

Experimentelle Prozeßanalyse

Wernstedt

Wernstedt - Experimentelle Prozeßanalyse

FH-Bibliothek Fulda



20 18 581 3

Experimentelle Prozeßanalyse

Prof. Dr. sc. techn. Jürgen Wernstedt



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

Vorwort

Die rechnergestützte Lösung von Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Planungsaufgaben in technischen und nichttechnischen Prozessen hat in den letzten Jahren die Notwendigkeit der Bildung mathematischer Modelle von Signalen und Systemen wesentlich erhöht. Das gilt besonders für die Modellbildungsverfahren, die gemessene Prozesssignale und Zustände verwenden. Sie werden in der deutschsprachigen Literatur zunehmend mit den Begriffen „experimentelle Prozeßanalyse“ oder „Prozeßidentifikation“ bezeichnet.

Die Signal- und Systemmodelle finden ihre Anwendung bei der Analyse, dem Entwurf und dem Betrieb automatischer und automatisierter Steuerungssysteme. In wissensbasierenden Entscheidungssystemen – den Beratungs- bzw. Expertensystemen – stellen sie das analytische (prozedurale) Wissen in Form von Gleichungen und Strukturen dar.

Das vorliegende Buch stellt sich das Ziel, eine Einführung in die Grundlagen des Wissenschaftsgebiets der experimentellen Prozeßanalyse für Ingenieure und Studierende der Ingenieurwissenschaften, besonders der Fachrichtungen Technische Kybernetik und Automatismertechnik, zu geben. Gleichzeitig ist es für die Fachdisziplinen von Interesse, die wesentliche Eigenschaften von vorgegebenen Prozessen zur Lösung ihrer Aufgaben in ein mathematisches Modell abbilden müssen. Dies sind in zunehmendem Maß Disziplinen aus den Bereichen der Landwirtschaft, der Wasserwirtschaft, der Medizin und der Biologie.

Der gegenwärtige Stand auf dem Gebiet der experimentellen Prozeßanalyse ist durch eine außerordentlich große Mannigfaltigkeit von verschiedenen Verfahren gekennzeichnet. Anwender und Studierende stehen deshalb vor der schwierigen Aufgabe, eine Übersicht zu bekommen und eine geeignete Auswahl der Verfahren zu treffen. Aus diesem Grund wurde im Rahmen des Buches versucht,

1. eine einheitliche Darstellung für das Signal- und Systemverhalten sowie für das statische und dynamische Verhalten zu finden,
2. durch vergleichende und bewertende Einschätzungen Hinweise für die Gestaltung und Anwendungsbereiche für die Verfahren zu geben,
3. durch Übungsaufgaben und Demonstrationsbeispiele die theoretischen Ausführungen zu untermauern,
4. durch Ausblicke auf weiterführende Arbeiten hinzuweisen.

Diesem Ziel folgend, besteht das Buch aus den Komplexen der Signal- und der Systemanalyse.

In den Abschnitten 2 und 3 werden Modelle des statischen und dynamischen Verhaltens von Signalen und Verfahren zu ihrer Bestimmung betrachtet.

Da auch bei einer verstärkten Anwendung moderner rechnergestützter Verfahren die klassischen Methoden der Auswertung von Übergangs- und Gewichtsfunktion sowie des Frequenzgangs nach Ansicht des Verfassers nicht an Bedeutung verloren haben, wurden bewährte leistungsstarke Verfahren dieser Gruppe im Abschnitt 4 dargestellt.

Den Schwerpunkt des Komplexes „Systemanalyse“ bildet die Ermittlung des statischen und dynamischen Verhaltens gestörter Systeme (Abschnitte 5 und 6). Dabei wurde versucht, die allgemeingültigen Grundlagen der Schätzverfahren und die Schätzverfahren im

21
Tech 156
Wer + 2

Akz. Nr. 20 18 581 3
Fachhochschule Fulda
- Bibliothek -

Wernstedt, Jürgen:
Experimentelle Prozeßanalyse / von Jürgen Wernstedt. – 1. Aufl. – Berlin : Verl. Technik, 1989. – 391 S. : 242 Bilder, 139 Taf.
ISBN 3-341-00676-1

ISBN 3-341-00676-1

1. Auflage
© VEB Verlag Technik, Berlin, 1989
Lizenz: 201 · 370/77/89
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Offizin Andersen Nexö, Graphischer Großbetrieb, Leipzig III/18/38
Lektoren: Jürgen Reichenbach, Inge Epp
Schutzumschlag: Rainer Klauinick
LSV 3044 · VT 3/5686-1
Bestellnummer: 554 069 2
04000

statischen Fall ausführlich herzuleiten und die Beziehungen unter Benutzung eines allgemeinen Systemmodells auf dynamische Probleme zu übertragen. Diese Vorgehensweise führt zu einer wesentlichen Reduzierung der Vielfalt der Verfahren und gestattet das jeweils spezifische besser darzustellen.

Insgesamt hofft der Autor, daß Angehörige derjenigen Wissenschaftsdisziplinen, die sich der Analyse, dem Entwurf und dem Betrieb automatischer und automatisierter Systeme in technischen und nichttechnischen Prozessen widmen, mit diesem Buch eine Grundlage für die Erstellung mathematischer Modelle von Signalen und Systemen auf experimenteller Basis besitzen. An dieser Stelle möchte ich mich für die vielen wertvollen Anregungen und die Begutachtung des Buches bei Herrn Prof. Dr. Dr. sc. *Karl Reinisch* und Herrn Dr. sc. *Georg Bretthauer* bedanken. Mein besonderer Dank gilt den Mitarbeitern des Lehrstuhls Systemtechnik des Wissenschaftsbereichs Automatische Steuerung der Technischen Hochschule Ilmenau, die durch eine langjährige konstruktive Mitarbeit in der Lehre und Forschung dieses Projekt aktiv gefördert haben. Besonders gilt das für Dozent Dr. sc. techn. *Peter Otto*, Dr.-Ing. *Arnold Seifert*, Dr.-Ing. *Detlef Trippler* und Dr.-Ing. *Winfried Winkler*.

Frau *Edeletraud Riege*, Frau *Sabine Sauerbrey* und Frau *Erika Sachs* sei an dieser Stelle für die zuverlässige Arbeit bei der Fertigstellung des Manuskripts recht herzlich gedankt. Den Lektoren Frau *Inge Epp* und Herrn Dipl.-Ing. *Jürgen Reichenbach* möchte ich für die verständnisvolle und konstruktive Zusammenarbeit bei der Gestaltung des Buches Dank sagen.

Ilmenau

Jürgen Wernstedt

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| Formelzeichenverzeichnis | 13 |
| 1. Einführung | 17 |
| 1.1. Stellung des Modells bei der Lösung kybernetischer Aufgaben | 17 |
| 1.2. Praktische Beispiele für Prozeßmodelle | 21 |
| 1.2.1. Modelle zur Steuerung der Fertigung hochintegrierter Schaltkreise im Zyklus I | 22 |
| 1.2.2. Innentemperaturmodell zur Steuerung von Gewächshäusern | 24 |
| 1.2.3. Modelle des Sauerstoffgehalts limnischer Ökosysteme | 25 |
| 1.2.4. Modelle zur Vorhersage und Steuerung der Wassermenge im Flußgebiet der Werra (DDR) | 27 |
| 1.2.5. Modelle der kontinuierlichen Fermentation | 29 |
| 1.2.6. Modelle zur Lösung medizinischer Aufgaben | 30 |
| 1.2.7. Schlußfolgerungen | 32 |
| 1.3. Gesamtkonzeption der experimentellen Prozeßanalyse | 32 |
| 1.4. Verwendete Klassifikationsmerkmale der Methoden der experimentellen Prozeßanalyse | 38 |
| 2. Beschreibung des Amplitudenverhaltens von Signalen | 40 |
| 2.1. Zielstellung der Ermittlung von Signalmodellen | 40 |
| 2.2. Ausgewählte Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung | 41 |
| 2.2.1. Beschreibung eindimensionaler Zufallsgrößen | 41 |
| 2.2.1.1. Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen | 41 |
| 2.2.1.2. Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen | 42 |
| 2.2.1.3. Kenngrößen und Verteilung von Zufallsgrößen | 44 |
| 2.2.2. Beschreibung mehrdimensionaler Zufallsgrößen | 46 |
| 2.2.2.1. Mehrdimensionale Zufallsgrößen und ihre Verteilungen | 46 |
| 2.2.2.2. Kenngrößen zweidimensionaler Zufallsgrößen | 48 |
| 2.3. Elemente der mathematischen Statistik | 51 |
| 2.3.1. Ausgewählte Stichprobenfunktionen und ihre Verteilungen | 51 |
| 2.3.2. Empirische Ermittlung von Verteilungen und Kenngrößen von Zufallsgrößen | 53 |
| 2.3.3. Statistische Prüfverfahren | 62 |
| 2.3.4. Schätzung von Konfidenzintervallen | 67 |
| 2.4. Übungsaufgaben zum Abschnitt 2 | 68 |

| | |
|---|-----|
| 3. Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Signalen | 72 |
| 3.1. Grundlagen der Beschreibung deterministischer Signale | 72 |
| 3.1.1. Modelle im Zeitbereich | 72 |
| 3.1.1.1. Beschreibung kontinuierlicher Signale | 72 |
| 3.1.1.2. Beschreibung abgetasteter kontinuierlicher Signale | 76 |
| 3.1.2. Modelle im Frequenzbereich | 77 |
| 3.1.2.1. Beschreibung kontinuierlicher Signale | 77 |
| 3.1.2.2. Beschreibung abgetasteter kontinuierlicher Signale | 79 |
| 3.2. Grundlagen der Beschreibung stochastischer Signale | 79 |
| 3.2.1. Grundbegriffe | 79 |
| 3.2.2. Beschreibung stochastischer Signale im Zeitbereich | 81 |
| 3.2.2.1. Autokorrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau)$ | 81 |
| 3.2.2.2. Kreuzkorrelationsfunktionen $R_{xy}(\tau)$ | 83 |
| 3.2.2.3. Experimentelle Ermittlung von Korrelationsfunktionen | 84 |
| 3.2.3. Beschreibung stochastischer Signale im Frequenzbereich/Leistungsdichtespektren | 88 |
| 3.2.3.1. Autoleistungsdichtespektrum $S_{xx}(\omega)$ | 88 |
| 3.2.3.2. Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{xy}(\omega)$ | 90 |
| 3.2.3.3. Experimentelle Bestimmung von Leistungsdichtespektren | 91 |
| 3.2.3.4. Beziehungen zwischen Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren | 99 |
| 3.2.4. Beziehungen zwischen Signal- und Systemmodellen | 100 |
| 3.2.4.1. Beziehungen zwischen Korrelationsfunktionen $R(\tau)$ und der Gewichtsfunktion $g(t)$ | 101 |
| 3.2.4.2. Beziehungen zwischen den Leistungsdichtespektren $S(\omega)$ und dem komplexen Frequenzgang $G(j\omega)$ | 101 |
| 3.3. Erweiterte Signalmodelle | 103 |
| 3.3.1. Grundstrukturen | 103 |
| 3.3.2. Erweiterte deterministische Signalmodelle | 105 |
| 3.3.2.1. Deterministische Signalmodelle mit Polynomansatz | 105 |
| 3.3.2.2. Deterministische Signalmodelle mit periodischem Ansatz | 109 |
| 3.3.3. Erweiterte stochastische Signalmodelle | 112 |
| 3.3.3.1. Grundansätze | 112 |
| 3.3.3.2. Autoregressive Modelle (AR-Modelle) | 114 |
| 3.3.3.3. Modelle der gleitenden Mittel (MA-Modelle) | 116 |
| 3.3.3.4. Modelle eines autoregressiven Prozesses der gleitenden Mittel (ARMA-Modelle) | 119 |
| 3.3.3.5. Kombinierte Signalmodelle | 121 |
| 3.4. Ausgewählte Methoden der Signalaufbereitung | 125 |
| 3.4.1. Notwendigkeit einer Signalaufbereitung | 125 |
| 3.4.2. Methoden zum Erkennen von Verfälschungen der Prozeßsignale/ -zustände | 126 |
| 3.4.3. Methoden zur Korrektur gemessener Signale | 129 |
| 3.4.3.1. Eliminierung von Signalwerten | 130 |
| 3.4.3.2. Statische Korrektur von Signalen | 130 |
| 3.4.3.3. Dynamische Korrektur von Signalen | 130 |

| | |
|---|-----|
| 3.4.4. Filterung von Signalen | 130 |
| 3.4.4.1. Grundstrategie des Filterentwurfs | 131 |
| 3.4.4.2. Digitale Tiefpaßfilter | 132 |
| 3.4.4.3. Digitale Hochpaßfilter | 144 |
| 3.5. Übungsaufgaben zum Abschnitt 3 | 148 |
| 4. Bestimmung des dynamischen Verhaltens ungestörter Systeme | 152 |
| 4.1. Systemeigenschaften, Systemmodelle und Testsignale | 152 |
| 4.1.1. Voraussetzungen für die Anwendbarkeit deterministischer Methoden | 152 |
| 4.1.2. Verwendete Systemmodelle | 152 |
| 4.1.3. Ausgewählte Testsignale | 153 |
| 4.2. Ein-/Ausgangs-Modelle im Zeitbereich | 155 |
| 4.2.1. Modellbestimmung anhand von Kenngrößen der Sprungantwort bzw. der Übergangsfunktion | 155 |
| 4.2.1.1. Modellbestimmung von $P-T_1$ - und $P-T_1-T_{D1}$ -Systemen | 156 |
| 4.2.1.2. Modellbestimmung von $P-T_n-T_1$ -Systemen | 158 |
| 4.2.1.3. Modellbestimmung von $I_1-T_n-T_1$ -Systemen | 162 |
| 4.2.1.4. Bestimmung diskreter Werte des Frequenzgangs $G(j\omega)$ aus der Übergangsfunktion | 163 |
| 4.2.2. Modellbestimmung anhand von Kenngrößen der Impulsantworten bzw. der Gewichtsfunktionen | 164 |
| 4.2.2.1. Auswertung von Impulsantworten bei idealem Eingangssignal (Dirac-Impuls) | 164 |
| 4.2.2.2. Auswertung von Impulsantworten unter Beachtung der Impulsbreite des Eingangssignals | 165 |
| 4.2.3. Ermittlung von Stützstellen der Gewichtsfunktion aus beliebigen Eingangsgang- und Ausgangssignalen - Entfaltung ohne Ausgleich | 166 |
| 4.3. Ein-/Ausgangs-Modelle im Frequenzbereich | 167 |
| 4.3.1. Methoden zur Aufnahme des Frequenzgangs $G(j\omega)$ | 168 |
| 4.3.1.1. Synchronaufzeichnungsverfahren | 168 |
| 4.3.1.2. Komponentenverfahren | 169 |
| 4.3.1.3. Frequenzgangmessung mit Rechteck- und Dreieckwellen | 170 |
| 4.3.2. Approximation von $G(j\omega)$ durch ein Zeitkonstantenmodell | 172 |
| 4.3.3. Approximation von $G(j\omega)$ durch ein Polynommodell | 174 |
| 4.4. Ermittlung des Zustands/Beobachter | 177 |
| 4.4.1. Problemstellung | 177 |
| 4.4.2. Zustandsbeobachtung aus den Eingangsgrößen und einem Systemmodell | 178 |
| 4.4.3. Zustandsbeobachtung aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen - Luenberger Beobachter | 180 |
| 4.5. Übungsaufgaben zum Abschnitt 4 | 186 |
| 5. Bestimmung des statischen Verhaltens von gestörten Systemen | 189 |
| 5.1. Ausgewählte Grundlagen der Schätztheorie | 189 |
| 5.1.1. Aufgabe der Schätzmethoden | 189 |
| 5.1.2. Grundideen wesentlicher Schätzmethoden | 190 |

