,89     | 3,124  | 0,106               | $11,24 \cdot 10^{-3}$   |
| -1       | 3,23     | 0,088  | -0,042              | $1,76 \cdot 10^{-3}$    |
| +1       | -0,13    | 1,926  | 0,114               | $12,99 \cdot 10^{-3}$   |
| -1       | 2,04     | -0,793 | -0,067              | $4,49 \cdot 10^{-3}$    |
| -1       | -0,86    | -2,513 | 0,093               | $8,65 \cdot 10^{-3}$    |
| +1       | -2,42    | 0,568  | -0,128              | $16,38 \cdot 10^{-3}$   |

e) Die für den Signifikanztest benötigten Varianzen der geschätzten Parameter sind

$$\text{var}\{\hat{b}_1\} = p_{11}s_R^2 = 0,168 \cdot 17,07 \cdot 10^{-3} = 2,87 \cdot 10^{-3},$$

$$\text{var}\{\hat{a}_1\} = p_{22}s_R^2 = 0,047 \cdot 17,07 \cdot 10^{-3} = 0,802 \cdot 10^{-3}.$$

Mit Hilfe des  $t$ -Tests wird geprüft, ob sich die geschätzten Parameter signifikant von null unterscheiden:

$$\text{I. } |\hat{b}_1| \geq t_{\alpha/2, f} \sqrt{\text{var}\{\hat{b}_1\}}; \quad \alpha = 5\%, \quad f = m - l - 1 = 4; \quad t_{2,5\%,4} = 2,776, \\ 2,003 \geq 2,776 \cdot 5,36 \cdot 10^{-2} = 0,1488.$$

Die geforderte Bedingung ist erfüllt; der Parameter  $\hat{b}_1$  ist signifikant.

$$\text{II. } |\hat{a}_1| \geq t_{2,5\%,4} \sqrt{\text{var}\{\hat{a}_1\}}, \\ 0,607 \geq 2,776 \cdot 2,83 \cdot 10^{-2} = 0,0786.$$

Die geforderte Bedingung ist erfüllt; der Parameter  $\hat{a}_1$  ist ebenfalls signifikant.

Die Toleranzbänder für die geschätzten Parameter ergeben sich aus den Beziehungen

$$|b_1 - \hat{b}_1| < t_{2,5\%,4} \sqrt{\text{var}\{\hat{b}_1\}} = 2,776 \cdot 5,36 \cdot 10^{-2} = 0,1488; \\ 1,854 < b_1 < 2,152,$$

$$|a_1 - \hat{a}_1| < t_{2,5\%,4} \sqrt{\text{var}\{\hat{a}_1\}} = 2,776 \cdot 2,83 \cdot 10^{-2} = 0,0786; \\ -0,672 < a_1 < -0,514.$$

Tafel A 1. Ordinatenwerte der normierten Normalverteilung  
 $x^* = (X - \mu)/\sigma$ ; NV (0, 1)

| $x^*$ | 0,00   | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0   | .39894 | .39892 | .39886 | .39876 | .39862 | .39844 | .39822 | .39797 | .39767 | .39733 |
| 0,1   | .39695 | .39654 | .39608 | .39559 | .39505 | .39448 | .39387 | .39322 | .39253 | .39181 |
| 0,2   | .39104 | .39024 | .38940 | .38853 | .38762 | .38667 | .38568 | .38466 | .38361 | .38251 |
| 0,3   | .38139 | .38023 | .37903 | .37780 | .37654 | .37524 | .37391 | .37255 | .37115 | .36973 |
| 0,4   | .36827 | .36678 | .36526 | .36371 | .36213 | .36053 | .35889 | .35723 | .35553 | .35381 |
| 0,5   | .35207 | .35029 | .34849 | .34667 | .34482 | .34294 | .34105 | .33912 | .33718 | .33521 |
| 0,6   | .33322 | .33121 | .32918 | .32713 | .32506 | .32297 | .32086 | .31874 | .31659 | .31443 |
| 0,7   | .31225 | .31006 | .30785 | .30563 | .30339 | .30114 | .29887 | .29659 | .29431 | .29200 |
| 0,8   | .28969 | .28737 | .28504 | .28269 | .28034 | .27798 | .27562 | .27324 | .27086 | .26848 |
| 0,9   | .26609 | .26369 | .26129 | .25888 | .25647 | .25406 | .25164 | .24923 | .24681 | .24439 |
| 1,0   | .24197 | .23955 | .23713 | .23471 | .23230 | .22988 | .22747 | .22506 | .22265 | .22025 |
| 1,1   | .21785 | .21546 | .21307 | .21069 | .20831 | .20594 | .20357 | .20121 | .19886 | .19652 |
| 1,2   | .19419 | .19186 | .18954 | .18724 | .18494 | .18265 | .18037 | .17810 | .17585 | .17360 |
| 1,3   | .17137 | .16915 | .16694 | .16474 | .16256 | .16038 | .15822 | .15608 | .15395 | .15183 |
| 1,4   | .14937 | .14764 | .14556 | .14350 | .14146 | .13943 | .13742 | .13542 | .13344 | .13147 |
| 1,5   | .12952 | .12758 | .12566 | .12376 | .12188 | .12051 | .11816 | .11632 | .11450 | .11270 |
| 1,6   | .11092 | .10915 | .10741 | .10567 | .10396 | .10226 | .10059 | .09893 | .09728 | .09566 |
| 1,7   | .09405 | .09246 | .09089 | .08933 | .08780 | .08628 | .08478 | .08329 | .08183 | .08038 |
| 1,8   | .07895 | .07754 | .07614 | .07477 | .07341 | .07206 | .07074 | .06943 | .06814 | .06687 |
| 1,9   | .06562 | .06438 | .06316 | .06195 | .06077 | .05959 | .05844 | .05730 | .05618 | .05508 |
| 2,0   | .05399 | .05292 | .05186 | .05082 | .04980 | .04879 | .04780 | .04682 | .04586 | .04491 |
| 2,1   | .04398 | .04307 | .04217 | .04128 | .04041 | .03955 | .03871 | .03788 | .03706 | .03626 |
| 2,2   | .03547 | .03470 | .03394 | .03319 | .03246 | .03174 | .03103 | .03034 | .02965 | .02898 |
| 2,3   | .02833 | .02768 | .02705 | .02643 | .02582 | .02522 | .02463 | .02406 | .02349 | .02294 |
| 2,4   | .02239 | .02186 | .02134 | .02083 | .02033 | .01984 | .01936 | .01889 | .01842 | .01797 |
| 2,5   | .01753 | .01709 | .01667 | .01625 | .01585 | .01545 | .01506 | .01468 | .01431 | .01394 |
| 2,6   | .01358 | .01323 | .01289 | .01256 | .01223 | .01191 | .01160 | .01130 | .01100 | .01071 |
| 2,7   | .01042 | .01014 | .00987 | .00961 | .00935 | .00909 | .00885 | .00861 | .00837 | .00814 |
| 2,8   | .00792 | .00770 | .00748 | .00727 | .00707 | .00687 | .00668 | .00649 | .00631 | .00613 |
| 2,9   | .00595 | .00578 | .00562 | .00545 | .00530 | .00514 | .00499 | .00485 | .00471 | .00457 |
| 3,0   | .00443 | .00327 | .00238 | .00172 | .00123 | .00087 | .00061 | .00042 | .00029 | .00020 |

| Anzahl der<br>Freiheitsgrade<br>$f$                                | Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$<br>für zweiseitige Fragestellung |       |       |       |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|
|                                                                    | 0,10                                                                | 0,05  | 0,02  | 0,01  |
| 1                                                                  | 6,31                                                                | 12,7  | 31,82 | 63,7  |
| 2                                                                  | 2,92                                                                | 4,30  | 6,97  | 9,92  |
| 3                                                                  | 2,35                                                                | 3,18  | 4,54  | 5,84  |
| 4                                                                  | 2,13                                                                | 2,78  | 3,75  | 4,60  |
| 5                                                                  | 2,01                                                                | 2,57  | 3,37  | 4,03  |
| 6                                                                  | 1,94                                                                | 2,45  | 3,14  | 3,71  |
| 7                                                                  | 1,89                                                                | 2,36  | 3,00  | 3,50  |
| 8                                                                  | 1,86                                                                | 2,31  | 2,90  | 3,36  |
| 9                                                                  | 1,83                                                                | 2,26  | 2,82  | 3,25  |
| 10                                                                 | 1,81                                                                | 2,23  | 2,76  | 3,17  |
| 11                                                                 | 1,80                                                                | 2,20  | 2,72  | 3,11  |
| 12                                                                 | 1,78                                                                | 2,18  | 2,68  | 3,05  |
| 13                                                                 | 1,77                                                                | 2,16  | 2,65  | 3,01  |
| 14                                                                 | 1,76                                                                | 2,14  | 2,62  | 2,98  |
| 15                                                                 | 1,75                                                                | 2,13  | 2,60  | 2,95  |
| 16                                                                 | 1,75                                                                | 2,12  | 2,58  | 2,92  |
| 17                                                                 | 1,74                                                                | 2,11  | 2,57  | 2,90  |
| 18                                                                 | 1,73                                                                | 2,10  | 2,55  | 2,88  |
| 19                                                                 | 1,73                                                                | 2,09  | 2,54  | 2,86  |
| 20                                                                 | 1,73                                                                | 2,09  | 2,53  | 2,85  |
| 21                                                                 | 1,72                                                                | 2,08  | 2,52  | 2,83  |
| 22                                                                 | 1,72                                                                | 2,07  | 2,51  | 2,82  |
| 23                                                                 | 1,71                                                                | 2,07  | 2,50  | 2,81  |
| 24                                                                 | 1,71                                                                | 2,06  | 2,49  | 2,80  |
| 25                                                                 | 1,71                                                                | 2,06  | 2,49  | 2,79  |
| 30                                                                 | 1,70                                                                | 2,04  | 2,46  | 2,75  |
| 60                                                                 | 1,67                                                                | 2,00  | 2,39  | 2,66  |
| 120                                                                | 1,66                                                                | 1,98  | 2,36  | 2,62  |
| $\infty$                                                           | 1,64                                                                | 1,96  | 2,33  | 2,58  |
| Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$ für einseitige<br>Fragestellung |                                                                     |       |       |       |
|                                                                    | 0,05                                                                | 0,025 | 0,01  | 0,005 |

Tafel A 2  
 $t$ -Verteilung [ $t_{\alpha, f}$  und  $t_{\alpha/2, f}$ ]

Tafel A 3.  $\chi^2$ -Verteilung [ $\chi^2_{\alpha, f}$ ]

| Anzahl der<br>Freiheitsgrade<br>$f$ | Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$ |         |        |       |       |       |
|-------------------------------------|------------------------------------|---------|--------|-------|-------|-------|
|                                     | 0,99                               | 0,975   | 0,95   | 0,05  | 0,025 | 0,01  |
| 1                                   | 0,00016                            | 0,00098 | 0,0039 | 3,8   | 5,0   | 6,6   |
| 2                                   | 0,020                              | 0,051   | 0,103  | 6,0   | 7,4   | 9,2   |
| 3                                   | 0,115                              | 0,216   | 0,352  | 7,8   | 9,4   | 11,3  |
| 4                                   | 0,297                              | 0,484   | 0,711  | 9,5   | 11,1  | 13,3  |
| 5                                   | 0,554                              | 0,831   | 1,15   | 11,1  | 12,8  | 15,1  |
| 6                                   | 0,872                              | 1,24    | 1,64   | 12,6  | 14,4  | 16,8  |
| 7                                   | 1,24                               | 1,69    | 2,17   | 14,1  | 16,0  | 18,5  |
| 8                                   | 1,65                               | 2,18    | 2,73   | 15,5  | 17,5  | 20,1  |
| 9                                   | 2,09                               | 2,70    | 3,33   | 16,9  | 19,0  | 21,7  |
| 10                                  | 2,56                               | 3,25    | 3,94   | 18,3  | 20,5  | 23,2  |
| 11                                  | 3,05                               | 3,82    | 4,57   | 19,7  | 21,9  | 24,7  |
| 12                                  | 3,57                               | 4,40    | 5,23   | 21,0  | 23,3  | 26,2  |
| 13                                  | 4,11                               | 5,01    | 5,89   | 22,4  | 24,7  | 27,7  |
| 14                                  | 4,66                               | 5,63    | 6,57   | 23,7  | 26,1  | 29,1  |
| 15                                  | 5,23                               | 6,26    | 7,26   | 25,0  | 27,5  | 30,6  |
| 16                                  | 5,81                               | 6,91    | 7,96   | 26,3  | 28,8  | 32,0  |
| 17                                  | 6,41                               | 7,56    | 8,67   | 27,6  | 30,2  | 33,4  |
| 18                                  | 7,01                               | 8,23    | 9,39   | 28,9  | 31,5  | 34,8  |
| 19                                  | 7,63                               | 8,91    | 10,1   | 30,1  | 32,9  | 36,2  |
| 20                                  | 8,26                               | 9,59    | 10,9   | 31,4  | 34,2  | 37,6  |
| 21                                  | 8,90                               | 10,3    | 11,6   | 32,7  | 35,5  | 38,9  |
| 22                                  | 9,54                               | 11,0    | 12,3   | 33,9  | 36,8  | 40,3  |
| 23                                  | 10,2                               | 11,7    | 13,1   | 35,2  | 38,1  | 41,6  |
| 24                                  | 10,9                               | 12,4    | 13,8   | 36,4  | 39,4  | 43,0  |
| 25                                  | 11,5                               | 13,1    | 14,6   | 37,7  | 40,6  | 44,3  |
| 30                                  | 15,0                               | 16,8    | 18,5   | 43,8  | 47,0  | 50,9  |
| 40                                  | 22,2                               | 24,4    | 26,5   | 55,8  | 59,3  | 63,7  |
| 50                                  | 29,7                               | 32,4    | 34,8   | 67,5  | 71,4  | 76,2  |
| 60                                  | 37,5                               | 40,5    | 43,2   | 79,1  | 83,3  | 88,4  |
| 70                                  | 45,4                               | 48,8    | 51,7   | 90,5  | 95,0  | 100,4 |
| 80                                  | 53,5                               | 57,2    | 60,4   | 101,9 | 106,6 | 112,3 |
| 90                                  | 61,8                               | 65,6    | 69,1   | 113,1 | 118,1 | 124,1 |
| 100                                 | 70,1                               | 74,2    | 77,9   | 124,3 | 129,6 | 135,8 |

Tafel A 4. F-Verteilung  $F_{\alpha, f_1, f_2}$  für  $\alpha = 0,05$ 

| $f_2$    | $f_1$ | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 12    | 24    | 30    | 40    | $\infty$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
|          | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
| 1        | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 243,9 | 249,0 | 250   | 251   | 254,3    |
| 2        | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,41 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,50    |
| 3        | 10,13 | 9,55  | 9,28  | 9,12  | 9,01  | 8,94  | 8,74  | 8,64  | 8,62  | 8,60  | 8,53     |
| 4        | 7,71  | 6,94  | 6,59  | 6,39  | 6,26  | 6,16  | 5,91  | 5,77  | 5,74  | 5,71  | 5,63     |
| 5        | 6,61  | 5,79  | 5,41  | 5,19  | 5,05  | 4,95  | 4,68  | 4,53  | 4,50  | 4,46  | 4,36     |
| 6        | 5,99  | 5,14  | 4,76  | 4,53  | 4,39  | 4,28  | 4,00  | 3,84  | 3,81  | 3,77  | 3,67     |
| 7        | 5,59  | 4,74  | 4,35  | 4,12  | 3,97  | 3,87  | 3,57  | 3,41  | 3,38  | 3,34  | 3,23     |
| 8        | 5,32  | 4,46  | 4,07  | 3,84  | 3,69  | 3,58  | 3,28  | 3,12  | 3,08  | 3,05  | 2,93     |
| 9        | 5,12  | 4,26  | 3,86  | 3,63  | 3,48  | 3,37  | 3,07  | 2,90  | 2,86  | 2,82  | 2,71     |
| 10       | 4,96  | 4,10  | 3,71  | 3,48  | 3,33  | 3,22  | 2,91  | 2,74  | 2,70  | 2,67  | 2,54     |
| 11       | 4,84  | 3,98  | 3,59  | 3,36  | 3,20  | 3,09  | 2,79  | 2,61  | 2,57  | 2,53  | 2,40     |
| 12       | 4,75  | 3,88  | 3,49  | 3,26  | 3,11  | 3,00  | 2,69  | 2,50  | 2,46  | 2,42  | 2,30     |
| 13       | 4,67  | 3,80  | 3,41  | 3,18  | 3,02  | 2,92  | 2,60  | 2,42  | 2,38  | 2,34  | 2,21     |
| 14       | 4,60  | 3,74  | 3,34  | 3,11  | 2,96  | 2,85  | 2,53  | 2,35  | 2,31  | 2,27  | 2,13     |
| 15       | 4,51  | 3,68  | 3,29  | 3,06  | 2,90  | 2,79  | 2,48  | 2,29  | 2,25  | 2,21  | 2,07     |
| 16       | 4,49  | 3,63  | 3,24  | 3,01  | 2,85  | 2,74  | 2,42  | 2,24  | 2,20  | 2,16  | 2,01     |
| 17       | 4,45  | 3,59  | 3,20  | 2,96  | 2,81  | 2,70  | 2,38  | 2,19  | 2,15  | 2,11  | 1,96     |
| 18       | 4,41  | 3,55  | 3,16  | 2,93  | 2,77  | 2,66  | 2,34  | 2,15  | 2,11  | 2,07  | 1,92     |
| 19       | 4,38  | 3,52  | 3,13  | 2,90  | 2,74  | 2,63  | 2,31  | 2,11  | 2,07  | 2,02  | 1,88     |
| 20       | 4,35  | 3,49  | 3,10  | 2,87  | 2,71  | 2,60  | 2,28  | 2,08  | 2,04  | 1,99  | 1,84     |
| 21       | 4,32  | 3,47  | 3,07  | 2,84  | 2,68  | 2,57  | 2,25  | 2,05  | 2,00  | 1,96  | 1,81     |
| 22       | 4,30  | 3,44  | 3,05  | 2,82  | 2,66  | 2,55  | 2,23  | 2,03  | 1,98  | 1,93  | 1,78     |
| 23       | 4,28  | 3,42  | 3,03  | 2,80  | 2,64  | 2,53  | 2,20  | 2,00  | 1,96  | 1,91  | 1,76     |
| 24       | 4,26  | 3,40  | 3,01  | 2,78  | 2,62  | 2,51  | 2,18  | 1,98  | 1,94  | 1,89  | 1,73     |
| 25       | 4,24  | 3,38  | 2,99  | 2,76  | 2,60  | 2,49  | 2,16  | 1,96  | 1,92  | 1,87  | 1,71     |
| 30       | 4,17  | 3,32  | 2,92  | 2,69  | 2,53  | 2,42  | 2,09  | 1,89  | 1,84  | 1,79  | 1,62     |
| 60       | 4,00  | 3,15  | 2,76  | 2,52  | 2,37  | 2,25  | 1,92  | 1,70  | 1,63  | 1,59  | 1,39     |
| 120      | 3,92  | 3,07  | 2,68  | 2,45  | 2,29  | 2,17  | 1,83  | 1,61  | 1,55  | 1,46  | 1,25     |
| $\infty$ | 3,84  | 2,99  | 2,60  | 2,37  | 2,21  | 2,09  | 1,75  | 1,52  | 1,46  | 1,35  | 1,00     |