| | |
|--|-----|
| 5.1.2.1. Bayes-Schätzung | 190 |
| 5.1.2.2. Maximum-Likelihood-Schätzung | 191 |
| 5.1.2.3. Markov-Schätzung – ein Spezialfall der verallgemeinerten Regression | 192 |
| 5.1.2.4. Methode der kleinsten Fehlerquadrate – Regression | 193 |
| 5.1.3. Kriterien zur Beurteilung der Schätzung | 194 |
| 5.1.3.1. Verwendung von Verteilungen | 194 |
| 5.1.3.2. Verwendung von Momenten | 195 |
| 5.1.4. Möglichkeiten zur Fehlerbildung zwischen System- und Modellsignalen | 196 |
| 5.1.5. Grundstrategien zur Minimierung der Zielfunktion | 198 |
| 5.1.5.1. Direkte Lösung der Schätzaufgabe | 199 |
| 5.1.5.2. Iterative Lösung der Schätzaufgabe | 199 |
| 5.1.5.3. Rekursive Lösung der Schätzaufgabe | 200 |
| 5.2. Direkte Schätzverfahren | 201 |
| 5.2.1. Voraussetzungen | 201 |
| 5.2.2. Direkte Methode der Regression | 202 |
| 5.2.3. Methode der Kamminienregression | 206 |
| 5.2.4. Direkte Methode der verallgemeinerten Regression/Markov-Schätzung | 209 |
| 5.3. Iterative Schätzverfahren | 212 |
| 5.3.1. Allgemeine Grundstruktur | 212 |
| 5.3.2. Newton-Raphson-Verfahren | 213 |
| 5.3.3. Levenberg-Marquard-Verfahren | 214 |
| 5.4. Indirekte/rekursive Schätzverfahren | 215 |
| 5.4.1. Allgemeiner Ansatz | 215 |
| 5.4.2. Gradientenmethoden | 216 |
| 5.4.2.1. Allgemeine Grundstrukturen | 216 |
| 5.4.2.2. Methode der Relaxation | 218 |
| 5.4.2.3. Methode der stochastischen Approximation | 221 |
| 5.4.2.4. Kombinierte Methode der Relaxation und der stochastischen Approximation | 222 |
| 5.4.3. Methode der rekursiven Regression | 222 |
| 5.4.3.1. Ungewichtete rekursive Regression | 222 |
| 5.4.3.2. Gewichtete rekursive Regression | 225 |
| 5.4.4. Methode der rekursiven verallgemeinerten Regression | 229 |
| 5.5. Methoden der optimalen Versuchsplanung | 232 |
| 5.5.1. Zielstellung und ausgewählte Grundlagen | 232 |
| 5.5.2. Mehrfaktorpläne für lineare Modelle | 236 |
| 5.5.2.1. Allgemeine Betrachtungen | 236 |
| 5.5.2.2. Vollständige Faktorpläne | 237 |
| 5.5.2.3. Teilfaktorpläne | 240 |
| 5.5.3. Mehrfaktorpläne für nichtlineare Modelle 2. Ordnung | 246 |
| 5.5.3.1. Problemstellung | 246 |
| 5.5.3.2. Orthogonale zentrale Versuchspläne | 248 |
| 5.5.3.3. Drehbare zentrale Versuchspläne | 250 |
| 5.5.3.4. Vereinfachte zentrale Versuchspläne | 251 |
| 5.6. Übungsaufgaben zum Abschnitt 5 | 252 |

| | |
|--|-----|
| 6. Bestimmung des dynamischen Verhaltens gestörter Systeme | 255 |
| 6.1. Zielstellung | 255 |
| 6.2. Schätzung der Stützstellen der Kerne der Volterra-Reihe | 256 |
| 6.2.1. Systembeschreibung durch die Volterra-Reihe | 256 |
| 6.2.2. Schätzung der Stützstellenwerte der Gewichtsfunktion | 260 |
| 6.2.2.1. Entfaltung mit Ausgleich bei linearen Systemen | 260 |
| 6.2.2.2. Korrelationsverfahren | 261 |
| 6.2.3. Schätzung der Stützstellenwerte der Kerne der Volterra-Reihe 2. Ordnung | 263 |
| 6.2.3.1. Schätzung bei Hammerstein-Struktur des Systems | 263 |
| 6.2.3.2. Schätzung bei Wiener-Struktur des Systems | 267 |
| 6.2.4. Schätzung der Stützstellen der Gewichtsfunktionen in Mehrgrößensystemen | 269 |
| 6.3. Schätzung der Koeffizienten der Differenzengleichung | 271 |
| 6.3.1. Systembeschreibungen und Fehlergleichungen | 271 |
| 6.3.1.1. Lineare Eingrößensysteme | 271 |
| 6.3.1.2. Einfache nichtlineare Eingrößensysteme | 275 |
| 6.3.2. Methoden der Regression | 277 |
| 6.3.2.1. Direkte Methode der Regression | 277 |
| 6.3.2.2. Rekursive Methode der Regression | 281 |
| 6.3.3. Methoden der Hilfsvariablen | 283 |
| 6.3.3.1. Direkte Methode der Hilfsvariablen | 283 |
| 6.3.3.2. Rekursive Methode der Hilfsvariablen | 287 |
| 6.3.4. Weitere Parameterschätzverfahren | 288 |
| 6.3.4.1. Methode der verallgemeinerten Regression | 288 |
| 6.3.4.2. Maximum-Likelihood-Methode | 291 |
| 6.3.5. Parameterschätzung einfacher nichtlinearer Systeme | 292 |
| 6.3.5.1. Direkte Schätzstrategien | 293 |
| 6.3.5.2. Mehrstufige Schätzstrategien | 293 |
| 6.3.5.3. Iterative Schätzstrategien | 296 |
| 6.4. Entwurf von Testsignalfolgen | 297 |
| 6.4.1. Notwendigkeit und Ziele | 297 |
| 6.4.2. Pseudostochastische binäre Testsignale | 298 |
| 6.4.3. Pseudostochastische mehrwertige Testsignale | 301 |
| 6.4.4. Entwurf optimaler Testsignalfolgen | 303 |
| 6.4.4.1. Optimale Testsignalfolgen für die Gewichtsfunktion | 303 |
| 6.4.4.2. Testsignalfolgen für das Volterra-Reihen-Modell 2. Ordnung | 307 |
| 6.4.4.3. Testsignalfolgen für lineare Differenzengleichungsmodelle | 312 |
| 6.4.4.4. Testsignalfolgen für nichtlineare Differenzengleichungsmodelle | 314 |
| 6.5. Schätzung des Zustands/Zustandsfilter | 314 |
| 6.5.1. Aufgabe und Voraussetzungen | 314 |
| 6.5.2. Zustandsschätzung aus den gemessenen Ausgangsgrößen des Systems | 316 |
| 6.5.3. Zustandsschätzung aus den gemessenen Eingangs- und Ausgangsgrößen des Systems | 318 |
| 6.6. Ausgewählte Probleme der Schätzung dynamischer Systeme | 322 |
| 6.6.1. Parameterschätzung in geschlossenen Ketten | 322 |

| | |
|--|-----|
| 6.6.2. Verfahren zur Strukturprüfung | 324 |
| 6.6.3. Parameterschätzung linearer Mehrgrößensysteme | 326 |
| 6.6.4. Möglichkeiten zur Wahl der Abtastzeit T | 328 |
| 6.7. Übungsaufgaben zum Abschnitt 6 | 329 |
| Lösungen der Übungsaufgaben | 331 |
| Anhang | 374 |
| Literaturverzeichnis | 380 |
| Sachwörterverzeichnis | 387 |

Formelzeichenverzeichnis

| | |
|---------------------------|---|
| A | Signalamplitude |
| A | Systemmatrix für kontinuierliche Systeme |
| A^* | Systemmatrix für zeitdiskrete Systeme |
| $A(z^{-1})$ | Nennerpolynom einer diskreten Übertragungsfunktion |
| $\hat{A}_H(z^{-1})$ | Nennerpolynom der diskreten Übertragungsfunktion des Hilfsmodells |
| $A(q^{-1})$ | Summenverschiebeoperator des ARMA-Modells |
| a_i | Systemparameter |
| B | Signalamplitude |
| B | Steuermatrix für kontinuierliche Systeme |
| B^* | Steuermatrix für zeitdiskrete Systeme |
| $B(z^{-1})$ | Zählerpolynom einer diskreten Übertragungsfunktion |
| $\hat{B}_H(z^{-1})$ | Bewertungsfunktion |
| $B(X_i, X_1, \dots, X_m)$ | Zählerpolynom der diskreten Übertragungsfunktion des Hilfsmodells |
| $B(q^{-1})$ | Bestimmtheitsmaß |
| b_i | Summenverschiebeoperator des ARMA-Modells |
| c | Systemparameter |
| $C(\hat{s}, s)$ | Kostenfunktion |
| C | Beobachtungsmatrix für kontinuierliche Systeme |
| C^* | Beobachtungsmatrix für zeitdiskrete Systeme |
| $C(z^{-1})$ | Nennerpolynom einer diskreten Störfilterübertragungsfunktion |
| $\text{Cov}\{\dots\}$ | Kovarianzmatrix |
| $C\{\dots\}$ | Inverse der Kovarianzmatrix |
| c | Konstante |
| c_i | Parameter des Störfilters |
| $\text{cov}\{\dots\}$ | Kovarianz |
| D | Durchgangsmatrix für kontinuierliche Systeme |
| $D(z^{-1})$ | Zählerpolynom einer diskreten Störfilterübertragungsfunktion |
| d_i | Parameter des Störfilters |
| E | Kovarianzmatrix des Fehlers |
| E^* | Matrix des Fehlers |
| $E(z)$ | z -Transformierte des Fehlers |
| $E\{\dots\}$ | Erwartungswert |
| e | Fehler (allgemein) |
| e_v | verallgemeinerter Fehler |
| $F(x)$ | Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße |
| $F(x_1, x_2)$ | Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsgröße |
| $F(z)$ | diskrete Übertragungsfunktion des erweiterten Störfilters |
| $F^*(z)$ | diskrete Übertragungsfunktion des Störfilters |
| F | Testgröße |
| F_{α, f_1, f_2} | Tafelwert der F -Verteilung |
| F | Dreiecksmatrix |
| f | Frequenz, Freiheitsgrad |
| $f(x)$ | Verteilungsdichte einer Zufallsgröße |
| $f(x_1, x_2)$ | Verteilungsdichte einer zweidimensionalen Zufallsgröße |

| | |
|----------------------------|---|
| $G(p)$ | Übertragungsfunktion |
| $G(j\omega)$ | Frequenzgang |
| $ G(j\omega) $ | Amplitudenfrequenzgang |
| $G(e^{j\omega T})$ | diskreter Frequenzgang |
| $ G(e^{j\omega T}) $ | Amplitudengang des diskreten Frequenzgangs |
| $G(z)$ | diskrete Übertragungsfunktion |
| $G_F(z)$ | diskrete Übertragungsfunktion eines Filters |
| $G_S(z)$ | diskrete Übertragungsfunktion der Strecke |
| $G_R(z)$ | diskrete Übertragungsfunktion des Reglers |
| $g(k)$ | Gewichtsfolge |
| $g(t)$ | Gewichtsfunktion |
| $g(\tau_1, \dots, \tau_m)$ | Volterra-Kerne |
| H | Prognosebereich |
| H_0 | Hypothese |
| H | Matrix der Hilfsvariablen |
| H_n | Hadarnard-Matrix |
| h | Vektor der Hilfsvariablen |
| $h(t)$ | Übergangsfunktion |
| h_w | Wendepunkordinate der Sprungantwort |
| I | Einheitsmatrix |
| $I(V_n)$ | Fisher'sche Informationsmatrix für den Versuchsplan V_n |
| K | Verstärkungsfaktor (allgemein) |
| K_p | proportionaler Verstärkungsfaktor |
| K_i | integraler Verstärkungsfaktor |
| $K(k+1)$ | Korrekturmatrix |
| $k(k+1)$ | Korrekturvektor |
| k | Abtastzeitpunkt |
| k^* | normierter Anstieg im Amplitudenfrequenzgang |
| L | Anzahl der Taktimpulse/Periode |
| $L\{\dots\}$ | Laplace-Operator |
| $L^*\{\dots\}$ | diskreter Laplace-Operator |
| $L(\dots)$ | Likelihoodfunktion |
| M | Meswertmatrix der allgemeinen Eingangsgrößen |
| \tilde{M} | gefilterte Meswertmatrix |
| m | allgemeiner Eingangsgrößenvektor |
| N | Kovarianzmatrix der Störung $n^*(t)$ |
| $n^*(t)$ | korrelierte Störung |
| n | Anzahl der Beobachtungen |
| n_A | Anzahl der Beobachtungen des Ereignisses A |
| n_k | Klassenanzahl |
| $P(k)$ | Präzisionsmatrix |
| $P^*(k)$ | gewichtete Präzisionsmatrix |
| P^* | Wichtungsmatrix |
| $P(\dots)$ | Wahrscheinlichkeit |
| p | komplexe Frequenz |
| p_i | Wahrscheinlichkeit für $X = x_i$ |
| p_{ij} | Elemente der Matrix $P(k)$ |
| p_{ik} | Wahrscheinlichkeit für $X_1 = x_{1i}$ und $X_2 = x_{2k}$ |
| Q | Gütefunktion |

| | |
|------------------|--|
| Q' | Kovarianzmatrix des Extrapolationsfehlers des Zustands |
| $q(t)$ | kontinuierlicher Zustandsvektor |
| $q(k)$ | zeitdiskreter Zustandsvektor |
| $q^*(k)$ | zeitdiskreter extrapolierter Zustandsvektor |
| $\tilde{q}(k)$ | zeitdiskreter Zustandsfehlervektor |
| q^{-1} | Verschiebeoperator |
| R | Matrix der Korrelationsfunktion |
| R' | Richtungsmatrix |
| $R_{xx}(\tau)$ | Autokorrelationsfunktion |
| $R_{xx}(\tau)$ | Kreuzkorrelationsfunktion |
| $R(z)$ | z-Transformierte des zeitdiskreten Testsignals |
| $r(t)$ | Testsignal |
| r | Parametervektor der Steuereinrichtung |
| $S_{xx}(\omega)$ | Autoleistungsdichtespektrum |
| $S_{xx}(\omega)$ | Kreuzleistungsdichtespektrum |
| S_k | Restquadratsumme |
| s^2 | Streuung einer Stichprobe |
| s_k^2 | Reststreuung |
| s | allgemeiner Parametervektor |
| T | Abtastzeit |
| T | Matrix der Zeitwerte |
| T' | Zeitkonstante |
| T_i | Trägheitszeitkonstante |
| T_{Di} | Vorhaltzeitkonstante |
| T_t | Totzeit |
| T_Σ | Summenzeitkonstante |
| T_w | Wendepunktabszisse der Sprungantwort |
| T_u | Übergangszeit |
| T_a | Anlaufzeit |
| T_n | Verzugszeit |
| T_u | Periodenlänge, Beobachtungsintervall |
| T_0 | Testsignalperiode |
| T_p | Zeitpunkt des Maximums der Gewichtsfunktion |
| T_m | Zeit, Testgröße bei t -Test |
| t | i -ter Zeitwert |
| t_i | Tafelwert der t -Verteilung |
| $t_{a, f}$ | Matrix der Eingangsgrößen |
| U | z-Transformierte der zeitdiskreten Eingangsgröße |
| $U(z)$ | Eingangsgröße |
| $u(t)$ | i -te Eingangsgröße/Statik |
| $u_i(t)$ | Kovarianzmatrix der Störung auf die Zustandsgrößen |
| V | konkreter Versuchsplan |
| V_n | optimaler konkreter Versuchsplan |
| V_n^* | z-Transformierte der zeitdiskreten Störgröße v^* |
| $V^*(z)$ | Zustandsstörung |
| $v(t)$ | Störgröße im erweiterten Systemmodell |
| $v^*(t)$ | Wichtungsmatrix |
| W | Führungsgröße |
| $w(t)$ | Wichtungsfaktor |
| $w^*(mT)$ | |