Tafel A 5. F-Verteilung  $F_{\alpha, f_1, f_2}$  für  $\alpha = 0,01$ 

| $f_2$    | $f_1$ | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 12    | 24    | 30    | 40    | $\infty$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 1        | 4052  |       | 4999  | 5403  | 5625  | 5764  | 5859  | 6106  | 6234  | 6261  | 6287  | 6366     |
| 2        | 98,49 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,42 | 99,46 | 99,47 | 99,47 | 99,47 | 99,50    |
| 3        | 34,12 | 30,81 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,05 | 26,60 | 26,50 | 26,41 | 26,41 | 26,12    |
| 4        | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,37 | 13,93 | 13,84 | 13,74 | 13,74 | 13,46    |
| 5        | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 9,89  | 9,47  | 9,38  | 9,29  | 9,29  | 9,02     |
| 6        | 13,74 | 10,92 | 9,78  | 9,15  | 8,75  | 8,47  | 7,72  | 7,31  | 7,23  | 7,14  | 7,14  | 6,88     |
| 7        | 12,25 | 9,55  | 8,45  | 7,85  | 7,46  | 7,19  | 6,47  | 6,07  | 5,99  | 5,91  | 5,91  | 5,65     |
| 8        | 11,26 | 8,65  | 7,59  | 7,01  | 6,63  | 6,37  | 5,67  | 5,28  | 5,20  | 5,12  | 5,12  | 4,86     |
| 9        | 10,56 | 8,02  | 6,99  | 6,42  | 6,06  | 5,80  | 5,11  | 4,73  | 4,65  | 4,57  | 4,57  | 4,31     |
| 10       | 10,04 | 7,56  | 6,55  | 5,99  | 5,64  | 5,39  | 4,71  | 4,33  | 4,25  | 4,17  | 4,17  | 3,91     |
| 11       | 9,65  | 7,20  | 6,22  | 5,67  | 5,32  | 5,07  | 4,40  | 4,02  | 3,94  | 3,86  | 3,86  | 3,60     |
| 12       | 9,33  | 6,93  | 5,95  | 5,41  | 5,06  | 4,82  | 4,16  | 3,78  | 3,70  | 3,62  | 3,62  | 3,36     |
| 13       | 9,07  | 6,70  | 5,74  | 5,20  | 4,86  | 4,62  | 3,96  | 3,59  | 3,51  | 3,43  | 3,43  | 3,16     |
| 14       | 8,86  | 6,51  | 5,56  | 5,03  | 4,69  | 4,46  | 3,80  | 3,43  | 3,35  | 3,27  | 3,27  | 3,00     |
| 15       | 8,68  | 6,36  | 5,42  | 4,89  | 4,56  | 4,32  | 3,67  | 3,29  | 3,21  | 3,13  | 3,13  | 2,87     |
| 16       | 8,53  | 6,23  | 5,29  | 4,77  | 4,44  | 4,20  | 3,55  | 3,18  | 3,10  | 3,02  | 3,02  | 2,75     |
| 17       | 8,40  | 6,11  | 5,18  | 4,67  | 4,34  | 4,10  | 3,45  | 3,08  | 3,00  | 2,92  | 2,92  | 2,65     |
| 18       | 8,28  | 6,01  | 5,09  | 4,58  | 4,25  | 4,01  | 3,37  | 3,00  | 2,92  | 2,84  | 2,84  | 2,57     |
| 19       | 8,18  | 5,93  | 5,01  | 4,50  | 4,17  | 3,94  | 3,30  | 2,92  | 2,84  | 2,76  | 2,76  | 2,49     |
| 20       | 8,10  | 5,85  | 4,94  | 4,43  | 4,10  | 3,87  | 3,23  | 2,86  | 2,78  | 2,69  | 2,69  | 2,42     |
| 21       | 8,02  | 5,78  | 4,87  | 4,37  | 4,04  | 3,81  | 3,17  | 2,80  | 2,72  | 2,64  | 2,64  | 2,36     |
| 22       | 7,94  | 5,72  | 4,82  | 4,31  | 3,99  | 3,76  | 3,12  | 2,75  | 2,67  | 2,58  | 2,58  | 2,31     |
| 23       | 7,88  | 5,66  | 4,76  | 4,26  | 3,94  | 3,71  | 3,07  | 2,70  | 2,62  | 2,54  | 2,54  | 2,26     |
| 24       | 7,82  | 5,61  | 4,72  | 4,22  | 3,90  | 3,67  | 3,03  | 2,66  | 2,58  | 2,49  | 2,49  | 2,21     |
| 25       | 7,77  | 5,57  | 4,68  | 4,18  | 3,86  | 3,63  | 2,99  | 2,62  | 2,54  | 2,45  | 2,45  | 2,17     |
| 30       | 7,56  | 5,39  | 4,51  | 4,02  | 3,70  | 3,47  | 2,84  | 2,47  | 2,38  | 2,30  | 2,30  | 2,01     |
| 60       | 7,08  | 4,98  | 4,13  | 3,65  | 3,34  | 3,12  | 2,50  | 2,12  | 2,03  | 1,94  | 1,94  | 1,60     |
| 120      | 6,85  | 4,79  | 3,95  | 3,48  | 3,17  | 2,96  | 2,34  | 1,95  | 1,86  | 1,76  | 1,76  | 1,38     |
| $\infty$ | 6,64  | 4,60  | 3,78  | 3,32  | 3,02  | 2,80  | 2,18  | 1,79  | 1,70  | 1,59  | 1,59  | 1,00     |

Tafel A 6. Kritische Korrelationskoeffizienten

| Freiheitsgrad | 10%   | 5%    | 1%    | 0,1%  |
|---------------|-------|-------|-------|-------|
| 1             | 0,988 | 0,997 | 1,000 | 1,000 |
| 2             | 0,900 | 0,950 | 0,990 | 0,999 |
| 3             | 0,805 | 0,878 | 0,959 | 0,991 |
| 4             | 0,729 | 0,811 | 0,917 | 0,974 |
| 5             | 0,669 | 0,754 | 0,875 | 0,951 |
| 6             | 0,621 | 0,707 | 0,834 | 0,925 |
| 7             | 0,581 | 0,666 | 0,798 | 0,898 |
| 8             | 0,549 | 0,632 | 0,765 | 0,872 |
| 9             | 0,521 | 0,602 | 0,735 | 0,847 |
| 10            | 0,497 | 0,576 | 0,708 | 0,823 |
| 11            | 0,476 | 0,553 | 0,684 | 0,801 |
| 12            | 0,457 | 0,532 | 0,661 | 0,780 |
| 13            | 0,441 | 0,514 | 0,641 | 0,760 |
| 14            | 0,426 | 0,497 | 0,623 | 0,742 |
| 15            | 0,412 | 0,482 | 0,606 | 0,725 |
| 16            | 0,400 | 0,468 | 0,590 | 0,709 |
| 17            | 0,389 | 0,456 | 0,575 | 0,693 |
| 18            | 0,379 | 0,444 | 0,561 | 0,679 |
| 19            | 0,369 | 0,433 | 0,549 | 0,665 |
| 20            | 0,360 | 0,423 | 0,537 | 0,652 |
| 21            | 0,352 | 0,413 | 0,526 | 0,640 |
| 22            | 0,344 | 0,404 | 0,515 | 0,629 |
| 23            | 0,337 | 0,396 | 0,505 | 0,618 |
| 24            | 0,330 | 0,388 | 0,496 | 0,607 |
| 25            | 0,323 | 0,381 | 0,487 | 0,597 |
| 30            | 0,296 | 0,349 | 0,449 | 0,554 |
| 35            | 0,275 | 0,325 | 0,418 | 0,519 |
| 40            | 0,257 | 0,304 | 0,393 | 0,489 |
| 45            | 0,243 | 0,288 | 0,372 | 0,465 |
| 50            | 0,231 | 0,273 | 0,354 | 0,443 |
| 60            | 0,211 | 0,250 | 0,325 | 0,408 |
| 70            | 0,195 | 0,232 | 0,302 | 0,380 |
| 80            | 0,183 | 0,217 | 0,283 | 0,357 |
| 90            | 0,172 | 0,205 | 0,267 | 0,338 |
| 100           | 0,164 | 0,195 | 0,254 | 0,321 |
| 150           | 0,134 | 0,159 | 0,208 | 0,264 |
| 200           | 0,116 | 0,138 | 0,181 | 0,230 |
| 250           | 0,104 | 0,124 | 0,162 | 0,206 |
| 300           | 0,095 | 0,113 | 0,148 | 0,188 |
| 350           | 0,088 | 0,105 | 0,137 | 0,175 |
| 400           | 0,082 | 0,098 | 0,128 | 0,164 |
| 450           | 0,077 | 0,092 | 0,121 | 0,154 |
| 500           | 0,073 | 0,088 | 0,115 | 0,146 |
| 600           | 0,067 | 0,080 | 0,105 | 0,134 |
| 700           | 0,062 | 0,074 | 0,097 | 0,124 |
| 800           | 0,058 | 0,069 | 0,091 | 0,116 |
| 900           | 0,055 | 0,065 | 0,086 | 0,109 |
| 1000          | 0,052 | 0,062 | 0,081 | 0,104 |