| | |
|-------------------------|--|
| $X(z)$ | z-Transformierte der zeitdiskreten Ausgangsgröße |
| $X^0(z)$ | z-Transformierte der zeitdiskreten ungestörten Ausgangsgröße |
| $x(t)$ | Ausgangsgröße |
| $x^0(t)$ | ungestörte Ausgangsgröße/Signal |
| $x'(t)$ | verfälschtes Signal |
| $\tilde{x}(t)$ | Signal (gefiltert/transformiert) |
| $x_T(t)$ | Trendfunktion |
| x_0 | Signalamplitude |
| x_m | maximaler Wert der Gewichtsfunktion |
| \bar{x} | Mittelwert |
| $y(t)$ | Zwischensignal |
| Z | Kovarianzmatrix der Ausgangsstörung |
| $Z(z)$ | z-Transformierte der zeitdiskreten Ausgangsstörung |
| $Z\{\dots\}$ | z-Transformationsoperator |
| $z(t)$ | Ausgangsstörung |
| z | Testgröße |
| z_a | Tafelwert der z-Verteilung |
| z_{IS} | Pole der diskreten Übertragungsfunktion des Systems |
| x_{IB} | Pole der diskreten Übertragungsfunktion des Beobachters |
| α | Faktor, Irrtumswahrscheinlichkeit |
| β | Faktor |
| γ | Schiefte |
| $\gamma(k)$ | Schrittweite |
| $\delta(t)$ | Impulsfunktion |
| $\sigma(t)$ | Sprungfunktion |
| σ^2 | Streuung, Varianz |
| σ_z^2 | Varianz der Ausgangsstörung |
| σ_{ϵ}^2 | Varianz des unkorrelierten Fehlers |
| σ_e^2 | Varianz des korrelierten Fehlers |
| μ | Erwartungswert |
| Δ | Klassenbreite |
| ΔT | Impulsbreite |
| $\nabla\{\dots\}$ | erste partielle Ableitung |
| $\nabla\nabla\{\dots\}$ | zweite partielle Ableitung |
| γ^2 | Testgröße |
| $\lambda_{a, j}^2$ | Tafelwert der χ^2 -Verteilung |
| ϵ | Exzeß, Abbruchgrenze |
| $\epsilon(t)$ | unkorrelierter Fehler, weißes Rauschsignal |
| $\epsilon(z)$ | z-Transformierte des zeitdiskreten unkorrelierten Fehlers |
| τ | Zeitverschiebung |
| τ_u | Ordinatenabschnitt der Wendetangente der Sprungantwort |
| ρ | Korrelationskoeffizient |
| λ | Faktor, Lagrange-Multiplikation |
| λ_i | i-ter Eigenwert |
| φ | Phasenwinkel |
| $\varphi(\omega T)$ | Phasengang |
| ω | Kreisfrequenz |
| ω_* | Grenzfrequenz |
| ω^* | Bezugsfrequenz |

1. Einführung

1.1. Stellung des Modells bei der Lösung kybernetischer Aufgaben

Die effektive Lösung von Diagnose-, Überwachungs-, Steuer-, Steuer- und Vorhersageaufgaben für Mengen- und/oder Qualitätsgrößen in technischen und nichttechnischen Prozessen ist eine der vorrangigen Aufgaben jeder Gesellschaft. Sie dienen zunehmend der Automatisierung körperlicher und geistiger Tätigkeiten und Fähigkeiten des Menschen, d. h. der komplexen Automatisierung. Eine der wesentlichsten Grundlagendisziplinen der Prozeßautomatisierung ist die Kybernetik. Die Kybernetik ist die Wissenschaft von der zielgerichteten Beeinflussung von Systemen (Steuerung) sowie der Informationsverarbeitungsprozesse und deren Automatisierung, die das Wesentliche der Steuervorgänge ausmachen [1.1, 1.2]. Die Bewältigung der oben genannten Aufgaben kann durch die im Bild 1.1 dargestellten Strategien erfolgen.

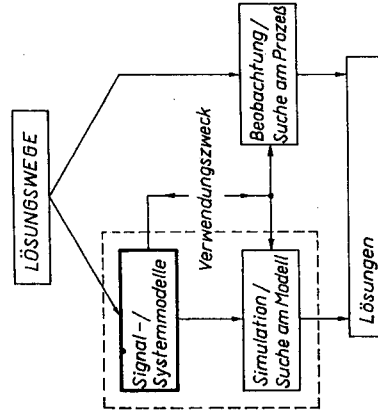


Bild 1.1 Strategie zur Lösung kybernetischer Aufgaben

Die erste Strategie besteht darin, daß die Aufgaben mit den Mitteln der Simulation auf Analog- und Digitalrechnern unter Verwendung von Modellen der Signale und Systeme sowie von Zielkriterien gelöst werden. Dabei soll unter einem Modell die Abbildung wesentlicher Aspekte des realen Prozesses verstanden werden. Die Modelle der Signale und/oder der Systeme sind gekennzeichnet durch Struktur, Parameter- und/oder Zustandswerte. Die genannte Entwurfsstrategie besitzt die Vorteile, daß keine unmittelbare „Störung“ des Prozesses erforderlich ist und daß eine effektive Bewältigung der Aufgaben möglich ist. Nachteilig ist der Aufwand für die Erstellung der Signal- und Systemmodelle sowie der Umstand, daß die Modelle immer eine Approximation des realen Prozesses darstellen. Die zweite Strategie besteht in der Lösung der genannten Aufgaben durch eine Beobachtung und Suche direkt am Prozeß. Vorteil dieses Weges ist die Lösung der Aufgabe unter den realen aktuellen Bedingungen; dagegen sind der notwendige Zeitaufwand, die ökonomischen Verluste durch die Experimente am Prozeß und die fehlende

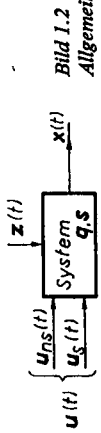


Bild 1.2
Allgemeine Grundstruktur eines Prozesses

$u(t)^T = [u_s(t) \dots u_{ns}(t)]$
Vektor der steuerbaren Eingangsgrößen

$u_{ns}(t)^T = [u_{ns1}(t) \dots u_{nsn}(t)]$
Vektor der nichtsteuerbaren Eingangsgrößen

$z(t)^T = [z_1(t) \dots z_n(t)]$
Vektor der Störgrößen

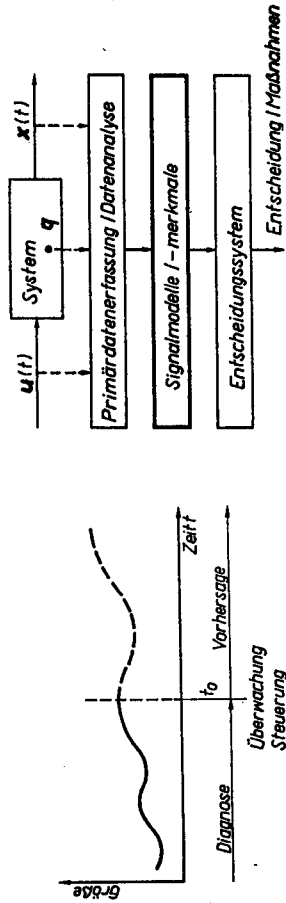


Bild 1.3. Zeiträume für die Diagnose-, Überwachungs-, Steuer- und Vorhersageaufgabe

Bild 1.4. Struktur zur Lösung von Diagnose- und Überwachungsaufgaben

| Kybernetische Methoden zur Gewinnung und Beschreibung von Informationen | Menge der Informationen über | | Zweckmäßige Realisierung durch | MENSCH |
|--|---|------------------------------|--|---|
| | Prozessstruktur und -parameter | Prozesssignale und -zustände | | |
| Theoretische Prozeßanalyse Experimentelle Prozeßanalyse Entscheidungsverhalten des Menschen - Expertenbefragung - Beobachtung des Experten | volle (ausreichende) Information | | AUTOMAT/MASCHINE | Einsatz von Beratungs-/Expertensystemen |
| | keine Information | | | |
| | * Risikosituation * * Spielsituation * | | Kybernetische Methoden zur Steuerung/Entscheidungsfindung klassische Lösung der Steueraufgabe Polyoptimierung Lernverfahren (einschl. Klassifikation, Vorhersage, Adaption) Entscheidungstheorie - Bayes-konzept - Spieltheorie | |

Bild 1.5. Zusammenhang zwischen „Information“ und Steuer-konzept

Möglichkeit des Entwurfs von Steuereinrichtungen vor Inbetriebnahme des Prozesses schwerwiegende Nachteile. Häufig werden beide Strategien gleichzeitig angewendet.

Um die Stellung des Modells bei der Bewältigung kybernetischer Aufgaben besser zu erkennen, werden, ausgehend von der allgemeinen Grundstruktur eines Prozesses im Bild 1.2, die Teilaufgaben der Diagnose, Überwachung, Steuerung und Vorhersage kurz erläutert. Dabei bedeuten:

Diagnose. Die Analyse der Informationen über Mengen- und/oder Qualitätsgrößen zurückliegender Zeitabschnitte ($t < t_0$; Darstellung des zeitlichen Aspekts im Bild 1.3).

Überwachung. Die Analyse der aktuellen Information über Mengen- und/oder Qualitätsgrößen ($t = t_0$; Bild 1.3). Die Aufgaben der Diagnose und Überwachung werden vorwiegend auf der Grundlage von Signalmodellen und bestimmter charakteristischer Werte/Merkmale von Prozeßgrößen gelöst. Im Bild 1.4 ist die allgemeine Struktur dieser Aufgaben dargestellt.

Steuerung. Aktueller und geplanter zielgerichteter Eingriff in den zugeordneten Prozeß ($t \geq t_0$; Bild 1.3).

Für die Lösung dieser Aufgaben sind eine Vielzahl von Konzepten zur automatischen und operativen Steuerung entworfen worden, die auf Prozeßmodellen basieren. Das zweckmäßigste Steuerkonzept wird dabei wesentlich von der vorhandenen Menge und Art an Information über

- die Prozeßsignale und -zustände
- die Prozeßstruktur und -parameter
- die Steuerziele und Nebenbedingungen

bestimmt. Als Möglichkeiten zur Ermittlung dieser Informationen in Form von Signal- und/oder Systemmodellen stehen Methoden der theoretischen und der experimentellen Prozeßanalyse (Modellbildung) sowie das Entscheidungsverhalten/Wissen des Menschen zur Verfügung (Bild 1.5). Die theoretische Prozeßanalyse beruht auf der Ausnutzung bekannter Gesetzmäßigkeiten/Bilanzgleichungen; die experimentelle Prozeßanalyse beruht auf der Auswertung der gemessenen Eingangs- und Ausgangssignale. Liegt eine ausreichende Information über die Prozeßsignale und -zustände sowie über das Systemverhalten vor, können automatische Steuereinrichtungen - Automaten - die Aufgabe vollständig lösen.

Im Bild 1.6 sind ausgewählte typische vorangepaßte und selbstanpassende Steuersysteme dargestellt, die automatisch arbeiten. Häufig treten in der Praxis aber Prozesse auf, bei denen

- ungenaue, unsichere und subjektiv beeinflusste Informationen und/oder
 - quantitative und qualitative Informationen und/oder
 - unzureichende A-priori-Kenntnisse bezüglich der Lösung der Steueraufgabe und/oder
 - unvorhersehbare Situationen
- vorliegen.

In diesen Fällen hat sich das Konzept der operativen Steuerung bewährt (Bild 1.7) [1.3]. Bei diesem Steuerkonzept löst der Mensch auf der Grundlage von Entscheidungs-/Steuervorschlägen eines Beratungs-/Expertensystems diese Aufgabe. Das Beratungs-/Expertensystem, dessen Grundstruktur im Bild 1.7 dargestellt ist, ist in der Lage, auf der Grundlage seines gespeicherten „Wissens“, der erfassten Situation und den Algorithmen zur Ermittlung des Wissens über den konkreten Prozeß sowie den Algorithmen zur Lösung der Entscheidungs-/Steueraufgabe dem Menschen Vorschläge zu unterbreiten.

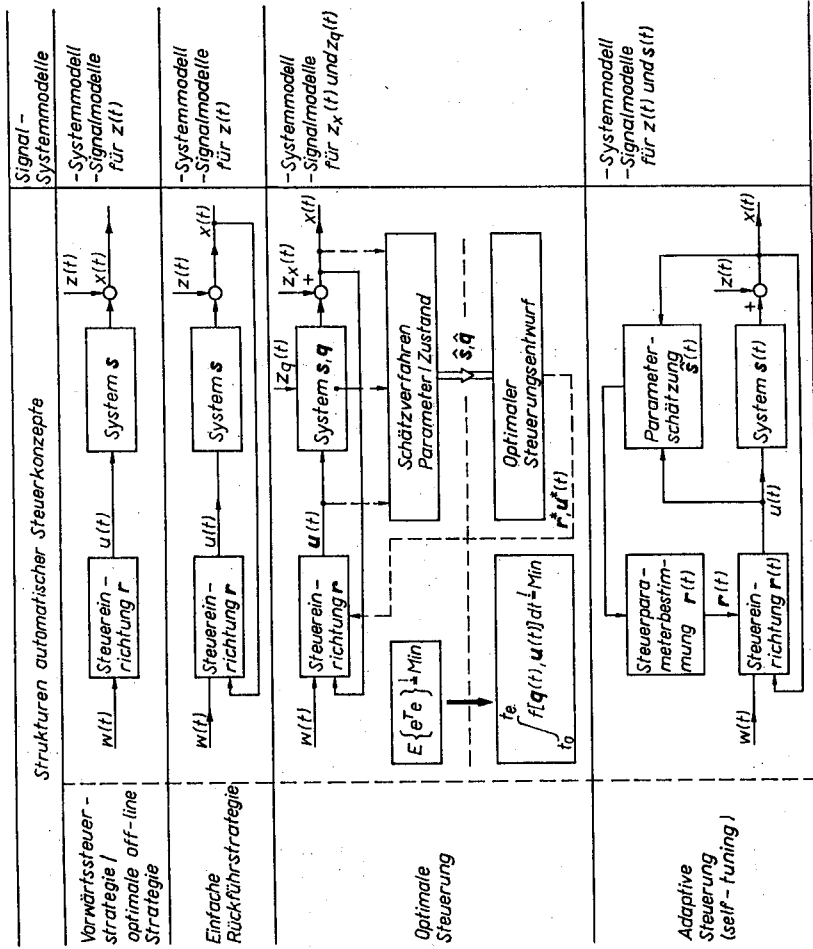


Bild 1.6. Ausgewählte Strukturen automatischer Steuerkonzepte

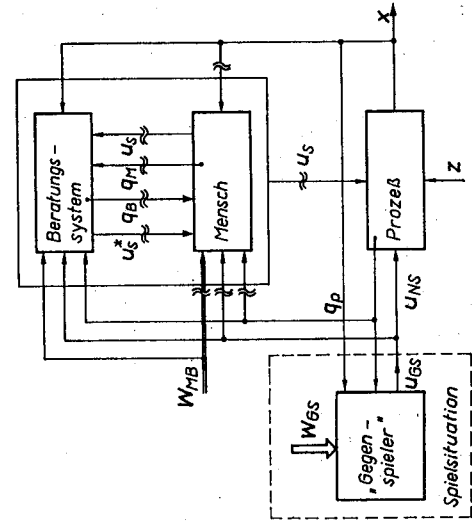


Bild 1.7. Konzept der operativen Steuerung
 q_M Zustandsvektor des Beratungssystems
 q_B Vektor der Führungsgrößen
 w_{MB} Vektor der Führungsgrößen der Gegenspieler
 w_{MS} Vektor für das Entscheidungssystem "Mensch-Beratungssystem"
 w_{GS} Vektor der Führungsgrößen für die Gegenspieler
 r^* Vorschlag für steuerbare Eingangsgrößen, Schnittstelle Mensch - Maschine

Vorhersage. Abschätzung der zukünftigen Entwicklung von Mengen- und/oder Qualitätsgrößen und Bewertung von geplanten Steuer- und Handlungsvarianten ($t > t_0$; Bild 1.3). Die Aufgabe der Vorhersage kann auf der Grundlage von Signal- und/oder Systemmodellen entsprechend den Strukturen im Bild 1.8 realisiert werden. Die vorhergesagten Werte der Prozeßgrößen können bei Verwendung von Signalmodellen für vorgegebene Zeiten t_i bzw. Signalwerte $e(t_i)$ und bei Verwendung von Systemmodellen aus vorgegebenen Signalwerten $u(t)$ ermittelt werden.

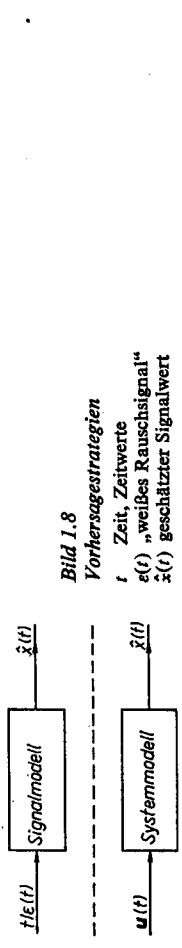


Bild 1.8. Vorhersagestrategien
 t Zeit, Zeitwerte
 $e(t)$ „weißes Rauschsignal“
 $\hat{z}(t)$ geschätzter Signalwert

1.2. Praktische Beispiele für Prozeßmodelle

In den letzten Jahrzehnten gibt es kein Gebiet im technischen und nichttechnischen Bereich, in dem nicht die Methoden der experimentellen Ermittlung von Signal- und/oder Systemmodellen zur Lösung von speziellen Aufgaben angewendet worden sind [1.4, 1.5]. Dabei sind folgende Aspekte für diese Entwicklung charakteristisch:

1. Die enorme Entwicklung der Sensortechnik, der digitalen Rechenteknik und der Informationstechnik erlaubt die effektive Anwendung bereits bekannter Methoden der Erstellung von Signal- und/oder Systemmodellen.
2. Die unterschiedlichsten Anwendungsgebiete befruchteten sich gegenseitig mit ihren Methoden, z. B. übernimmt der technische Bereich (vorwiegend dynamisch-deterministische) Methoden der Versuchsplanung und der Klassifikation aus den Bereichen der Landwirtschaft und der Medizin.
3. Die sehr umfangreich durchgeführten Vergleiche von Methoden der experimentellen Prozeßanalyse zeigen, daß es nicht einen günstigen Weg bzw. eine günstige Methode gibt, sondern die subjektive Komponente beim Entwurf der Modelle erhalten bleibt.

Tafel 1.1. Vorgestellte Anwendungsfälle

| Bereich | Modelle | Ziele |
|------------------|---|--|
| Mikroelektronik | Modelle einer Fertigungszelle für den Zyklus I | Mengen- und Qualitätssteuerung |
| Landwirtschaft | Innentemperaturmodell des Gewächshauses G 300 | Ertragsoptimierung bei minimalen Kosten |
| Wasserwirtschaft | Wassergütermodelle von Flüssen und Talsperren Wassermengenmodelle von Flußgebieten | Entwurf von optimalen Bewirtschaftungsstrategien |
| Biotechnologie | Modelle der kontinuierlichen Fermentation | Auslegung und Steuerung von Fermentern |
| Medizin | Blutglukosemodelle des Menschen Herz-Kreislauf-Modelle des Menschen | Entwurf von Diagnose- und Steuerstrategien |

Um dem Leser einen Einblick in unterschiedliche Bereiche der praktischen Anwendung zu geben, wird in diesem Buch nicht der Versuch unternommen, die Vielfalt der bereits national und international realisierten Einsatzfälle darzustellen, sondern es werden ausgewählte Objekte kurz vorgestellt, an denen der Autor in den letzten Jahren selbst mitgearbeitet hat. Ausgewählt wurden die in Tafel 1.1 angegebenen Praxisobjekte.

1.2.1. Modelle zur Steuerung der Fertigung hochintegrierter Schaltkreise im Zyklus I

Für eine Fertigungszelle in der Mikroelektronik für hochintegrierte Schaltkreise, deren Struktur im Bild 1.9 dargestellt ist, wurde gemeinsam mit dem VEB Mikroelektronik „Karl Marx“, Erfurt, zur Lösung der Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Planungsaufgaben aller Mengen- und Qualitätsparameter das rechnergestützte Prozessführungssystem PROFIS entworfen und realisiert [1.6, 1.7].

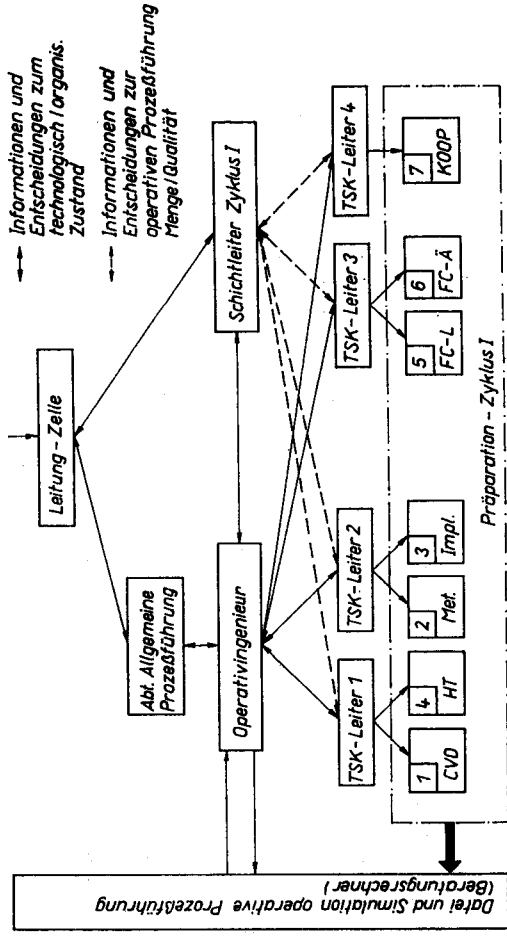


Bild 1.9. Struktur einer Fertigungszelle der Mikroelektronik
CVD CVD-Prozesse; Met. Metallisierung; Impl. Implantation; HT Hochtemperaturprozesse;
FC-L Fotochemie/Lack; FC-A Fotochemie/Ätzen; KOOP Kooperation

Die Struktur dieses Prozessführungssystems ist mit seinen Elementen

- PROFIS-KOMPAKT 2 (Datenbank)
- PROFIS-DATAN (Datenanalyse)
- PROFIS-KOMPAN (Komplexanalyse)
- PROFIS-TEPRO (technologieorientierte Prozesssimulation)
- PROFIS-DURST (Durchlaufsteuerung)
- PROFIS-EXPERT (Dialogführung der Beratungs-/Expertensysteme)

im Bild 1.10 dargestellt. Für die Ableitung von Entscheidungsvorschlägen bzw. Steuermaßnahmen in den einzelnen Ebenen des hierarchisch strukturierten Prozesses wurden fünf verschiedene Modelltypen entsprechend Bild 1.11 entwickelt. Charakteristisch ist, daß die Präzision der Modelle mit höherer Ebene abnimmt. Die Beschreibungen gehen

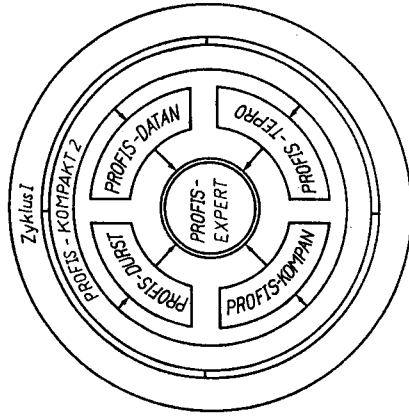


Bild 1.10
Struktur des Prozessführungssystems
PROFIS

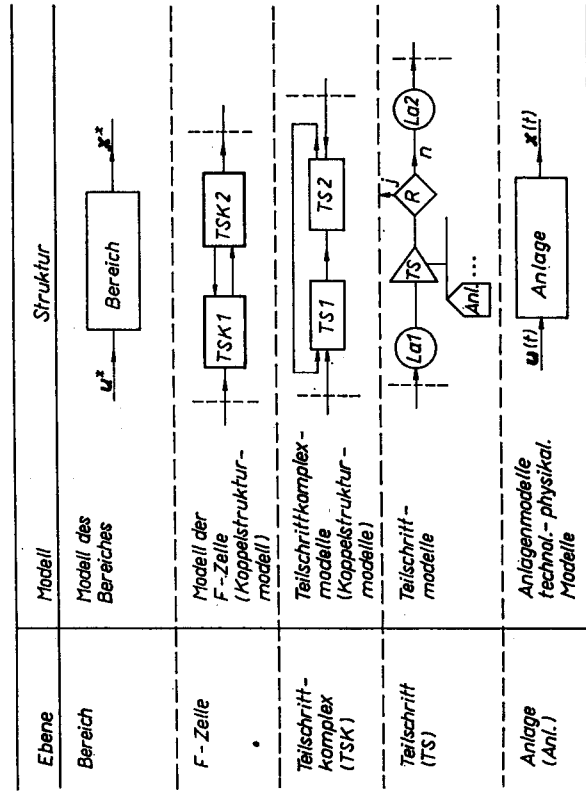
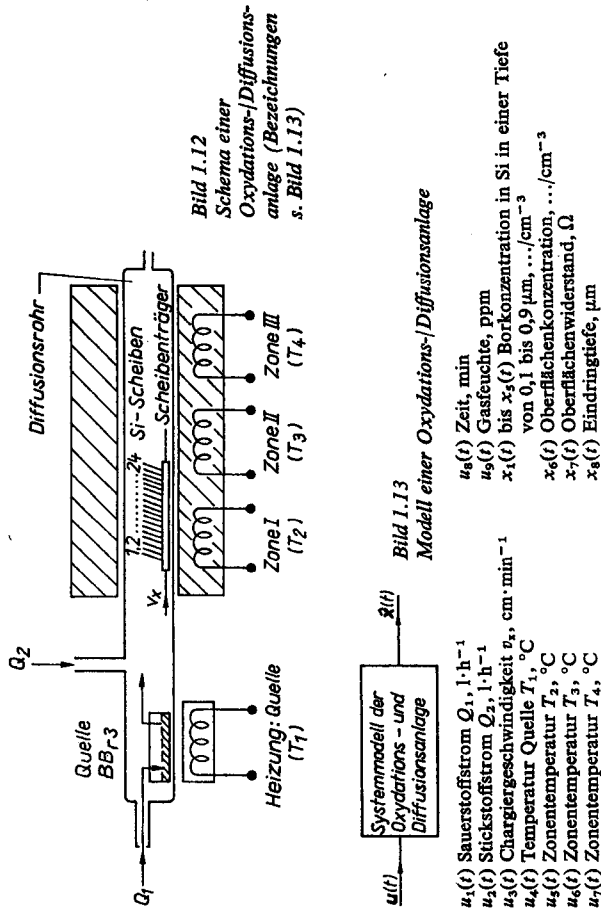


Bild 1.11. Modellebenen der Fertigungszelle

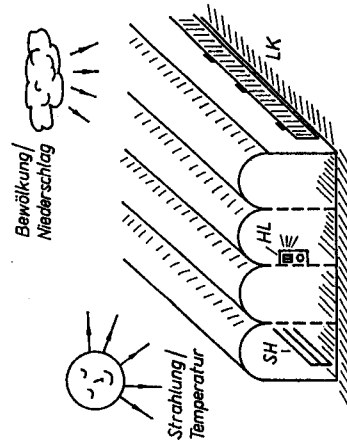
von Modellen mit verteilten Parametern zu Anlagenmodellen mit konzentrierten Parametern bis zu strukturellen Modellen des Fertigungsprozesses über. Das Grobmodell der höchsten Ebene beschreibt nur noch das Verhalten von eingesteuerter Chipfläche zur angesteuerten Gutchipfläche, d.h. die Ausbeute. Ein typisches Problem der Erstellung eines Anlagenmodells ist in den Bildern 1.12 und 1.13 für eine Oxydations-/Diffusionsanlage dargestellt.

Neben Methoden zur Diagnose und Überwachung wichtiger Qualitätsparameter der Fertigung (z.B. Eindringtiefe, Konzentrationen) wurden Schätzverfahren für das statische Systemverhalten angewendet, um ein Modell für die Steuerung der Diffusion bzw. Oxydation aus den im Bild 1.12 dargestellten gemessenen Größen zu ermitteln.

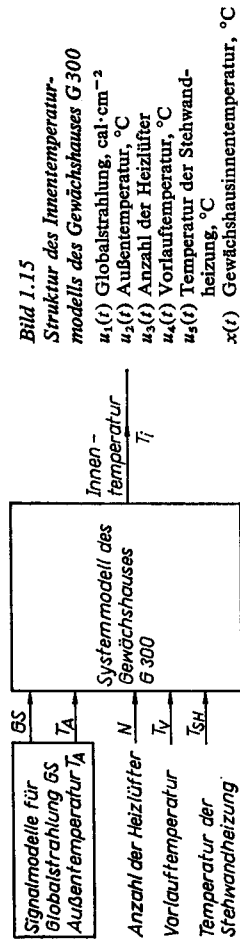


1.2.2. Innentemperaturmodell zur Steuerung von Gewächshäusern

Die effektive Verwendung von Heizungsenergie bei den zu den Großverbrauchern zählenden Gewächshausanlagen ist eine vorrangige Aufgabe in der Landwirtschaft. Neben der Ermittlung von Klimabedingungen, Ernährungszuständen usw., die zu maximalen Erträgen führen [1.8], ist der Entwurf von Steuerstrategien zur Einhaltung dieser vorgegebenen Führungsgrößen notwendig. Für eine der wesentlichsten Einflußgrößen auf die Ertragsbildung, die Innentemperatur des Gewächshauses, wurde deshalb in enger Zusammenarbeit mit dem Institut für Gemüseproduktion Großbeeren der Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR ein Innentemperaturmodell für das Gewächshaus G300 entwickelt und erprobt [1.9, 1.10, 1.11]. Das Gewächshaus vom Typ G300 (Bild 1.14) ist ein vierschiffiger plastbedeckter Typenbau mit einer Anbaufläche von 3740 m². Als Heizungssysteme stehen die Stehwandheizung und 18 Heizlüfter, die für Heizwasser mit einer Vorlauftemperatur von 120 °C ausgelegt sind, zur Verfügung.



Die Lüftungsklappen können zur Absenkung der Innentemperatur benutzt werden. Auf der Grundlage einer theoretischen Prozeßanalyse setzt sich das Innentemperaturmodell aus den Signalmodellen für die Außenklimagrößen (Außentemperatur, Globalstrahlung) und den Merkmalen der Heizungssysteme zusammen (Bild 1.15). Bei dessen Ermittlung kamen u. a. Methoden der Signalidentifikation, der Parameterschätzung dynamischer Systeme und der Versuchsplanung zum Einsatz. Das erstellte Modell wurde mit Erfolg in einer mikrorechnergestützten Steuerung, die auf einer Innentemperaturvorhersage beruht, eingesetzt [1.11].