## Literaturverzeichnis

## Abschnitt 1

- [1.1] Wiener, N.: Kybernetik, Düsseldorf, Wien: ECON-Verlag 1963
- [1.2] Reinisch, K.: Kybernetische Grundlagen und Beschreibung kontinuierlicher Systeme. Berlin: VEB Verlag Technik 1974
- [1.3] Wernstedt, J.: Methoden und Erfahrungen zur Prozeßsteuerung und Entscheidungsfindung durch den Menschen auf der Grundlage von Beratungs-/Expertensystemen. messen, steuern, regeln 28 (1985) 7, S.295-298
- [1.4] Proc. der IFAC-Symposien „Identification and System Parameter Estimation“. Prag 1967/1970, Den Haag 1973, Tbilissi 1976, Darmstadt 1979, Washington 1982, York 1985, Peking 1988
- [1.5] Åström, K.J.; Eykhoff, P.: Systemidentifikation – a survey. Automatic 7 (1971) S.123/162
- [1.6] Bergmann, S., u.a.: PROFIS – ein Prozeßführungssystem zur Herstellung integrierter Schaltkreise. 30.Internat. Wiss. Koll. der TH Ilmenau 1985
- [1.7] Scharadt, A.; Trippler, D.: Entwicklung und Aufbau eines Prozeßführungssystems zur Herstellung integrierter Schaltkreise (PROFIS) für die Mengensteuerung einer Zelle im VEB MME. Diss. A, TH Ilmenau 1986
- [1.8] Schmidt, M.; Puta, H.; Reinisch, K.: Contribution to the optimization of the plant growth factors in the greenhouse and in the open land. 9. IFAC-Weltkongreß, Budapest 1984
- [1.9] Otto, P.; Sokollik, K.; Wernstedt, J.; Dietzmann, M.: Innentemperatur-Vorhersagemodell zur Mikrorechnersteuerung von Gewächshäusern. messen, steuern, regeln 25 (1982) 11, S.602-608
- [1.10] Otto, P.; Sokollik, K.; Wernstedt, J.; Dietzmann, M.: Development and testing of a inside temperature model for a microcomputer controlled greenhouse. Preprints 9. IFAC-Weltkongreß, Budapest 1984
- [1.11] Dietzmann, M.: Untersuchung eines Mehrkanal-Mikroprozessorreglers in der LPG Frühgemüsezentrum Dresden als Grundlage für den Einsatz von Mikrorechnern zur Klimasteuerung in Gewächshäusern. Diss. B, Ing.-Schule Berlin-Wartenberg 1985
- [1.12] Straskaba, M.; Gnauck, A.: Aquatische Ökosysteme. Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1983
- [1.13] Uhlmann, D.: Hydrobiologie. 2. Aufl., Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1982
- [1.14] Gnauck, A.; Wernstedt, J.; Winkler, W.: Zur Bildung mathematischer Modelle limnischer Ökosysteme mittels rekursiver Schätzverfahren. Int. Revue ges. Hydrobiologie 61 (1976) 6, S.609-626
- [1.15] Gnauck, A.; Wernstedt, J.; Winkler, W.: Zur Erstellung von Wassergütemodellen für Talsperren mittels rekursiver Schätzverfahren. Acta hydrochim. hydrobiol. 3 (1975) 4, S.381-384
- [1.16] Wernstedt, J.; Winkler, W.: Modellierung des Sauerstoffgehaltes der Spree in der Hauptstadt der DDR – Berlin. Bericht, TH Ilmenau 1979
- [1.17] Hoffmeyer-Zlotnik, H.J.; Wernstedt, J.: Global catchment area model for an operational water quantity forecast-pilot project: river basin of the Werra/GDR. Proc. 7. IFAC-Symposium „Identification and Systemparameter Estimation“ York 1985
- [1.18] Hoffmeyer-Zlotnik, H.J.; Seifert, A.; Wernstedt, J.: Drawing quantity forecast of river basins. Proc. VIII. IFAC-Kongreß Kyoto 1981
- [1.19] Hoffmeyer-Zlotnik, H.J.; Seifert, A.; Wernstedt, J.: Operative Wassermengenvorhersage für das Flußgebiet der Werra. Bericht, TH Ilmenau 1975-1982
- [1.20] Böhnhardt, G.; Poitz, W.: Signalanalyse und Modellbildung des statischen Verhaltens eines kontinuierlichen Fermentationsverfahrens. Diplomarbeit, TH Ilmenau 1973
- [1.21] Zimmermann, W.: Zu Problemen der Anwendung der Korrelations- und der Regressionsanalyse zur statischen Identifikation kontinuierlicher technologischer Prozesse. Diss. A, TH Ilmenau 1977
- [1.22] Kiesewetter, M.: Entwurf und Erprobung des Beratungssystems „GLUCON“ zur perioperativen Blutglukoseführung insulinpflichtiger Diabetiker. Diss. TH Ilmenau 1985
- [1.23] Kiesewetter, M.; Wernstedt, J.; Lemke, K.; Möricke, R.: Entwurf und Erprobung einer rechnergestützten Steuerung des Glukoseniveaus des Menschen mit dem Beratungssystem „GLUCON“. 30. Internat. Wiss. Koll. der TH Ilmenau 1985
- [1.24] Möricke, R.; Kiesewetter, M.; Wernstedt, J.: Klinische Anforderungen und Erfahrungen mit dem Steuer- und Beratungssystem GLUCON. Wiss. Tagung der AdW: Bioelekt. Sensoren. Berlin 1985
- [1.25] Wernstedt, J.; Beyer, J.; Otto, P.: Identifikation und Modellierung des dynamischen Verhaltens des Herz-Kreislaufsystems des Menschen unter Verwendung aufgeprägter Belastungsfolgen. Bericht, TH Ilmenau 1977
- [1.26] Trabert, A.; Beyer, J.; Tiedt, N.; Wernstedt, J.: Ergometrische Untersuchungen mit nichtlinearen Testverfahren. Ergebn. exp. Med. 41 (1982) S.81-86
- [1.27] Beyer, J.; Wernstedt, J.; Zwiener, U.: Versuche zur Modellierung des Blutdruckregelkreises des Menschen aus optimalen binären Belastungsfolgen. In: Zwiener, U., Signaltheor. Methoden und Modelle in der Medizin. Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1977
- [1.28] Trabert, A.: Ein Beitrag zur Erstellung nichtlinearer Modelle des Herz-Kreislaufverhaltens des Menschen bei Belastung auf dem Fahrradergometer. Diss. TH Ilmenau 1984
- [1.29] Michels, R.; Wernstedt, J.; Tiedt, N.: Experimentelle Systemanalyse der orthostatischen Herzfrequenzregulation mit Differenzgleichungen unter Verwendung von Ilmenauer optimalen Testfolgen (ILMOS). 30. Internat. Wiss. Koll. der TH Ilmenau 1985
- [1.30] Michels, R.: Entwicklung und Erprobung von Strategien zur Ermittlung von Differenzgleichungsmodellen für die Beschreibung von kardiovaskulären Funktionsparametern. Diss. A, TH Ilmenau 1987
- [1.31] Wernstedt, J.: Ein Beitrag zur Entwicklung und Erprobung von Verfahren zur prozeßgekoppelten statistischen Modellbildung zeitvarianter multivariabler Systeme. Diss. B, TH Ilmenau 1978
- [1.32] Böhme, D.; Winkler, W.; Wernstedt, J.: Ein Programmsystem zur rechnergestützten Prozeßanalyse – EXPRAN. TH Ilmenau 1982
- [1.33] Trippler, D.; Otto, P.; Seifert, A.; Wernstedt, J.: Ein dialogorientiertes Programmsystem zur rechnergestützten Prozeßanalyse – DIOPRAN. TH Ilmenau 1986
- [1.34] Lee, R.: Optimal estimation, identification and control. MIT Press, Research Monograph 28 (1964)
- [1.35] Deutsch, R.: Estimation theory. Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice Hall 1965
- [1.36] Albert, A.; Gardner, L.A.: Stochastic approximation and nonlinear regression. Cambridge (Mass.) 1967
- [1.37] Strobel, H.: Systemanalyse mit determinierten Testsignalen. Berlin: VEB Verlag Technik 1968
- [1.38] Åström, K.: Introduction to stochastic control theory. New York: Academic Press 1970
- [1.39] Nalimov, V.V.: Teorija eksperimenta. Moskau: Nauka 1971
- [1.40] Isermann, R.: Experimentelle Analyse der Dynamik von Regelsystemen. Mannheim: Bibliografisches Institut 1971
- [1.41] Zypkin, I.S.: Grundlagen der Theorie lernender Systeme. Berlin: VEB Verlag Technik 1972
- [1.42] Bandemer, H.; Bellmann, A.; Jung, W.; Richter, K.: Optimale Versuchsplanung I. Berlin: Akademie-Verlag 1973
- [1.43] Hartmann, K.; Letzki, E.; Schäfer, W.: Statistische Versuchsplanung in der Stoffwirtschaft. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1974
- [1.44] Isermann, R.: Prozeßidentifikation. Berlin: Springer-Verlag 1974
- [1.45] Unbehauen, H.; Göhring, E.; Bauer, B.: Parameterschätzverfahren zur Systemidentifikation. München: R. Oldenbourg Verlag 1974
- [1.46] Strobel, H.: Experimentelle Systemanalyse. Berlin: Akademie-Verlag 1975
- [1.47] Eykhoff, P.: Systemparameter and state estimation. London: J. Wiley & Sons 1976
- [1.48] Bandemer, H.; Näher, W.: Theorie und Anwendung der optimalen Versuchsplanung II. Berlin: Akademie-Verlag 1980
- [1.49] Sönderström, T.; Stoica, P.: Instrumental variable methods of system identification. Berlin: Springer-Verlag 1983
- [1.50] Ivachnenko, A.G.; Müller, J.A.: Selbstorganisation von Vorhersagemodellen. Berlin: VEB Verlag Technik 1984
- [1.51] Young, P.C.: Recursive estimation and timeseries analysis: an introduction. Berlin: Springer-Verlag 1984
- [1.52] Unbehauen, H.: Regelungstechnik Band I, II, III. Braunschweig, Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn 1985
- [1.53] Wede, J.; Werner, D.: Echtzeitprozeßmodelle auf der Basis von Parameterschätzverfahren. Berlin: VEB Verlag Technik 1985
- [1.54] Isermann, R.: Identifikation dynamischer Systeme. Berlin: Springer-Verlag 1988