1.2.3. Modelle des Sauerstoffgehalts limnischer Ökosysteme

In den letzten Jahren haben Methoden der Identifikation zur mathematischen Modellierung limnischer Ökosysteme verstärkt Anwendung gefunden [1.12, 1.13].

Auf der Grundlage der erstellten Signal- und/oder Systemmodelle werden die funktionellen und strukturellen Beziehungen zwischen den Größen des Prozesses aufgeklärt. Gleichzeitig dienen die Modelle zur Ableitung von Steuermaßnahmen bei vorgegebenen Situationen.

Die Lösung dieser Aufgabe ist für die DDR von besonderer Bedeutung, weil der Grad der Nutzung des Wasserdargebots schon sehr hoch ist (etwa 80%). Zudem haben sich die Belastungen der Gewässer durch die Einleitungen aus dem kommunalen, dem industriellen und dem landwirtschaftlichen Bereich erhöht.

Für eines der wichtigsten Merkmale für die Wasserbeschaffenheit und für den Erholungswert von Gewässern, die „Sauerstoffbilanz“, wurden gemeinsam mit der Oberflüßmeisterei Berlin und der TU Dresden, Sektion Wasserwesen, für unterschiedliche Gewässer Signal- und/oder Systemmodelle erstellt [1.14, 1.15, 1.16].

Modelle des Sauerstoffgehalts der Spree im Stadtgebiet der Hauptstadt der DDR, Berlin
Die Spree im Raum von Berlin (Bild 1.16) besitzt im Vergleich zu anderen europäischen Flüssen folgende Besonderheiten:

- geringe Fließgeschwindigkeit ($\leq 0,07$ m/s)
- Stauhaltungen im Flußgebiet
- hohe Nährstoffbelastung.

Außerdem bestehen in diesem Gebiet sehr enge Beziehungen zwischen der Nutzung des Grund- und Oberflächenwassers, der Einleitung von Kühl- und Abwasser, der fischereilichen Nutzung und der Nutzung als Erholungsgebiet. Im Rahmen der Arbeiten wurden für die im Bild 1.16 angegebenen Zielpegel sowohl Signal- als auch Systemmodelle für die in den Bildern 1.17 und 1.18 angegebenen Eingangs- und Ausgangsgrößen erstellt.

Sie dienen einerseits zur aktuellen Überwachung des Sauerstoffgehalts der Spree.

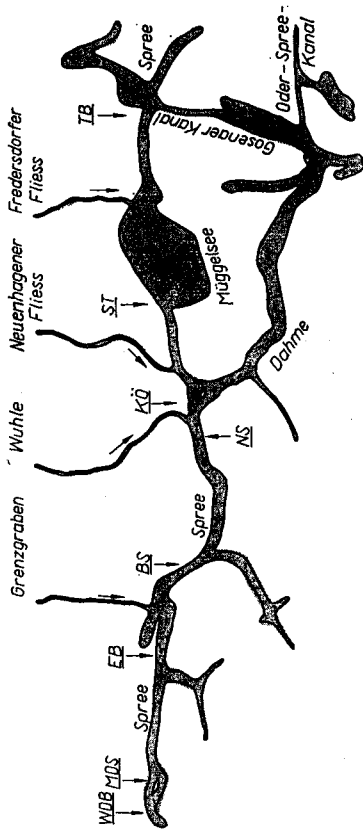


Bild 1.16. Verlauf der Spree im Gebiet Berlin und verwendete Gütepegel

TB Trigliawbrücke; ST Spreetunnel; KÖ Köpenick; NS Nixenstraße; BS Baumschulenweg; EB Eisenbrücke; MDS Mühlendammsechse; WDB Weidendammbrücke

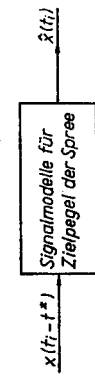


Bild 1.17

Signalmodelle für Zielpegel der Spree

$x(t)$ Sauerstoffgehalt zum Zeitpunkt t , mg/l
 $x(t, -t^*)$ Sauerstoffgehalt zum Zeitpunkt $t - t^*$, mg/l

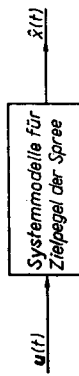


Bild 1.18

Systemmodelle für Zielpegel der Spree

$u_1(t)$ Wassertemperatur, °C
 $u_2(t)$ biologischer Sauerstoffverbrauch BSD, mg O₂/l
 $u_3(t)$ Durchfluß, m³/s
 $u_4(t)$ Ammonium, mg/l
 $u_5(t)$ chemischer Sauerstoffbedarf, mg O₂/l
 $u_6(t)$ abfiltrierbare Stoffe, mg TS/l
 $u_7(t)$ Globalstrahlung, cal·cm⁻²
 $x(t)$ Sauerstoffgehalt, mg O₂/l

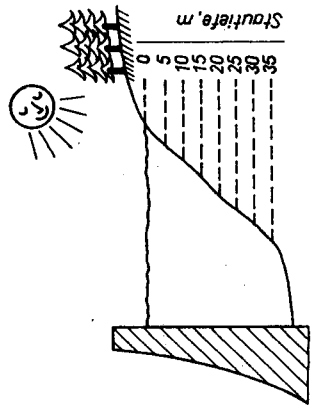


Bild 1.19. Schema des Ökosystems „Talsperre“

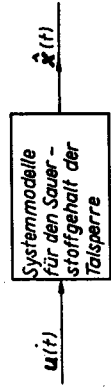


Bild 1.20. Modellkonzept für den Sauerstoffgehalt einer Talsperre

$u_1(t)$ Temperatur, °C
 $u_2(t)$ biologischer Sauerstoffverbrauch, mg O₂/l
 $u_3(t)$ Sestonengehalt, mg TS/l
 $u_4(t)$ Chlorophyllkonzentration, µg/l
 $u_5(t)$ Nitratstickstoffkonzentration, mg NO₃/l
 $u_6(t)$ chemischer Sauerstoffverbrauch, mg O₂/l
 $u_7(t)$ Orthophosphatkonzentration, µg PO₄/l
 $u_8(t)$ Sichttiefe, m
 $x(t)$ bis $x_3(t)$ Sauerstoffgehalt in den Tiefen 0 m, 5 bis 35 m in mg O₂/l

Andererseits werden auf ihrer Grundlage die Bedingungen ermittelt, bei denen der Sauerstoffgehalt der Spree im Stadtgebiet der Hauptstadt der DDR unter Berücksichtigung der Einleitungen von Kläranlagen sowie von Entnahmen durch industrielle und kommunale Nutzer nicht unter 4 mg O₂/l sinkt. Mit den Modellen können ferner Vorhersagen gegeben werden, wie sich die Zielgröße Sauerstoffgehalt an den Meßpegeln infolge beachtlicher oder unbeachtlicher Eingriffe ändern wird. Aus diesen Vorhersagen müssen die entsprechenden Entscheidungen abgeleitet werden.

Modelle des Sauerstoffhaushalts der Talsperre Saitenbach (DDR)

Für die im mittleren Erzgebirge gelegene Trinkwassertalsperre Saitenbach wurden für die Wassertiefen von 0 bis 35 m in Stufen von jeweils 5 m Modelle des Sauerstoffgehalts ermittelt (Bild 1.19). Die erstellten statischen zeitinvarianten und zeitvarianten Modelle dienen zur Ermittlung des aktuellen Einflusses der Eingangsgrößen auf die Rohwasserqualität (Bild 1.20). Damit kann der aktuelle Zustand des Ökosystems „Talsperre“ ermittelt und die Entwicklung der Rohwasserqualität für verschiedene bedeutsame wasserwirtschaftliche Situationen simuliert werden. Auf der Grundlage dieser Simulation sind Entscheidungen für die bewußte Gestaltung der „Umweltfaktoren“ abzuleiten.

1.2.4. Modelle zur Vorhersage und Steuerung der Wassermenge im Flußgebiet der Werra (DDR)

Die Wasserbewegung in einem Flußgebiet ist ein sehr komplizierter Prozeß, und seine Beschreibung mittels mathematischer Modelle enthält viele Aspekte der Identifikation großer Systeme. Das Ziel der Entwicklung eines Gesamtmodells für das Flußgebiet der

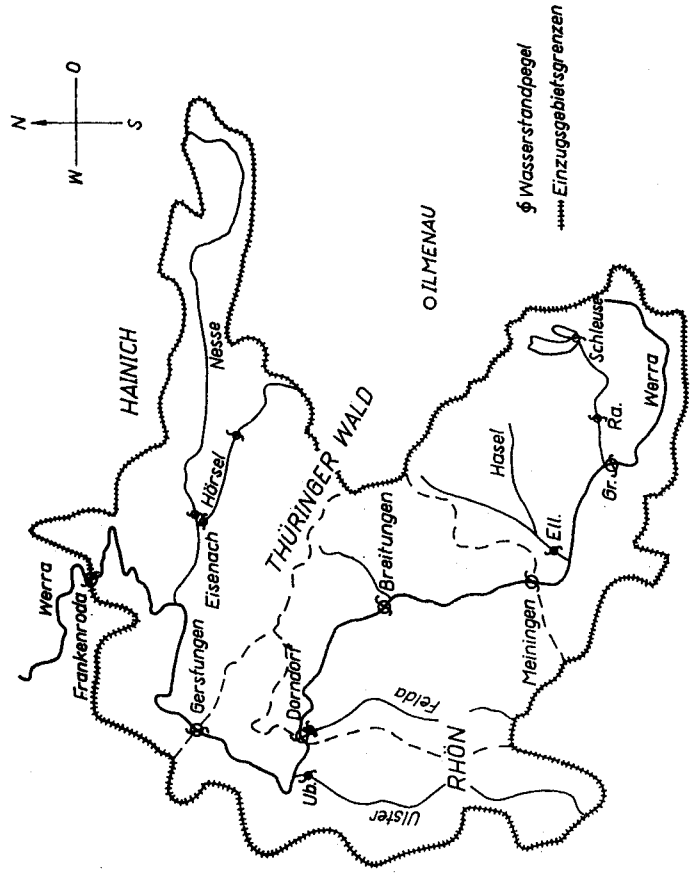


Bild 1.21. Schema des Flußgebietes der Werra auf dem Gebiet der DDR

Werra wurde abgeleitet aus der Aufgabenstellung der Vorhersage und/oder Steuerung der Wassermenge für ausgewählte Punkte (Pegel) des Flußgebiets. Die gemeinsam mit den Oberflußmeistereien Suhl und Erfurt und dem Meteorologischen Dienst der DDR, Sitz Weimar, durchgeführten Arbeiten haben durch die rechtzeitige Warnung und Ableitung von Schutzmaßnahmen eine große gesellschaftspolitische und ökonomische Bedeutung. Das Gesamtmodell der Werra ist ein wesentlicher Bestandteil des Beratungssystems WERRA, das der Entscheidungsfindung der Oberflußmeistereien dient [1.17, 1.18, 1.19].

Das Modell wurde für das im Bild 1.21 dargestellte Einzugsgebiet entwickelt. Es enthält folgende Merkmale:

- Länge des Flusses 190 km
- Einzugsgebietsfläche 4215 km²
- Höhenlage etwa 200 bis 900 m über NN
- Zuflüsse: 8 Nebenflüsse.

Im Hochwasserfall wird der Abfluß wesentlich bestimmt durch den Oberflächenabfluß, der wiederum abhängt von starken Niederschlägen, großen Schneehöhen in den Kammlagen und schnellem Eindringen von Warmluftmengen in das Gebiet des Thüringer Waldes. Die erfassten Informationen (Niederschläge, Temperaturen, Schneehöhen, Durchflüsse usw.) sind nicht für das gesamte Gebiet repräsentativ und teilweise ungenau. Dies betrifft auch die vorhergesagten Werte des Wetterdienstes. Die Aufgabe bestand nun darin, Modelle für die Wasserbewegung zu erstellen, die

1. die Unsicherheit der Information berücksichtigen
2. ausreichend genau für die Lösung der Vorhersage- und/oder Steueraufgabe und
3. für den Mikrorechnerinsatz geeignet sind.

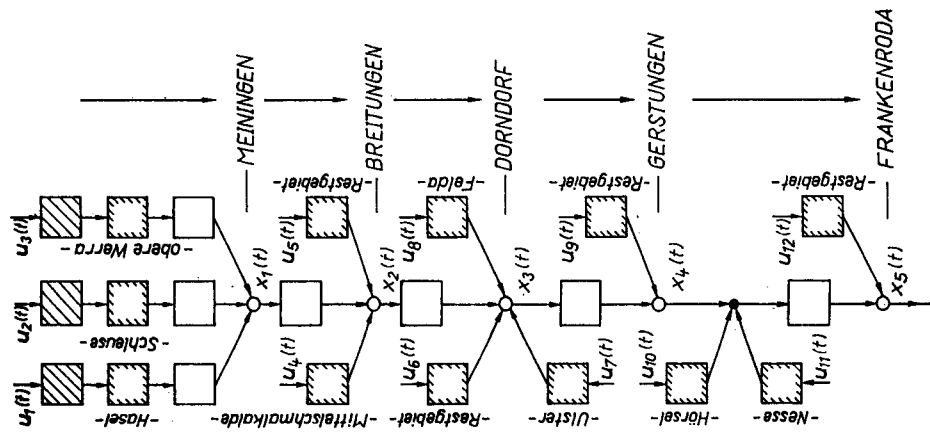


Bild 1.22
Struktur des Gesamtmodells WERRA
 $u_i(t)$ Vektor der Einflußgrößen für das i -te Teilmodell
 u_1 Niederschläge, mm · h⁻¹
 u_2 Lufttemperatur, °C
 u_3 Schneehöhe, cm
 u_4 Schneedecke, mm · cm⁻¹
 u_5 Globalstrahlung, cal · cm⁻²
 u_6 Bodenfeuchte, ppm
 $x_i(t)$ Durchflußmenge in den Zielpunkten des Flußgebietes, m³ · s⁻¹

Das Gesamtmodell der Werra (Bild 1.22) besteht aus fünf Teilmodellen für die Gebiete Meiningen, Breitungen, Dorndorf, Gerstungen und Frankenroda, weil an diesen Stellen Meßpegel für den Durchfluß existieren. In den Teilmodellen sind drei Typen von Modellen entwickelt worden: Schneeschmelzmodelle, Niederschlagsabflußmodelle und Flußlaufmodelle. Insgesamt besteht das Flußgebietsmodell der Werra aus 22 Einzelmodellen für die Beobachtungsintervalle von 3, 6, 12, 24 h. Die Modelle wurden aus den Beobachtungen der letzten 50 Jahre und teilweise auf der Grundlage von aktiven Experimenten mittels Methoden der Schätzung des dynamischen Systemverhaltens erstellt.

1.2.5. Modelle der kontinuierlichen Fermentation

Die Bedeutung biotechnologischer Verfahren in der Gesellschaft ist aufgrund ihrer Vorzüge ständig gestiegen. Ein schwieriges Problem ist der Entwurf von Steuerstrategien, die die gewünschten Wachstums- und Sterbebedingungen von Mikroorganismen im Fermenter garantieren. In Zusammenarbeit mit dem VEB Jenapharm wurden deshalb Untersuchungen zur optimalen Prozeßgestaltung, besonders zur Bestimmung der Abhängigkeit des Prozeßverlaufs von Nährmedien, Temperaturen, Belüftung, Rührerdrehzahl, Durchflußrate usw., geführt [1.20, 1.21]. Untersucht wurde eine zweistufige kontinuierliche Fermentation, deren technologisches Schema im Bild 1.23 dargestellt ist.

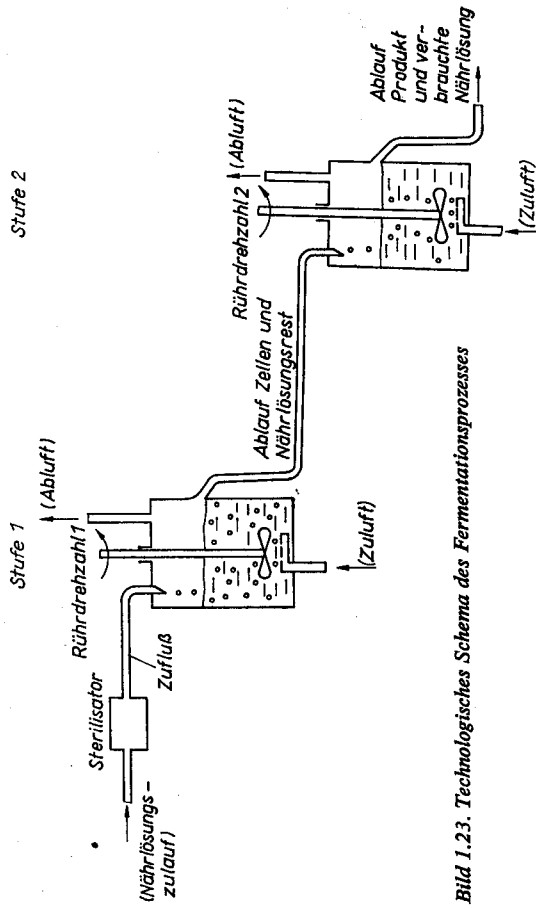
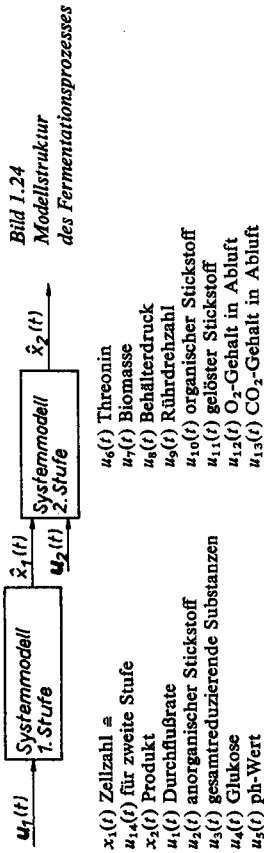


Bild 1.23. Technologisches Schema des Fermentationsprozesses

Bei diesem Typ der Fermentation sollen in der ersten Stufe unter ständiger Zugabe einer Nährlösung und Einblasen von Luftsauerstoff die Bedingungen so gesteuert werden, daß eine maximale Zahl von Zellen gebildet wird (d. h. maximales Wachstum). Ein Gemisch von Nährlösung, Zellen und Produkt (Resultat des Sterbevorgangs der Zellen) gelangt in die zweite Stufe. In dieser Stufe sind nun die Bedingungen im Fermenter so zu steuern, daß eine maximale Zahl von Zellen abstirbt, d. h., daß viel Produkt gebildet wird. Bei einer richtigen Gestaltung aller steuerbaren und konstruktiven Parameter stellt sich ein stationärer Arbeitspunkt ein.

Für die Erstellung des im Bild 1.24 dargestellten Modells der zweistufigen Fermentation wurden Methoden der Auswahl wesentlicher Einflußgrößen, der Primärdatenverarbeitung und der Parameterschätzung statischer zeitinvarianter und zeitvarianter Systemmodelle verwendet. Die Ergebnisse führten zu einer wesentlichen Reduzierung des Meß- und Steueraufwands sowie zu neuen Vorschriften bei der konstruktiven Auslegung der zweistufigen Fermentation.

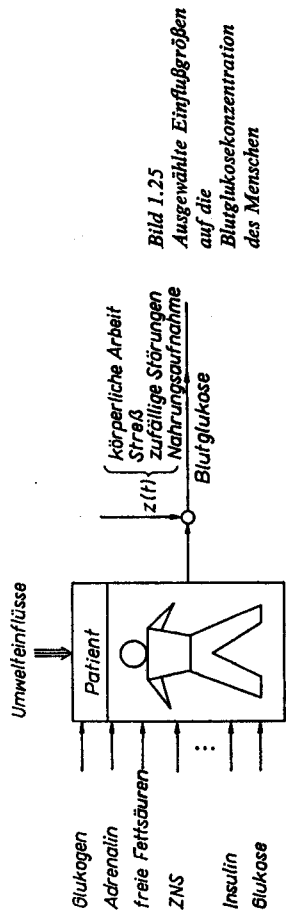


1.2.6. Modelle zur Lösung medizinischer Aufgaben

Gemeinsam mit verschiedenen Partnern aus dem medizinischen Bereich wurden in den letzten Jahren Methoden der experimentellen Identifikation zur Lösung von Diagnose- und Entscheidungs-/Steueraufgaben sowie zur Klärung physiologischer Grundzusammenhänge erfolgreich angewendet. Zwei typische Projekte seien hier kurz vorgestellt.

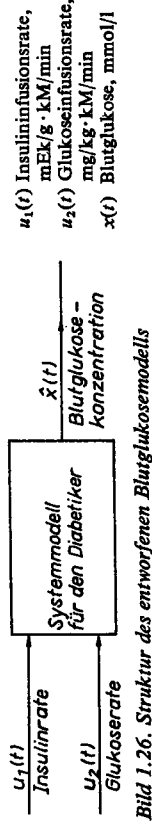
Modelle zur Blutglukoseführung des Menschen vor, während und nach Operationen

Der Diabetes mellitus gehört zu den häufigsten chronischen Krankheiten vieler Länder (in der DDR etwa 4% der Bevölkerung). Trotz der modernen komplexen Diabetikerbetreuung treten vielfältige kurzzeitige und langzeitige Komplikationen auf. Das Ziel der gemeinsam mit der Karl-Marx-Universität Leipzig durchgeführten Untersuchungen bestand in der Entwicklung von Wirkmodellen von Insulin und Glukose auf die Blutglukose des Menschen. Diese Modelle werden zur Ableitung von Steuervorschlägen des entworfenen Beratungs- und Steuersystems zur Blutglukoseführung GLUCON benötigt [1.22, 1.23, 1.24].



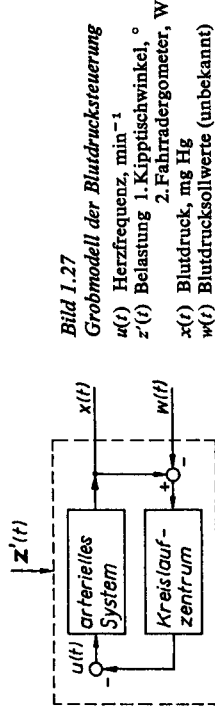
Der Zusammenhang zwischen der Blutglukose und den wesentlichen Einflußgrößen und Störgrößen (Bild 1.25) ist sehr kompliziert und in seinem statischen und dynamischen Verhalten individuell sehr verschieden, zeitvariant und häufig stark gestört. Hinzu kommt, daß nur wenige Einflußgrößen erfaßt werden können (z. B. Insulin-, Glukose-

rate). Als ein ausreichender Modellansatz für die genannte Aufgabe hat sich ein einfaches zeitvariantes Modell mit der Struktur von Bild 1.26 erwiesen, das schnell an den aktuellen Zustand des Patienten über eine Änderung der statischen Wirkfaktoren von Insulin und Glukose angepaßt werden kann. In diesem Einsatzfall wurden mehrere Modelle für den Operationsablauf entwickelt und über eine zustandsabhängige Umsteuerung angewendet. Als Methoden der experimentellen Prozeßanalyse wurden Verfahren der Signalanalyse und der Parameterschätzung dynamischer Systemmodelle genutzt.



Modelle des Herz-Kreislauf-Systems des Menschen

Aufgrund vieler Einflußfaktoren nehmen die Anzahl und die Stärke der Erkrankungen des Herz-Kreislauf-Systems des Menschen zu. Eine der wichtigsten Aufgaben auf diesem Gebiet besteht deshalb z. Z. darin, Methoden für die Abschätzung der Leistungsfähigkeit und des Steuerungsverhaltens des kardiovaskulären Systems des Menschen zu entwickeln und zu erproben. Die gemeinsam mit dem Institut für Pathophysiologie der Medizinischen Akademie Erfurt durchgeführten Untersuchungen der letzten Jahre dienten - der Modellierung des Herz-Kreislauf-Systems zur Aufklärung physiologischer Zusammenhänge - der Klassifikation der Patienten bezüglich verschiedener Merkmale (z. B. Alter, Geschlecht, Trainingszustand, Risikofaktoren) - dem Entwurf zweckmäßiger Belastungstests für die Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Kreislaufsystems in der Funktions- und Leistungsdiagnostik [1.25 bis 1.30].



Um im Bild 1.27 stark vereinfachte Struktur des Herz-Kreislauf-Systems auf experimentellem Wege zu identifizieren, wurde eine Reihe von Belastungstests ($z'(t)$) auf der Grundlage der optimalen Versuchsplanung entworfen und angewendet. Als Belastungsformen wurden verwendet

1. die passive Orthostase (Kippitischversuche)
2. der Ergometertest.

Aus den Analysen der Belastungstests wurden Modelle für das statische und dynamische Verhalten der wichtigsten Zusammenhänge

- Belastung - Herzfrequenz
- Belastung - Blutdruck

entsprechend der Struktur im Bild 1.28 ermittelt. Ihre Parameter und/oder Struktur gestatten bei Kenntnis des Zustands des Patienten eine spätere Verwendung zur Klassifi-

kation und zur Beurteilung neuer Patienten bzw. des gleichen Patienten zu einem späteren Zeitpunkt. Als Modelle wurden lineare und nichtlineare parametrische (Differenzengleichungen) und nichtparametrische (Volterra-Reihen) Beschreibungen verwendet.

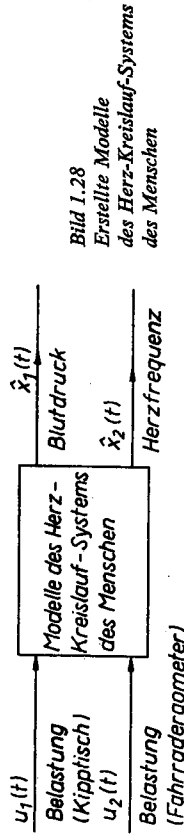


Bild 1.28
Erstellte Modelle
des Herz-Kreislauf-Systems
des Menschen

1.2.7. Schlussfolgerungen

Bereits die hier angeführten wenigen Anwendungsbeispiele machen dem Leser klar, daß

- eine große Vielfalt von Modellformen und Methoden zu ihrer Bestimmung vorliegen und auch erforderlich sind
- eine rechnergestützte Arbeit unbedingt erforderlich ist
- Praxisfälle nur in Verbindung und mit Unterstützung des jeweiligen Prozessspezialisten gelöst werden können.

Deshalb soll dieses Buch ausgewählte Modelle und Methoden ihrer Ermittlung vorstellen, die sich praktisch bewährt haben. Gleichzeitig sollen dem Anwender Richtlinien für ihren effektiven Einsatz gegeben werden.

1.3. Gesamtkonzeption der experimentellen Prozeßanalyse

Im Rahmen dieses Buches werden Methoden und Strategien vorgestellt, die auf der Basis der gemessenen Eingangs- und Ausgangssignale sowie von A-priori-Informationen Modelle für das Verhalten der Signale und des Systems ermitteln. Damit kann die allgemeine Aufgabenstellung entsprechend Bild 1.29 formuliert werden.

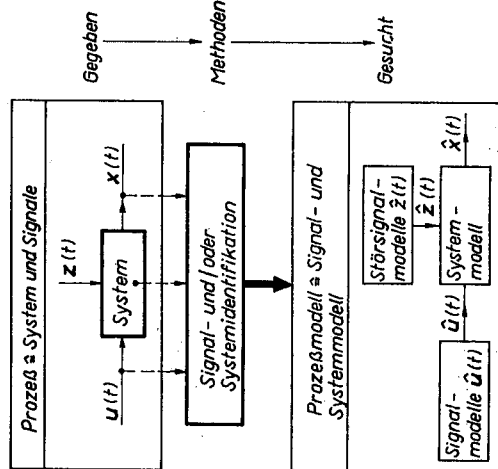


Bild 1.29
Aufgabenstellung
der experimentellen Prozeßanalyse

Es sind gegeben:

1. gemessene Eingangs- und Ausgangssignale $u(t)$, $x(t)$ und/oder
2. gemessene Zustände $q(t)$ und/oder
3. A-priori-Informationen über Signale und Systeme.

Gesucht sind:

1. mathematische Zusammenhänge zwischen den Eingangs-, Ausgangs- und ggf. Zustandsgrößen – Systemmodelle – und/oder
2. mathematische Beschreibung der Signale – Signalmodelle – und
3. geeignete Methoden und Strategien zur Ermittlung der Signal- und/oder Systemmodelle.

Damit ist die Frage zu beantworten:

Welches MODELL ist auf Grundlage welcher INFORMATION (Messungen u. a.) mit welcher METHODE/STRATEGIE für welche AUFGABE (Diagnose, Überwachung, Steuerung, Vorhersage) zu entwickeln?

Die Aufgabe der experimentellen Prozeßanalyse (-identifikation) besteht in der Bestimmung (ungestörtes System bzw. Signal) und der Schätzung (gestörtes System bzw. Signal) von *Signalmodellen* der Typen

1. Kennfunktionen für das Amplitudenverhalten (Abschn.2), z.B. Verteilung, Momente,
2. Kennfunktionen für das Zeit- und Frequenzverhalten (s. Abschn.3), z.B. Korrelationsfunktionen, Leistungsdichtespektren,
3. deterministische Beschreibung des dynamischen Signalverhaltens (s. Abschn.3.3) in der Form

$$x(t) = f_1(t) + z(t),$$

$$\text{z.B. } f_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

4. stochastische Beschreibung des dynamischen Signalverhaltens (s. Abschn.3.3) in der Form

$$x(t) = f_2(\varepsilon(t), \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \dots, \frac{dx(t)}{dt}, \dots),$$

z. B.

$$x(t) = b_0 \varepsilon(t) + b_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} - a_1 \frac{dx(t)}{dt};$$

$\varepsilon(t)$ (weißes Rauschen)

und/oder von *Systemmodellen* der Form

$$\dot{x}(t) = f_4(m(t), \dot{s}). \tag{1.1}$$

Dabei wird davon ausgegangen, daß der im Bild 1.2 dargestellte allgemeine Prozeß durch das System und die auf das System wirkenden Signale beschrieben werden kann. Damit gilt für diese Prozeßbeschreibung (Ein-/Ausgangs-Beschreibung)

$$x(t) = f_5(u(t), s) + z(t). \tag{1.2}$$

Bei der Schätzung einiger Modelle werden zurückliegende Ausgangssignale bzw. transformierte Signale als Pseudoeingangssignale verwendet. Damit gilt als allgemeine

Prozessbeschreibung

$$x(t) = f_6(m(t), s) + z(t) \quad (1.3)$$

mit dem „Meßwertvektor“ $m(t)$

$$m(t) = f_7(u(t), x(t)).$$

Neben der Bestimmung von Ein-/Ausgangs-Modellen ist die Ermittlung (Beobachtung) und Schätzung (Filterung) der Zustände eines Systems von großer Bedeutung für die Lösung der gestellten kybernetischen Aufgaben. Als Systembeschreibung gilt entsprechend Bild 1.30 für ein System mit l Eingängen und einem Ausgang:

$$(1.4)$$

$$\dot{q}(t) = A q(t) + B u(t) + v(t), \quad x(t) = c^T q(t) + z(t);$$

$v(t)$ Störung des Zustands
 $z(t)$ Störung des Ausgangs.