## Abschnitt 2

- [2.1] *Cramer, H.*: Mathematical methods of statistics. Princeton N. J.: Princeton University Press 1963
- [2.2] *Smirnow, N.W.*; *Dunin-Barkowski, J.W.*: Mathematische Statistik in der Technik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963
- [2.3] *Storm, R.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1965
- [2.4] *Fisz, M.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1965
- [2.5] *Weber, E.*: Grundriß der biologischen Statistik. Jena: Gustav-Fischer-Verlag 1967
- [2.6] *Lindner, A.*: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. 4. Aufl. Basel 1964
- [2.7] *Rasch, D.*: Elementare Einführung in die mathematische Statistik. 2. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970
- [2.8] *Gnedenko, B.W.*: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 6. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1971
- [2.9] *Müller, H.*; *Neumann, P.*; *Storm, R.*: Tafeln der mathematischen Statistik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979
- [2.10] *Müller, P.*: Lexikon der Stochastik. 3. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1980

## Abschnitt 3

- [3.1] *Reinisch, K.*: Analyse und Synthese kontinuierlicher Steuerungssysteme. Berlin: VEB Verlag Technik 1979
- [3.2] *Günther, M.*: Zeitdiskrete Steuerungssysteme. Berlin: VEB Verlag Technik 1986
- [3.3] *Lange, F.H.*: Korrelationselektronik. Berlin: VEB Verlag Technik 1962
- [3.4] *Lange, F.H.*: Signale und Systeme (Bd. 1 und 3). Berlin: VEB Verlag Technik 1966/1971
- [3.5] *Schlitt, H.*: Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Systemen. Berlin: VEB Verlag Technik 1968
- [3.6] *Solodownikow, W.W.*: Einführung in die statistische Dynamik linearer Regelungssysteme. Berlin: VEB Verlag Technik 1963
- [3.7] *Lorenz, G.*: Störgrößenanalyse. Berlin: VEB Verlag Technik 1985
- [3.8] *Leonhard, W.*: Statistische Analyse linearer Regelungssysteme. Stuttgart: B.G. Teubner 1973
- [3.9] *Box, G.E.P.*; *Jenkins, G.M.*: Time series analysis forecasting and control. San Francisco 1970
- [3.10] *Anderson, T.W.*: The statistical analysis of time series. New York: J. Wiley 1971
- [3.11] *Andel, J.*: Statistische Analyse von Zeitreihen. Berlin: Akademie-Verlag 1984
- [3.12] *Achilles, D.*: Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung. Berlin: Springer-Verlag 1985
- [3.13] *Koopmans, T.*: Linear regression analysis of economic time series. De Erven, F. Bohn, n. v. Harlem 1937
- [3.14] *Toutenburg, H.*; *Rödel, E.*: Mathematisch-statistische Methoden in der Ökonomie. Berlin: Akademie-Verlag 1978
- [3.15] *Birkenfeld, W.*: Methoden zur Analyse von kurzen Zeitreihen. Basel: Birkhäuser Verlag 1977
- [3.16] *Knopp, K.*: Theorie und Anwendung unendlicher Reihen. Berlin: Springer-Verlag 1964
- [3.17] *Jenkins, G.M.*; *Priestley, M.B.*: The spectral analysis of time series. Journal of the royal statistical society 19 (1975) 1, S. 1-12
- [3.18] *v. Mezynski, W.*: Ein Beitrag zur Ermittlung von Kennfunktionen und Modellen für stochastisch gestörte Signale. Diss. A, TH Ilmenau 1981
- [3.19] *Chatfield, C.*: Analyse von Zeitreihen. Leipzig: B.G. Teubner Verlagsges. 1982
- [3.20] *Ljung, G.M.*; *Box, G.E.P.*: The likelihood function of stationary autoregressive-moving-average models. Biometrika 66 (1979) S. 265-270
- [3.21] *Ogier, R.G.*; *Wong, E.*: Recursive linear smoothing of two-dimensional random fields. IEEE Trans. Inf. Theory 27 (1981) 3, S. 77-83
- [3.22] *Hannan, E.J.*: Recursive estimation based on ARMA-models. The annals of statistics 8 (1980) 4, S. 762-777
- [3.23] *Stearns, S.D.*: Digitale Verarbeitung analoger Signale. München: R. Oldenbourg 1979
- [3.24] *Schwarz, H.*: Optimale Regelung und Filterung/Zeitdiskrete Regelungssysteme. Berlin: Akademie-Verlag 1981

## Abschnitt 4

- [4.1] *Strejc, V.*: Approximation aperiodischer Übergangscharakteristiken. messen, steuern, regeln 3 (1960) 3, S. 115-124
- [4.2] *Radtke, M.*: Zur Ermittlung der statischen und dynamischen Kennwerte von linearen und nicht-

linearen Übertragungsgliedern aus aufgezeichneten Übergangsfunktionen. Diss. A, TH Ilmenau 1967

- [4.3] *Sponer, J.*: Kontinuierliche Steuerungen (Arbeitsbuch). Berlin: VEB Verlag Technik 1977
- [4.4] *Schwarze, G.*: Übersicht über die Zeitprozentkennwertmethode zur Ermittlung der Übertragungsfunktion aus der Gewichtsfunktion, Übergangsfunktion oder Anstiegsantwort. messen, steuern, regeln 8 (1965) 10, S. 356-359
- [4.5] *Simoju, M.P.*: Opredelenie koeffizientov predatocnych funkcij linearizovanuych zvenev i sistem avtoregulirovanija. Avtomatika i Telemekhanika XVII (1957) 6, S. 514-528
- [4.6] *Schwarze, G.*: Regelungstechnik für Praktiker. Berlin: VEB Verlag Technik 1977
- [4.7] *Unbehauen, H.*: Ein graphisch-analytisches Verfahren zur Bestimmung des Frequenzganges aus der Übergangsfunktion. Regelungstechnik 11 (1963) 12, S. 551-555
- [4.8] *Werner, G.W.*: Entwicklung einfacher Verfahren zur Kennwertermittlung an linearen industriellen Regelstrecken mit Testsignalen. Diss. A, TH Ilmenau 1965
- [4.9] *Wilfert, H.H.*: Signal- und Frequenzganganalyse an stark gestörten Systemen. Berlin: VEB Verlag Technik 1969
- [4.10] *Van den Bas, A.*: Construction of binary multifrequency testsignals 1. IFAC Symposium „Identification and Parameter Estimation“, Prag 1967
- [4.11] *Bode, H.W.*: Network analysis and feedback amplifier design. New York. D. van Nostrand Company, Inc. 1945
- [4.12] *Truxal, J.G.*: Entwurf automatischer Regelsysteme. München: R. Oldenbourg Verlag 1960
- [4.13] *Szweda, T.*: Metoda pomiaru wspolczynnikow przepusowosci czlonkow dynamicznych. Arch. Automatyki i Telemekhaniki 3 (1958) 1/2, S. 3-15
- [4.14] *Brammer, K.*; *Sifflin, G.*: Kalman-Bucy-Filter; Deterministische Beobachtung und stochastische Filterung. München: R. Oldenbourg Verlag 1975
- [4.15] *Föllinger, O.*: Regelungstechnik. Berlin: AEG-Telefunken 1980
- [4.16] *Luenberger, D.G.*: Observers for multivariable systems. IEEE Trans. on Autom. Control AC-11 (1966) S. 190-197
- [4.17] *Ackermann, J.*: Einführung in die Theorie der Beobachter. Regelungstechnik 24 (1976) S. 217-226
- [4.18] *Wonham, W.H.*: On pole assignment in multiinput controllable linear systems. IEEE Trans. on Autom. Control 12 (1967) S. 600-665

## Abschnitt 5

- [5.1] *Zurmühl, R.*: Praktische Mathematik. Berlin: Springer-Verlag 1964
- [5.2] *Kuo, S.S.*: Numerical methods and computers. Massachusetts: Addison Wesley 1965
- [5.3] *Faddeev, D.K.*; *Faddeeva, N.N.*: Numerische Methoden der linearen Algebra. München: R. Oldenbourg Verlag 1964
- [5.4] *Gantmacher, F.R.*: Matrizenrechnung, Bd. 1 und 2. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1965
- [5.5] *Schwarz, H.*; *Rutishauser, H.*; *Stiefel, E.*: Matrizennumerik. Stuttgart: Teubner Verlag 1968
- [5.6] *Hofer, E.*; *Lunderstädt, R.*: Numerische Methoden der Optimierung. München: R. Oldenbourg Verlag 1975
- [5.7] *Householder*: Principles of numerical analysis. New York: McGraw Hill 1953
- [5.8] *Powell, N.J.*: A method for minimizing a sum of squares of nonlinear functions without calculating derivatives. Computer I. 7 (1964), S. 303-307
- [5.9] *Fox, L.*: Optimization methods for engineering design. London: Addison Wesley 1971
- [5.10] *Fletcher, R.*: Optimization. New York: Academic Press 1968
- [5.11] *Pierre, D.A.*: Optimization theory with applications. New York: John Wiley 1969
- [5.12] *Wilde, D.J.*: Optimum seeking methods. New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1964
- [5.13] *Marquardt, D.W.*: An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. SIAM Journ. of Control 11 (1963) S. 431-441
- [5.14] *Bard, Y.*: Comparison of gradient methods for the solution of nonlinear parameter estimation problems. SIAM Journ. on Num. Analysis 7 (1970) S. 157-186
- [5.15] *Wismar, D.A.*; *Chattergy, R.*: Introduction to nonlinear Optimization. North-Holland Series in System Science and Engineering 1978
- [5.16] *Brooks, S.H.*: A Discussion of random methods for seeking maxima. Operation Research 6 (1958) S. 244-251
- [5.17] *Rastrigin, K.A.*: Algoritmy i programmy sluchainogo poiska. Riga: Ssnije 1969
- [5.18] *White, R.C.*: A survey of random methods for parameter estimation. Eindhoven University of Technologie, Eindhoven 1971, Report Nr. 70-E-16