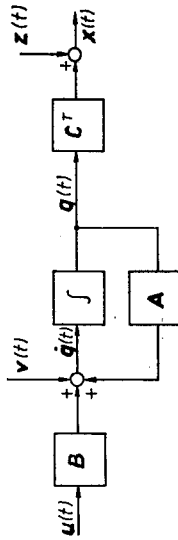


Bild 1.30
Zustandsdarstellung
des Prozesses

Für das Zustandsmodell gilt analog

$$(1.5)$$

$$\dot{\hat{q}}(t) = \hat{A} \hat{q}(t) + \hat{B} u(t), \quad \hat{x}(t) = \hat{c}^T \hat{q}(t).$$

Die Aufgaben der Ermittlung von Modellen für das statische und dynamische Verhalten von Signalen und Systemen werden mit den Methoden der Signal- und Systemanalyse gelöst. Als Oberbegriff wird häufig die Bezeichnung Prozeßidentifikation bzw. Prozeßanalyse verwendet.

Mit Signalanalyse/-identifikation bezeichnet man die Ermittlung von Modellen und Kennfunktionen zur Beschreibung des stationären und dynamischen Verhaltens der im Prozeß auftretenden Signale (Eingangs-, Ausgangs-, Störgrößen).

Die Systemanalyse/-identifikation dient der Ermittlung von Modellen des statischen und dynamischen Verhaltens des Systems in Form von

1. *Ein-/Ausgangs-Modellen* (bilden die Beziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen ab)
2. *Zustandsmodellen* (bilden die Beziehung zwischen Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen ab).

Die Systemmodelle werden charakterisiert durch die

- *Struktur* (z. B. Art der Verkopplung von Eingangs- und Ausgangsgrößen, Polynomgrad der statischen Kennlinie, Ordnung der Differentialgleichung);
- *Parameter* (z. B. Koeffizienten der Differentialgleichung, Verstärkung, Trägheits- und Vorhaltzeitkonstanten).

Wenn die Ermittlung von Systemmodellen bei a priori bekannter oder angenommener Struktur erfolgt, spricht man von einer *Parameteridentifikation*.

Die Ermittlung des Zustands bei gegebenem Zustandsmodell entsprechend Gl. (1.4) wird als *Zustandsidentifikation* bezeichnet. Ist die Aufgabe für ungestörte Systeme zu lösen, bezeichnet man häufig die entworfenen Algorithmen zur Zustandsidentifikation

mit *Beobachter*. Müssen die Zustände eines gestörten Systems ermittelt werden, wird diese Aufgabe gewöhnlich *Zustandsschätzung/-filterung* genannt.

Die Lösung der Aufgaben der Signal- und Systemidentifikation ist auf den zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen

1. der theoretischen Prozeßanalyse
2. der experimentellen Prozeßanalyse

möglich.

Bei den Methoden der *theoretischen Prozeßanalyse* erfolgt die Beschreibung der im Prozeß (Signal und System) ablaufenden physikalischen, chemischen, biologischen, ökonomischen und anderen Elementarprozesse auf der Grundlage bekannter Gesetzmäßigkeiten. In vielen Prozessen ergeben sich die mathematischen Modelle aus der Lösung von Bilanzgleichungen aus den Erhaltungssätzen (z. B. für Masse, Energie und Impuls). Damit wird bei der *theoretischen Signalanalyse* das statische und/oder das dynamische Verhalten der im Prozeß auftretenden Signale durch bekannte Gesetzmäßigkeiten beschrieben. Bei der *theoretischen Systemanalyse* wird das statische und/oder das dynamische Verhalten des Systems durch Ein-/Ausgangs-Modelle oder Zustandsmodelle durch bekannte Gesetzmäßigkeiten beschrieben.

Die *experimentelle Prozeßanalyse* dient dem Ziel der Erstellung von Signal- und Systemmodellen des statischen und dynamischen Verhaltens von Signalen - *experimentelle Signalanalyse* - und/oder von Systemen - *experimentelle Systemanalyse* - auf der Grundlage der gemessenen Signale des Prozesses.

Die theoretische und die experimentelle Prozeßanalyse ergänzen sich in ihren Vor- und Nachteilen, und ihre gemeinsame Anwendung ist immer sinnvoll. In Tafel 1.2 sind einige ausgewählte Eigenschaften beider Wege aufgezeigt. Die Wahl der Methode hängt wesentlich von der Aufgabenstellung ab. Für die Aufgaben der rechnergestützten Diagnose, Überwachung, Steuerung und Vorhersage hat sich die Festlegung wesentlicher Einflußgrößen (Stufe 2 im Bild 1.31) und die Ermittlung der Koppel- und/oder Teilstruktur des

Tafel 1.2. Ausgewählte Eigenschaften der theoretischen und experimentellen Prozeßanalyse

| Theoretisch | Experimentell |
|--|--|
| - Zustandsmodelle mit innerer Struktur des realen Prozesses | - Ein-/Ausgangs-Modelle und Signalmodelle vorwiegend ohne Struktur des realen Prozesses |
| - Parameter der Modelle stehen in Zusammenhang mit konstruktiven, technologischen und anderen Daten | - kein Zusammenhang zwischen den Modellparametern und konstruktiven, technologischen und anderen Daten |
| - Modellvereinfachungen entsprechend der Aufgabenstellung schwierig | - Modellvereinfachung entsprechend der Aufgabenstellung einfach möglich |
| - Gültigkeit der Modelle in großen Bereichen und für verschiedene Prozesse | - Gültigkeit der Modelle im untersuchten Bereich und für den speziellen Prozeß |
| - Modelle häufig zu aufwendig für Lösung der Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Vorhersageaufgabe | - Modelle sehr günstig für die Lösung der Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Vorhersageaufgabe |
| - Modell bereits in der Entwurfs-/Projektierungsphase erstellbar | - Modell erst mit Existenz/Inbetriebnahme des Prozesses erstellbar |
| - keine „Störung“ des Prozesses bei der Modellierung | - häufig „Störung“ des Prozesses erforderlich (aktives Experiment) |

Systems (Stufe 3 im Bild 1.31) aufgrund einer theoretischen Prozeßanalyse bewährt. Dagegen ist die Aufgabe der Ermittlung der Modellparameter sowie möglicher erstrebter Modellvereinfachungen durch Methoden der experimentellen Prozeßanalyse effektiver zu lösen (Stufe 4 im Bild 1.31).

Als eine allgemeine Methodologie der experimentellen Prozeßanalyse hat sich das im Bild 1.31 angegebene Schema bewährt [1.31].

Ausgehend von der Ableitung der Anforderungen an die zu erstellenden Signal- und/oder Systemmodelle entsprechend der zu lösenden Diagnose-, Überwachungs-, Steuer- und Vorhersageaufgabe ist die Bearbeitung der Teilaufgaben in der im Bild 1.31 angegebenen Reihenfolge zweckmäßig. Dabei muß davon ausgegangen werden, daß bei komplizierten Prozessen einzelne oder alle Stufen mehrfach bearbeitet werden müssen. Die Signal- und/oder Systemmodelle werden in diesen Fällen iterativ dem realen Prozeß angepaßt. Ist eine für die Lösung der Aufgabenstellung ausreichende Modellgüte erreicht, wird diese Iterationsprozedur beendet.

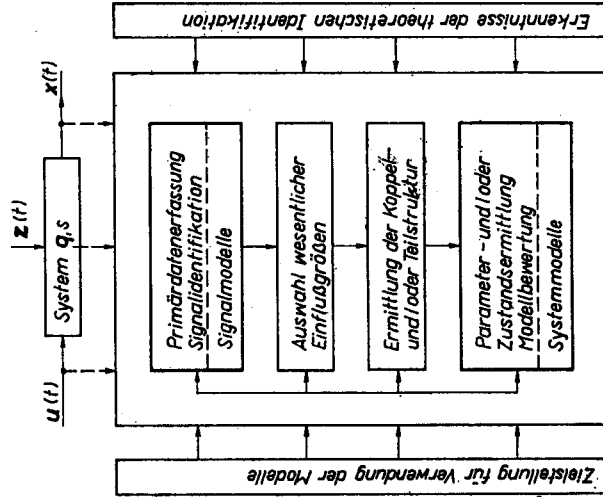


Bild 1.31
Strategie der experimentellen Prozeßanalyse

In der ersten Stufe – Primärdatenerfassung und Signalidentifikation – werden die vom Prozeß vorliegenden Meßdaten zuerst gesichert, zugeordnet, aufbereitet und transformiert. Danach können Kennwerte und Signalmodelle für das stationäre und dynamische Verhalten der Signale berechnet werden. Einige Aufgaben dieser Stufe sind in Tafel 1.3 dargestellt.

Die Aufgaben dieser Stufe bilden in der Praxis oft den aufwendigsten Teil, und sie erfordern die Zusammenarbeit verschiedener Fachdisziplinen. Die Vorstellung von Methoden und Strategien dieser Stufen bilden den ersten Schwerpunkt dieser Abhandlung.

Die zweite Stufe – Auswahl wesentlicher Einflußgrößen – gewinnt bei der Erstellung von Modellen technischer und nichttechnischer Systeme aus ökonomischen Gründen und aufgrund der Komplexität der Systeme immer mehr an Bedeutung. Wichtige Methoden sind in Tafel 1.4 dargestellt.

Tafel 1.3. Ausgewählte Aufgaben der Stufe. Primärdatenerfassung und Signalidentifikation

| | |
|--|---|
| Sicherung Zuordnung Aufbereitung Transformation | Korrektur von Fehlmessungen Filterung (Hoch-, Tief-, Bandpaß) Zeit- und Maßstabtransformationen |
| Statisches Verhalten | Verteilungen, Lageparameter Korrelationskoeffizienten Faktoranalyse |
| Dynamisches Verhalten | Korrelationsfunktionen Leistungsdichtespektren determinierte und stochastische Signalmodelle |

Tafel 1.4. Methoden zur Auswahl wesentlicher Einflußgrößen

| | |
|---------------------------|---|
| Passive Methoden | Aktive Methoden |
| Rangkorrelation | vollständiges Faktorexperiment |
| Korrelationskoeffizienten | Teilfaktorpläne (zufällige Balance) |
| Faktoranalyse | gesättigte Pläne (Plackett-Burman-Pläne) |
| Varianzanalyse | |

Bei den vom Verfasser durchgeführten praktischen Untersuchungen hat sich von den passiven Methoden die Verwendung des partiellen Korrelationskoeffizienten zur Auswahl bewährt. Dies gilt besonders für die Untersuchungen im nichttechnischen Bereich (Medizin, Landwirtschaft, Wasserwirtschaft). Von den aktiven Methoden, die alle auf der Auswertung der Reaktion der Zielgröße auf Positiv/Negativ-Änderungen in der ersten Phase vorteilhaft. Mit ihnen kann der lineare Einfluß von n Größen mit $n + 1$ Versuchen ermittelt werden. Liegen theoretische Kenntnisse über wesentliche Einflußgrößen vor, was bei technischen Systemen überwiegend der Fall ist, werden sie natürlich als A-priori-Information in dieser Stufe mit benutzt.

In der dritten Stufe – Festlegung der Koppel- und Teilstrukturen des Systemmodells – wird mit den vorhandenen Kenntnissen aus den Stufen 1 und 2, den Kenntnissen aus der theoretischen Prozeßanalyse und der Kenntnis des späteren Verwendungszwecks des Modells die Koppel- und Teilstruktur des Modells festgelegt. In dieser Stufe ist häufig die engste Verflechtung mit der theoretischen Prozeßanalyse vorhanden.

Mit der Wahl der Koppel- und Teilstrukturen des Systemmodells geht das Identifikationsproblem in ein Parameterschätzproblem über. Wesentliche Methoden dieser vierten Stufe zur Schätzung der Parameter statischer und dynamischer Systemmodelle bilden den zweiten Schwerpunkt des Buches.

Das erstellte Gesamtmodell (Signal- und Systemmodelle) muß zum Schluß der Bearbeitung einer Gütebewertung unterzogen werden. Diese sollte in zwei Stufen erfolgen:

1. Test des Modells auf der Grundlage von Gütewerten
2. Test unter den Bedingungen, in denen das System arbeitet.

Dabei ist die Erfüllung der ersten Stufe notwendig; die Entscheidung, ob sie hinreichend ist, liefert erst der zweite Test. Sind beide Tests negativ, ist entsprechend der Konzeption von Bild 1.31 in die einzelnen Vorstufen zurückzugehen. Aus ökonomischen Gründen sollte dabei in der Regel die Reihenfolge

1. Änderung der Teilstruktur
2. Hinzunahme weiterer Einflußgrößen
3. Änderung der Primärdatenerfassung

eingehalten werden. Zur effektiven Realisierung der entworfenen Strategie ist die Verwendung von Programmsystemen zur rechnergestützten Prozeßanalyse sehr vorteilhaft. Beispiele für solche Programmsysteme sind die an der TH Ilmenau entwickelten Prozeßpakete EXPRAN für den Rechner EC1040 in der Sprache PL1 und DIOPRAN zur dialogorientierten rechnergestützten Prozeßanalyse auf Mikrorechnern in der Sprache FORTRAN [1.32, 1.33].

1.4. Verwendete Klassifikationsmerkmale der Methoden der experimentellen Prozeßanalyse

Die sehr vielfältigen Methoden und Strategien zur Erstellung von Signal- und Systemmodellen sind nach vielen Merkmalen klassifizierbar. Auf der Grundlage einer Analyse des internationalen Standes [1.34 bis 1.54], der Erfahrungen des Autors bei der Realisierung von Praxisobjekten und bei der Ausbildung von Studenten der Fachrichtung Technische Kybernetik/Automatisierungstechnik an der TH Ilmenau werden die folgenden Merkmale für die Klassifikation von Methoden der Identifikation von Prozessen, die durch konzentrierte Parameter beschrieben werden können, verwendet:

- Signal- oder Systemanalyse
- Größe der Störsignale $z(t)$
- Systemverhalten/-beschreibung
- Art des Eingangssignals.

Weitere Klassifikationskriterien werden in den einzelnen Abschnitten dieses Buches eingeführt und erläutert.

Das gewählte Hauptmerkmal ist die Analyse und damit die Trennung der Methoden in die zur Erstellung von Signal- und die von Systemmodellen (s. Abschnitte 2, 3 und 4, 5, 6). Alle anderen Merkmale sind diesem untergeordnet worden (Tafel 1.5).

Tafel 1.5
Verwendete Klassifikationsmerkmale für die Methoden der experimentellen Prozeßanalyse

| Merkmal | Klassen |
|-----------------------------------|---|
| Aufgabe | Signal-/Systemidentifikation |
| Störungsgröße | ungestört/gestört |
| Prozeßeigenschaften/-beschreibung | <ul style="list-style-type: none"> - statisch/dynamisch - linear/nichtlinear - Ein-/Mehrgroßen-System - zeitinvariant/zeitvariant - kontinuierlich/diskontinuierlich |
| Eingangssignal | natürliche/künstliche Eingangssignale |

Als zweites Klassifikationsmerkmal wird die Stärke der Störung durch die Einteilung der Prozesse in ungestörte ($z(t) = 0$) und in gestörte Prozesse ($z(t) \neq 0$) verwendet. Werden die Modelle für ungestörte Prozesse ermittelt, wird von einer *Modellbestimmung* gesprochen. Im gestörten Fall wird die Analyseaufgabe dagegen mit *Modellschätzung* bezeichnet.

Die unterschiedlichen Beschreibungen für das Prozeßverhalten und ausgewählte typische Prozeßeigenschaften bilden eine dritte Gruppe möglicher Klassifikationsmerkmale entsprechend Tafel 1.5. Sie machen gleichzeitig die in diesem Buch bewußt vorgenommene Einschränkung sichtbar.

Als viertes Klassifikationsmerkmal wird die Gestaltung der für die Identifikation eingesetzten Eingangssignale verwendet. Dabei wird zwischen der Anwendung natürlicher Eingangssignale (Methoden der passiven Versuchsplanung) und der Verwendung künstlich aufprägter Eingangssignale (Methoden der aktiven Versuchsplanung) unterschieden.