- [5.19] Schwefel, H.P.: Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie. Basel: Birkhäuser Verlag 1977
- [5.20] Clarke, D.W.: Generalized least-squares estimation of the parameters of a dynamic model. 1. IFAC-Symposium Identification and Parameter Estimation, Prag 1967
- [5.21] Gastinel, N.: Lineare numerische Analysis. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972
- [5.22] Wernstedt, J.: Zur Parameterschätzung statischer Systeme mittels rekursiver Verfahren. messen, steuern, regeln 16 (1973) 1, S.25–27
- [5.23] Robbins, H.; Monro, S.: A stochastic approximation method. Ann. Math. Stat. 22 (1951) S.400–407
- [5.24] Kiefer, J.; Wolfowitz, J.: Stochastic estimation of the maximum of a regressionfunction. Ann. Math. Stat. 23 (1952) S.462–466
- [5.25] Dvoretzky, A.: On stochastic approximation. Proceed. Berkely Symposium of Math. Stat. and Prob. (1956) S.39–56
- [5.26] Osborn, P.V.: Investigation of a method of adaptive control. Doctor of science thesis, MIT 1961, Report No. T 266
- [5.27] Rake, H.: Selbststellende Systeme nach dem Gradientenverfahren. Diss. A, TH Hannover 1965
- [5.28] Hörl, A.E.: Application of ridge analysis to regressionsproblems. Chem. Eng. Progr. 3 (1962) S.54–59
- [5.29] Hörl, A.E.; Kennard, R.W.: Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. Technometrics 12 (1970) 1, S.55–67
- [5.30] Lehmann, G.: Zur statistischen Modellbildung multivariabler technischer Systeme bei korrelierten Einflußgrößen. Diss. A, TH Ilmenau 1975
- [5.31] Voigt, D.: Ein Beitrag zur Parameterschätzung von Systemen mit konzentrierten Parametern unter Verwendung von a-priori Informationen. Diss. A, TH Ilmenau 1974
- [5.32] Krabs, W.: Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung für Ingenieure. Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft 1983
- [5.33] Marquardt, D.W.: An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. SIAM J. on Num. Analysis 7 (1970) S.157–186
- [5.34] Gyuerki, J.: Über adaptive Algorithmen zur Ermittlung von linearen Modellen. XV. IWK der TH Ilmenau 1970
- [5.35] Lindner, A.: Planen und Auswerten von Versuchen. 3. Aufl. Basel: Verlag Birkhäuser 1968
- [5.36] Krug, G.K.: Planirowanie eksperimenta. Moskau: Nauka 1966
- [5.37] Lee, W.: Experimental design and analysis. San Francisco: Freeman and Co. 1975
- [5.38] Nalimov, V.V.: Theorie des Experimentes – Eine mathematisch-statistische Methodologie des Versuches. Berlin: VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag 1975
- [5.39] Scheffler, E.: Einführung in die Praxis der statistischen Versuchsplanung. 2. Aufl. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1986
- [5.40] Hätler, G.: Versuchsplanung und statistische Datenanalyse. Berlin: Akademie-Verlag 1976
- [5.41] Box, G.E.P.; Hunter, W.G.; Hunter, J.S.: Statistics for experimenters. New York: Wiley and Sons 1978
- [5.42] Rasch, D.; Herrendörfer, G.: Statistische Versuchsplanung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1982
- [5.43] Karlin, S.; Studden, W.J.: Optimal experimental design. Ann. Math. Stat. 37 (1966) S.783–815
- [5.44] Box, G.E.; Hunter, J.S.: Multifactor experimental design for exploring response surfaces. Ann. Math. Stat. 28 (1957) S.195–141
- [5.45] Box, G.E.; Hunter, J.S.: The  $2^{k-p}$  fractional factorial designs. Teil I, Technometrics 3 (1961) S.311–351; Teil II, Technometrics 3 (1961) S.449–458
- [5.46] Plackett, R.L.; Burman, J.P.: The design of optimum multifactorial experiments. Biometrika 33 (1946) S.305–325
- [5.47] Box, G.E.P.; Lucas, H.L.: Design of experiments in nonlinear situations. Biometrika 46 (1959) S.77–90
- [5.48] Hartley, H.O.: Smallest composite design for quadratic response surfaces. Biometrics 15 (1959) S.611–624
- [5.49] Westlake, W.J.: Composite designs based on irregular fractions of factorials. Biometrics 21 (1965) S.324–336

## Abschnitt 6

- [6.1] Volterra, V.: Theory of functionals and of integrals and Integro-differential Equations. Dover, New York: 1959
- [6.2] Krug, G.K.; Sosulin, J.A.; Fatujew, W.A.: Planirowanie eksperimenta w sadatschach identifikazii ekstrapoljazik. Moskau: Nauka 1977

- [6.3] Otto, P.: Entwurf und Anwendung eines Systems von optimalen Testsignalfolgen zur Identifikation linearer und nichtlinearer dynamischer Systeme. Diss. B, TH Ilmenau 1987
- [6.4] Wernstedt, J.; Otto, P.; Krug, G.K.; Fatujew, W.A.: Methoden zum Entwurf optimaler Testsignalfolgen für die Identifikation linearer und nichtlinearer dynamischer Systeme. WZ der TH Ilmenau 31 (1985) 5, S.111–137
- [6.5] Savadis, G.N.: Stochastic approximation methods for identification and control – a survey. IEEE Trans. Aut. Control AC-19 (1974) 6
- [6.6] Sen, A.; Sinha, N.K.: On-line system identification using a combined stochastic approximation and pseudoinverse algorithms. IFAC-Symposium „Stochastic Control“, Budapest 1974, S.225–231
- [6.7] Kaminskas, V.: Ozenka parametrov diskretnych sistem klassa Gammerstejna. Automatika; Telemechanika (1975) 7
- [6.8] Stoica, P.: On the convergence of an iterative algorithm used for Hammerstein system identification. IEEE Trans. on Autom. Control AC-26 (1981) 4, S.967–969
- [6.9] Haber, R.; Keviczky, L.: Identification of nonlinear dynamic system. 4. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Tbilissi 1976, paper S-4, pp.62–112
- [6.10] Rosenthal, B.: Beitrag zur Identifikation für einfache nichtlineare dynamische Systeme in offener und geschlossener Kette. Diss. A, TH Ilmenau 1985
- [6.11] Schulz, H.: Beitrag zur Echtzeitparameterschätzung von nichtlinearen dynamischen Systemen. Diss. A, TH Magdeburg 1985
- [6.12] Keviczky, L.; Banyacz, C.: On input signal synthesis for linear discrete time systems. 3. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Den Haag 1973
- [6.13] Eykhoff, P.; van den Boom, A.; van Rede, A.: System identification methods – unification and information – development using template functions. VIII. IFAC-Congress, Kyoto, 1981, vol. VI. p.83
- [6.14] Wong, K.; Polak, E.: Identification of linear discrete time systems using the IV-method. IEEE Trans. Autom. Control 12 (1969) S.707–718
- [6.15] Young, P.: An instrumental variable method for realtime identification of a noisy process. Automatica 6 (1970) S.271–287
- [6.16] Clarke, D.: Generalized LS estimation of the parameters of a dynamic model. 1. IFAC-Symposium Identification in automatic control systems, Prag 1967
- [6.17] Hastings-James, R.; Sage, M.: Recursive GLS procedure for on-line identification of process parameters. Proceed. IEE 116 (1969) S.2057–2062
- [6.18] Söderström, Th.: Convergence properties of the generalized least-squares identification method. 3. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Den Haag 1973
- [6.19] Bohlin, T.: The ML-method of identification. IBM Schweden, paper 18. 191, 1968
- [6.20] Gustavson, J.: Comparison of different methods for identification of industrial processes. Automatica 8 (1972) S.127–142
- [6.21] Peterka, V.; Halouskova, A.: Tally estimation of Aström modell for stochastic systems. 2. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Prag 1970
- [6.22] Peterka, V.; Smuk, K.: On-line estimation of dynamic model parameters from input-output data. 4. IFAC-Kongreß, Warschau 1969
- [6.23] Mehra, R.K.: Nonlinear System identification selected survey and recent trends. 5. IFAC-Symposium Identification and System Parameter Estimation, Darmstadt 1979
- [6.24] Hoffmeyer-Zlotnik, H.J.: Ein Beitrag zur Schätzung nichtparametrischer Modelle dynamischer Systeme mittels aktiver Experimente. Diss. A, TH Ilmenau, 1976
- [6.25] Zarrop, H.P.: Optimal experiment design for dynamic system identification. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1979
- [6.26] Sokollik, K.: Ein Beitrag zur optimalen Gestaltung von Testfolgen zur Schätzung linearer und einfacher nichtlinearer Differenzgleichungsmodelle. Diss. A, TH Ilmenau 1983
- [6.27] Briggs, P.A.; Godfrey, K.R.: Pseudorandom signals for the dynamic analysis of multivariable systems. Proc. IEE 113 (1966) S.1259–1267
- [6.28] Godfrey, K.R.: Three level  $m$ -sequences. Electronics Letters 2 (1966) S.241
- [6.29] Levadi, V.S.: Design of input signals for parameter estimation. IEEE Trans. Autom. Control AE-11 (1966) S.205–211
- [6.30] Tuis, L.: Anwendung von mehrwertigen pseudozufälligen Signalen zur Identifikation von nichtlinearen Regelungssystemen. Schriftenreihe des Lehrstuhls für Meß- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 6, 1975
- [6.31] Wiener, N.: Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York: Wiley 1949
- [6.32] Kalman, R.E.: A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans. ASME, series D, J. Basic Engg. 82 (1960) S.35–45

- [6.33] Kalman, R.E.; Bucy, R.S.: New results in linear filtering and prediction theory. Trans. ASME, series D, J. Basic Engg. 83 (1961) S.95-108
- [6.34] Jazwinski, A.H.: Stochastic processes and filtering theory. New York: Academic Press 1970
- [6.35] Söderström, Th.; Gustavsson, L.; Ljung, K.: Identifiability conditions for linear systems operating in closed loop. Intern. J. Control 21 (1975) 2, S.243-255
- [6.36] Beyer, J.: Parameterschätzverfahren zur Identifikation rückgekoppelter dynamischer Systeme. Diss. A, TH Ilmenau 1975
- [6.37] Bauer, B.: Parameterschätzverfahren zur on-line Identifikation dynamischer Systeme im offenen und geschlossenen Regelkreis. Diss. A, Ruhr-Universität Bochum 1977
- [6.38] Bretthauer, G.: Identifikation rückgekoppelter Mehrgrößensysteme im Frequenzbereich - Einheitliche Darstellung und Vergleich von Verfahren. Diss. B, TU Dresden 1983
- [6.39] Schulze, H.: Anwendung von Schätzverfahren für die Kenngrößen von Regelstrecken aufgrund von Messungen am geschlossenen Regelkreis. Diss. A, TU Braunschweig 1972
- [6.40] Thöm, H.; Krebs, V.: Identifikation im geschlossenen Regelkreis - Korrelationsanalyse oder Parameterschätzung? Regelungstechnik 23 (1975) 1, S.17-19
- [6.41] Bretthauer, G.: Identifiability of linear systems. ZKI-Informationen, Berlin (1985) 1, S.1/69
- [6.42] Bretthauer, G.: Über die Anwendung der statistischen Entscheidungstheorie zur Modellselektion in offenen und geschlossenen Regelkreisen. Diss. A, TU Dresden 1977
- [6.43] Göhring, B.: Erprobung statistischer Parameterschätzmethoden und Strukturprüfverfahren zur experimentellen Identifikation von Regelsystemen. Diss. A, Universität Stuttgart 1973
- [6.44] Müller, J.-A.: Auswahl von Methoden optimaler Kompliziertheit. messen, steuern, regeln 30 (1987) 7, S.302-306
- [6.45] Litz, L.: Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modularer Verfahren. Stuttgart: Hochschulverlag 1979
- [6.46] Diekmann, K.: Die Identifikation von Mehrgrößensystemen mit Hilfe rekursiver Parameterschätzverfahren. Diss. A, Ruhr-Universität Bochum 1981

## Sachwörterverzeichnis

Abtastperiode/Abtastzeit 76  
 -, Wahl 77, 238ff.  
 Amplitudenfrequenzgang 172f.  
 Amplitudenspektrum 77  
 A-Optimalität 235  
 A-priori-Information 190f.  
 Autokorrelationsfunktion 81  
 Autoleistungsdichtespektrum 88  
 autoregressiver Prozeß (AR-Modell) 114ff.  
 - der gleitenden Mittel (ARMA-Modell) 119ff.  
 - der gleitenden Mittel mit einer Hilfsgröße (ARMAX-Modell) 113  
 - integrierender Prozeß der gleitenden Mittel (ARIMA-Modell) 113

Bayes-Schätzung 190f.  
 Beobachter 177ff.  
 -, Beobachteraufgabe 177  
 -, Beobachtung durch ein Parallelmodell 178f.  
 -, Luenberger-Beobachter 180f.  
 Beobachternormalform 182  
 Beratungssystem 19  
 Bestimmtheitsmaß 49f.  
 -, multiple 51  
 -, partiell 50  
 Bewertungsfunktion 54  
 Binärsignal 170, 298f.  
 Bodediagramm 172f.

Chi-Quadrat-Verteilung 53  
 Cholesky-Verfahren 199, 210

Diagnose 19  
 Differenzgleichung 271ff.  
 Dirac-Impuls 76  
 Dominanzmaß der Pole 326  
 D-Optimalität 235  
 Drehbarkeit von Versuchsplänen 236  
 Dreieckswelle 170f.

Echtzeitidentifikation 215ff.  
 Ein-/Ausgangsbeschreibung 152f.  
 Ein-/Ausgangsmodell  
 -, nichtparametrisches 152  
 -, parametrisches 152  
 Entfaltung 166f., 260f.  
 -, mit Ausgleich 260  
 -, ohne Ausgleich 166  
 Ergodizität 80  
 Erwartungswert 45

Expertensystem 19  
 Exzeß 46

Faltungsintegral 166, 257  
 Faltungssumme 167  
 Fehler 196ff.  
 -, Ausgangsfehler 196  
 -, Eingangsfehler 197  
 -, verallgemeinerter Fehler 197  
 Fehlergleichung 196  
 Fensterfunktionen 97ff.  
 -, Bartlett 97  
 -, Parzen 97  
 -, Tukey 97  
 Filter 130ff.  
 -, analoge 131  
 -, digitale 132ff.  
 -, Hochpaßfilter 144f.  
 -, nichtrekursive 132  
 -, rekursive 132  
 -, Tiefpaßfilter 132f.  
 Fishersche Informationsmatrix 234  
 Fisher-Verteilung (F-Verteilung) 53  
 Fourier-Koeffizienten 74  
 Fourier-Reihenentwicklung 74  
 Fourier-Transformation 77  
 -, diskrete 79  
 Frequenzgang 167ff.  
 -, Amplitudenfrequenzgang 169f.  
 -, Approximation durch Polynommodelle 174  
 -, Approximation durch Zeitkonstantenmodelle 169  
 -, Phasenfrequenzgang 169f.  
 Frequenzgangmessung 168ff.  
 -, Bestimmung aus Rechteck- und Dreieckswellen 170f.  
 -, Komponentenverfahren 169  
 -, Synchronaufzeichnungsverfahren 169

Gewichtsfunktion 164ff.  
 -, Entfaltung mit Ausgleich 260f.  
 -, Entfaltung ohne Ausgleich 166ff.  
 Gleichungsfehler (s. verallgemeinerter Fehler) 197  
 G-Optimalität 236  
 Gradientenverfahren 199f., 216ff.

Hadamard-Matrix 305  
 Hammerstein-Modell 259f., 292f.  
 Häufigkeit 41  
 -, absolute 41  
 -, relative 41

Hilfsvariablen 283f.  
 Hilfsvariablen-schätzung 283ff.  
 –, direkte Methode 283  
 –, rekursive Methode 287  
 Hypothesen 62  
 –, Alternativhypothese 62  
 –, Nullhypothese 62  
  
 Identifikation 32f.  
 –, Parameteridentifikation 33f.  
 –, Zustandsidentifikation 34f.  
 Impulsantwort 165ff.  
 Impulsfunktion 164ff.  
 Informationsmatrix 234  
 Irrtumswahrscheinlichkeit 52  
 iterative Schätzverfahren 199f.  
 –, gradientenfreie Verfahren 199  
 –, Gradientenverfahren 199  
 –, Zufallssuchverfahren 199  
  
 Kalman-Filter 317f.  
 Kammlinie 206  
 Kammlinienregression 206ff.  
 Konfidenzintervall 67  
 Korrelationsfunktion 81f.  
 –, Autokorrelationsfunktion 81  
 –, experimentelle Bestimmung 84  
 –, Kreuzkorrelationsfunktion 83  
 Korrelationskoeffizient 49  
 –, einfacher 49  
 –, empirischer 60  
 –, kritischer 67  
 –, multipler 50  
 –, partieller 50  
 Korrelationsmatrix 51  
 Korrelationsverfahren 96f.  
 Korrelatoren 84  
 Kostenfunktion 190  
 Kovarianz 48  
 Kovarianzmatrix 49  
 –, der Störungen 230f., 315f.  
 –, der Störung auf den Zustand 315f.  
 –, des extrapolierten Zustandes 315f.  
 –, des Fehlers 211  
 –, des Zustandsfehlers 316f.  
 Kreuzkorrelationsfunktion 83  
 Kreuzleistungsdichtespektrum 90  
  
 Laplace-Integral 78  
 Laplace-Transformation 78  
 –, diskrete 79  
 Leistungsdichtespektren 88f.  
 –, Autoleistungsdichtespektrum 88  
 –, experimentelle Bestimmung 91f.  
 –, Kreuzleistungsdichtespektrum 89  
 Lernfolge 325  
 Levenberg-Marquard-Verfahren 214  
 Likelihood-Funktion 192  
 Luenberger-Beobachter 180f.

Markov-Schätzung 192f., 209f.  
 Maximum-Likelihood-Schätzung 191f.  
 Mehrfaktorpläne (s. Versuchspläne) 236ff.  
 –, für lineare Modelle 237f.  
 –, für nichtlineare Modelle 246f.  
 Mehrgrößensystem 189ff.  
 –, Differenzgleichungsmodell 326ff.  
 –, statisches Modell 189ff.  
 –, Volterra-Reihe-Modell 269f.  
 –, Zustandsmodell 314ff.  
 Meßwertmatrix 192ff., 202f.  
 Methode der kleinsten Quadrate (s. Regression) 202ff.  
 m-Folge 301f.  
 Mittelwert 53  
 Modell 33f.  
 –, bestimmung 33  
 –, gleichung 33  
 –, ordnung 156ff., 324f.  
 –, schätzung 33  
 –, struktur 156ff., 324f.  
 –, der gleitenden Mittel (MA-Modell) 110ff.  
 Modellbildung aus der Gewichtsfunktion 164ff.  
 Modellbildung aus der Übergangsfunktion 156ff.  
 –, von I-T<sub>n</sub>-Systemen 162f.  
 –, von P-T<sub>1</sub>-Systemen 156f.  
 –, von P-T<sub>1</sub>-T<sub>D</sub>-Systemen 158f.  
 –, von P-T<sub>n</sub>-T<sub>1</sub>-Systemen 158f.  
 Momente 44  
 –, normale 44  
 –, zentrale 45  
  
 Newton-Raphson-Verfahren 213f.  
 Normalverteilung 44  
 Nullpunktversuch 248  
  
 Optimalitätskriterien der Versuchsplanung 235ff.  
 –, A-Optimalität 235  
 –, D-Optimalität 235  
 –, G-Optimalität 235  
 Orthogonalisierung 199  
 Orthogonalität 236  
 Ortskurve 167ff.  
  
 Parameternachführung 225ff.  
 Parameterschätzung 34  
 Parametervektor 33f.  
 Parsevalsche Gleichung 90  
 Phasenfrequenzgang 172f.  
 Phasenspektrum 77  
 Plackett-Burman-Plan 243f.  
 Planungskern 248f.  
 Prognosebereich 235  
 Prozeßanalyse 32  
 –, experimentelle 35  
 –, theoretische 35  
 Prozeß der gleitenden Mittel (MA-Modell) 114f.  
 Prozeßmodell 33  
 Prüffolge 325  
 Prüfverfahren (statistische) 63f.

–, F-Test 65  
 –, t-Test 64  
 –, z-Test 63  
 –,  $\chi^2$ -Test 64  
 Prüfverteilung 52  
 pseudostochastische binäre Testsignale (PRBS-Folge) 298f.

Rampenfunktion 76  
 Randverteilung 47  
 Rauschen 82  
 –, farbiges 82  
 –, weißes 82  
 Rechteckimpuls 76  
 Rechteckwelle 74, 170f.  
 Regression 202ff.  
 rekursive Regression 222ff.  
 –, gewichtete 225  
 –, ungewichtete 222  
 Relaxation 218f.  
 Restquadratsumme 204  
 Reststreuung 204

Schätzaufgabe 189  
 –, direkte Lösung 190ff., 198, 201f.  
 –, iterative Lösung 199f.  
 –, rekursive Lösung 200f.  
 Schätzmethoden 189ff.  
 –, Aufgabe 189  
 –, Bayes-Schätzung 190f.  
 –, Markov-Schätzung 192f.  
 –, Maximum-Likelihood-Schätzung 191f.  
 –, Regression 193f.  
 –, verallgemeinerte Regression 193  
 Schätzung 194ff.  
 –, asymptotische 194  
 –, beste lineare 204  
 –, effektive 196  
 –, erwartungstreue 195  
 –, konsistente 195  
 –, unverschobene 194  
 –, verschobene 194  
 Schiefe 46  
 Signal 72f.  
 –, aperiodisch 75  
 –, exponentiell 73  
 –, harmonisch 73  
 –, periodisch 74  
 Signalanalyse 34  
 –, experimentelle 35  
 –, theoretische 35  
 Signallaufbereitung 125ff.  
 –, Bereichstest 127  
 –, Bilanztest 127  
 –, Differenztest 127  
 –, Filterverfahren 130ff.  
 –, Korrekturverfahren 129f.  
 Signalfolgen 297ff., 301ff.  
 –, binär 298f.  
 –, mehrwertige 301ff.

–, optimale 303ff.  
 –, pseudostochastisch 298ff.  
 Signalmodell 72ff., 103ff.  
 –, deterministisches 72f., 105ff.  
 –, kombiniertes 121ff.  
 –, stochastisches 112ff.  
 Signifikanztest 205  
 Spektralanalyse 88f.  
 Spektrum 77  
 –, Amplitudenspektrum 77  
 –, Phasenspektrum 77  
 Sprungantwort 154f.  
 Sprungfunktion 75  
 Standardabweichung 45  
 Stationarität 80  
 –, Prüfung 128ff.  
 Sternpunktversuch 248f.  
 Steuerung 19  
 –, adaptive 20  
 –, operative 20  
 –, optimale 20  
 Stichprobe 51  
 Stichprobenfunktion 51  
 Stichprobenmittel 51  
 Stichprobenvarianz 51  
 Stichprobenverteilung 51  
 stochastische Approximation 221f.  
 stochastischer Prozeß 80  
 Störung 32f., 315f.  
 –, Ausgangsstörung 315  
 –, Zustandsstörung 315  
 Streuung 53  
 Strukturprüfung 324ff.  
 –, Dominanztest 326  
 –, Fehlerfunktionstest 325  
 –, F-Test 325  
 –, Polynomtest 325  
 –, Signalfehlertest 325  
 Student-Verteilung (t-Verteilung) 52  
 Suchfilterverfahren 92  
 Suchfrequenzverfahren 93  
 Suchverfahren 199ff.  
 –, gradientenfreie 199f.  
 –, Gradientensuchverfahren 199f.  
 –, Zufallssuchverfahren 199f.  
 Systemanalyse 34  
 –, experimentelle 35  
 –, theoretische 35  
 Systembeschreibung 152ff.  
 –, nichtparametrisch 152  
 –, parametrisch 152  
 Systemmatrix 34, 177f., 314f.  
 Systemmodell 33f.  
 –, Ein-/Ausgangsmodell 34  
 –, Hammerstein-Modell 259f., 275  
 –, Gewichtsfunktionsmodell 164ff., 256ff.  
 –, Volterra-Reihen-Modell 256ff.  
 –, Wiener-Modell 259f., 276f.  
 –, Zustandsmodell 34  
 Systemzustand 34, 177f., 314f.

- Taylor-Reihe 256f.
- Teilfrequenzgänge 172f.
- Teilmodell 327f.
- Testgrößen 51
- Testsignale 153ff.
  - , aperiodische 153
  - , Dreieckswellen 153
  - , optimale 303f.
  - , periodische 153
  - , pseudostochastische 153, 297ff.
  - , Rechteckswellen 153
  - , stochastische 153
- Testverteilungen 52f.
  - ,  $F$ -Verteilung 53
  - ,  $t_2$ -Verteilung 52
  - ,  $z$ -Verteilung 52
  - ,  $\chi^2$ -Verteilung 53
- Totzeitermittlung 156ff.
- Trend 105f., 128f.
- $t$ -Test 64
- $t$ -Verteilung (Student-Verteilung) 52
- Übergangsfunktion 155ff.
  - , Auswertung anhand charakter. Funktionswerte 155ff.
  - , Ermittlung des Frequenzganges aus der Übergangsfunktion 163f.
- Übertragungsfaktor 154f.
  - , integraler 155
  - , proportionaler 154
- Überwachung 19
- Varianz 46
- Variationsbreite 53
- Variationskoeffizient 53
- verallgemeinerte Regression 193, 209f.
  - , direkte 193, 209f.
  - , rekursive 229f.
- Vergessen 142, 225f.
- Vergessensfaktor 143
- Verstärkungsfaktor 154f.
- Versuchsbereich 234f.
  - für lineare Systeme 234
  - für nichtlineare Systeme 247f.
- Versuchsplan 234ff.
  - , drehbarer 236f.
  - , drehbar zentraler 250f.
  - , gesättigter 242f.
  - , konkreter 234
  - , orthogonaler 236f.
  - , orthogonal zentraler 248f.
  - , unvollständiger 240f.
  - , vereinfachter zentraler 251f.
  - , vollständiger 237ff.
  - , zusammengesetzter 247ff.
- Versuchsplanung 232ff.
- Verteilung 43
  - , Binominalverteilung 44
  - , Exponentialverteilung 44
  - , Gleichverteilung 44
  - , Normalverteilung 44
  - , Poissonverteilung 44
- Verteilungsdichtefunktion 43
  - , diskrete 43
  - , empirische 54
  - , stetige 43
- Verteilungsfunktion 43
  - , diskrete 43
  - , empirische 54
  - , stetige 43
- Volterra-Reihe 256ff.
  - , Kerne der Volterra-Reihe 256
- Vorhersage 21
- Wahrscheinlichkeit 42
  - , bedingte 42
  - , Verbundwahrscheinlichkeit 47
- Wendetangentenkonstruktion 158f.
- Wichtung 225ff.
  - , blockweise 228
  - , exponentielle 227
  - , gezielte 228
- Wichtungsfenster 96
  - , Bartlett 96
  - , Parzen 96
  - , Tukey 96
- Wichtungsmatrix 210f.
- Wiener-Chintschinsche Beziehung 100
- Wiener-Modell 267f., 276f.
- Yule-Walker-Gleichungen 115
- Zeitreihe 103ff.
- $z$ -Test 63
- $z$ -Transformation 79
- Zufallsgröße 42
  - , diskrete 43
  - , eindimensionale 43
  - , mehrdimensionale 46
  - , stetige 43
- Zustand 314ff.
  - , extrapolierter 316f.
  - , geschätzter 315f.
- Zustandsbeschreibung 177f., 315f.
- Zustandsfehler 315
- Zustandsschätzung 314ff.
  - aus den gemessenen Ausgängen 316ff.
  - aus den gemessenen Ein- und Ausgängen (Kalman-Bucy-Filter) 318ff.
- Zustandsvektor 315