Diese vier Merkmale sind bewußt gegenüber anderen (z. B. Gütekriterien, Methoden zur Minimierung der Gütekriterien) bevorzugt worden, weil damit eine relativ in sich geschlossene Darstellung der sehr großen Vielfalt von entwickelten und für die Lösung der praktischen Aufgaben notwendigen Methoden der experimentellen Erstellung von Signal- und Systemmodellen möglich erscheint.

2. Beschreibung des Amplitudenverhaltens von Signalen

2.1. Zielstellung der Ermittlung von Signalmodellen

Die Aufgabe der folgenden Abschnitte besteht in der Vorstellung ausgewählter Beschreibungen für das stationäre und dynamische Verhalten von Signalen sowie in der Darstellung von Methoden zu ihrer experimentellen Ermittlung in Form von Modellen der Signale, die teilweise auch als Kennfunktionen bezeichnet werden. Dabei wird grundsätzlich davon ausgegangen, daß Werte der beobachteten Signale zur Verfügung stehen. Als Klassifikationsgesichtspunkte werden

- die Beschreibung des Amplituden-/Zeitverhaltens
- das deterministische/statistische Verhalten und
- die Beschreibung im Zeit-/Frequenzbereich

verwendet. Das Signalmodell ergibt sich somit aus einer Reihe von Teilmodellen, z. B. Verteilung $f(x)$ für das Amplitudenverhalten, Korrelationsfunktion $R(\tau)$ und Leistungsdichtespektrum $S(\omega)$ für das dynamische Verhalten (Bild 2.1).

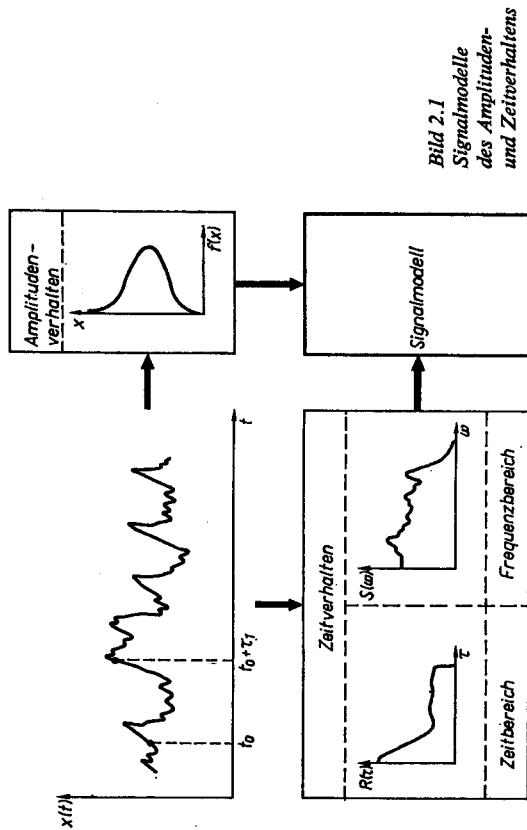


Bild 2.1
Signalmodelle
des Amplituden-
und Zeitverhaltens

Die Ergebnisse der Identifikation von Signalen werden im Rahmen von Diagnose-, Überwachungs-, Steuer- und Vorhersageaufgaben genutzt für

- die Beurteilung des statischen und/oder dynamischen Verhaltens der Signale
- die Festlegung des Stichprobenumfangs (Gesamtmeßzeit) und der Abtastzeit
- die Festlegung der Gestalt des Testsignals
- die Festlegung von Maßnahmen zur Primärdatenaufbereitung

- die Wahl der Methode zur Systemidentifikation
- die Wahl und den Entwurf der Vorhersage-, Entscheidungs-, Steuerstrategie.

Der Autor strebt bei der Darstellung von Beschreibungen und Methoden der Ermittlung des Signalverhaltens bewußt keine Vollständigkeit an. Die Auswahl aus der sehr umfangreichen Literatur auf diesem Gebiet, besonders der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik und der Informationstheorie [2.1 bis 2.12], wurde aus der Anlage der Gesamtkonzeption dieses Buches getroffen. Des weiteren wird auf eine strenge mathematische Beweisführung verzichtet; sie ist in der angegebenen weiterführenden Literatur zu finden.

2.2. Ausgewählte Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.2.1. Beschreibung eindimensionaler Zufallsgrößen

2.2.1.1. Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Um Aussagen über Gesetzmäßigkeiten zufälliger Ereignisse (d. h. Ereignisse, die unter gleichen Versuchsbedingungen eintreten oder nicht eintreten) machen zu können, wird versucht, den Charakter der Zufälligkeit durch die absolute und relative Häufigkeit zu quantifizieren. Ist bei n Wiederholungen eines zufälligen Versuchs ein Ereignis A n_A -mal eingetreten, dann wird als

$$\bullet \text{ absolute Häufigkeit } H_A(A) = n_A \quad (2.1)$$

$$\bullet \text{ relative Häufigkeit } H_r(A) = n_A/n \quad (2.2)$$

bezeichnet. Die relative Häufigkeit hat folgende Eigenschaften:

1. $0 \leq H_r(A) \leq 1$
2. $H_r(A \vee B) = H_r(A) + H_r(B) - H_r(A \wedge B)$
3. $H_r(\bar{A}) = 1 - H_r(A)$.

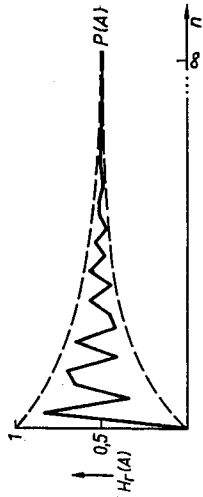


Bild 2.2
Entwicklung der relativen Häufigkeit

Die Werte der Häufigkeiten sind stark von der Anzahl der durchgeführten Versuche/Beobachtungen abhängig (Bild 2.2). Aus diesem Grunde wurde zu dem allgemeineren Begriff der Wahrscheinlichkeit übergegangen. Es existieren zwei Wege zur Beschreibung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs:

Grenzwertbildung der relativen Häufigkeit

$$\bullet P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_r(A) \quad (2.4)$$

Axiomatische Beschreibung

Jedes Ereignis A eines zufälligen Versuchs/Beobachtung aus der Menge E aller möglichen Ereignisse wird durch eine Zahl $P(A)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A , beschrieben, die folgende Axiome erfüllt:

$$P(A) \geq 0 \tag{2.5}$$

$$P(E) = 1$$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{für } P(A \wedge B) = 0.$$

Aus den Axiomen können weitere Eigenschaften abgeleitet werden. Es gilt:

$$P(\emptyset) = 0,$$

d. h., die Wahrscheinlichkeit eines unmöglichen Ereignisses ist Null;

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

$$P(A|B) = P(A \wedge B)/P(B).$$

$P(A|B)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung, daß das Ereignis B bereits eingetreten ist.

$$P(A \wedge B) = P(A)P(B) \text{ für unabhängige Ereignisse } A \text{ und } B.$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(A|B_i)P(B_i); \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Formel für die totale Wahrscheinlichkeit;

$$P(A_1|B) = P(B|A_1)P(A_1) / \sum_{k=1}^m P(B|A_k)P(A_k), \text{ Bayessche Formel.}$$

2.2.1.2. Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wird jedem Versuchsergebnis eine reelle Zahl zugeordnet, wird also das zufällige Ereignis auf die Menge der reellen Zahlen abgebildet, erhält man eine statistische Variable, die *Zufallsgröße*. Die Zufallsgröße beschreibt damit jedes zufällige Ereignis aus der Menge der möglichen Ereignisse durch eine reelle Zahl bzw. durch ein Intervall reeller Zahlen.

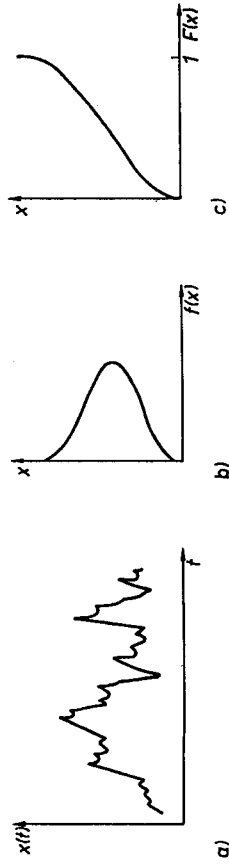


Bild 2.3. Beschreibungen einer stetigen Zufallsgröße

a) Zufallsgröße; b) Verteilungsdichte; c) Verteilungsfunktion

Eine Zufallsgröße X wird als *stetige Zufallsgröße* bezeichnet, wenn sie in einem endlichen Intervall a, b unendlich viele x_i annehmen kann (Bild 2.3 a). Dagegen nimmt eine *diskrete Zufallsgröße* in einem Intervall a, b eine endliche oder höchstens abzählbar unendliche Menge von Werten x_i an (Bild 2.4 a). Von Interesse ist nun, wie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einzelnen Werte der Zufallsgröße über ihren Wertebereich verteilt ist. Diese Information ist in der *Wahrscheinlichkeitsverteilung* – Verteilungsdichtefunktion $f(x)$, Verteilungsfunktion $F(x)$ – enthalten.

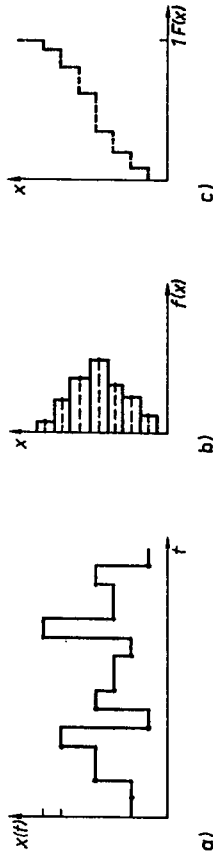


Bild 2.4. Beschreibungen einer diskreten Zufallsgröße

a) Zufallsgröße; b) Verteilung; c) Verteilungsfunktion

Die *diskrete Verteilungsdichtefunktion* $f(x)$ für eine diskrete Zufallsgröße – im folgenden mit Verteilung bezeichnet – ergibt sich durch die Darstellung aller Einzelwahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i)$ mit $i = 1, 2, \dots$ über x (Bild 2.4 b). Aus der diskreten Verteilung kann die *diskrete Verteilungsfunktion* $F(x)$ eindeutig nach der Vorschrift

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \tag{2.6}$$

bestimmt werden. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der diskreten Zufallsgröße im Bereich $-\infty, x$ an. Ihre Eigenschaften sind u. a.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = 0; \quad F(+\infty) = 1$
3. $F(x)$ monoton, nichtfallend.

Die Verteilung einer stetigen Zufallsgröße ist als Verteilungsdichte auf der Basis der stetigen Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz \tag{2.7}$$

zu ermitteln, da die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Wertes null ist. Mit Gl. (2.7) gilt für die *stetige Verteilung (sdichte)*

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{2.8}$$

mit $f(x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 1.$

Tafel 2.1. Ausgewählte stetige Verteilungen

| Verteilung | Gestalt | Parameter | Verteilungsgesetz |
|---------------------------------|---------|---|--|
| Normalverteilung | | $-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$ | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($-\infty < x < +\infty$) |
| Exponentialverteilung | | $\lambda > 0$ | $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |
| Gleichmäßige stetige Verteilung | | a, b $a < b$ | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |

Tafel 2.2. Ausgewählte diskrete Verteilungen

| Verteilung | Gestalt | Parameter | Verteilungsgesetz |
|----------------------------------|---------|----------------------------------|--|
| Binomialverteilung | | $n = 1, 2, \dots$ $0 < p < 1$ | $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) |
| Poissonverteilung | | $\lambda > 0$ | $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) |
| Gleichmäßige diskrete Verteilung | | $n = 1, 2, 3, \dots$ | $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) |

In den Tafeln 2.1 und 2.2 sind ausgewählte typische stetige und diskrete Verteilungen dargestellt.

2.2.1.3. Kenngrößen der Verteilung von Zufallsgrößen

Die Verteilung und die Verteilungsfunktion beschreiben das Amplitudenverhalten von Zufallsgrößen vollständig. Die Verteilungsgesetze enthalten einige Parameter, die bereits das gesuchte Verhalten der Zufallsgröße und die Gestalt/Lage der Verteilung beschreiben. Diese Kenngrößen sind *Momente* und aus den Momenten abgeleitete Größen.

Als *normales Moment k-ter Ordnung* wird der Ausdruck

$$\alpha_k = E\{X^k\} \tag{2.9}$$

mit $k = 1, 2, \dots$ und $E\{\dots\} =$ Erwartungswert $\{\dots\}$ bezeichnet. Die Ermittlung für stetige bzw. diskrete Zufallsgrößen erfolgt entsprechend Gl. (2.10):

$$\alpha_k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i, & \text{falls } X \text{ diskret.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Wichtige normale Momente sind

- das erste normale Moment/Erwartungswert μ

$$\alpha_1 = \mu = E\{X\} \tag{2.11}$$

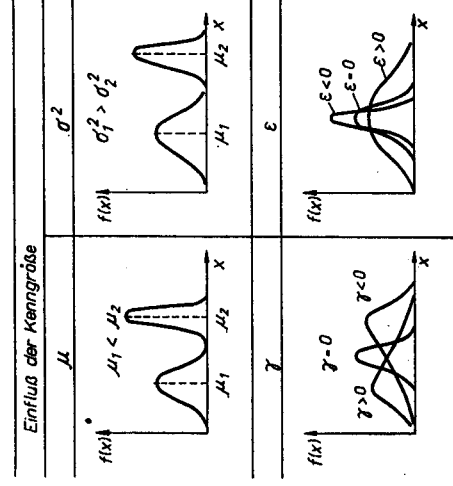
Deutung: Schwerpunkt der Verteilung;

- das zweite normale Moment

$$\alpha_2 = E\{X\}^2 \tag{2.12}$$

Deutung: Varianz der Zufallsgröße, bezogen auf den Nullpunkt (Tafel 2.3).

Tafel 2.3
Einfluß der Momente auf die Gestalt der stetigen Verteilung



Das zentrale Moment k-ter Ordnung wird nach der Vorschrift

$$m_k = E\{(X - \mu)^k\} \text{ mit } k = 1, 2, \dots \tag{2.13}$$

ermittelt. Wesentliche zentrale Momente bzw. abgeleitete Kenngrößen sind

- das zweite zentrale Moment/Varianz σ_x^2

$$m_2 = \sigma_x^2 = E\{(X - \mu)^2\} \tag{2.14}$$

Deutung: Varianz um den Erwartungswert der Zufallsgröße (s. Tafel 2.3). Die positive Wurzel der Varianz wird als Standardabweichung σ_x bezeichnet.

– das dritte zentrale Moment/Schiefe γ

$$\gamma = \frac{m_3}{\sigma^3} \text{ mit } m_3 = E\{(X - \mu)^3\} \quad (2.15)$$

Deutung: Charakterisierung der Symmetrie der Verteilung (s. Tafel 2.3);

– das vierte zentrale Moment/Exzeß ε

$$\varepsilon = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 \text{ mit } m_4 = E\{(X - \mu)^4\} \quad (2.16)$$

Deutung: Maß für die Abweichung der Verteilung von der Normalverteilung in der Umgebung von μ (bei einer Normalverteilung ist $\varepsilon = 0$; s. Tafel 2.3).

2.2.2. Beschreibung mehrdimensionaler Zufallsgrößen

2.2.2.1. Mehrdimensionale Zufallsgrößen und ihre Verteilungen

In der Realität muß häufig der Einfluß von m Zufallsgrößen, die gleichzeitig das Objekt beeinflussen, untersucht werden (s. Darstellungen im Abschn. 1.2).

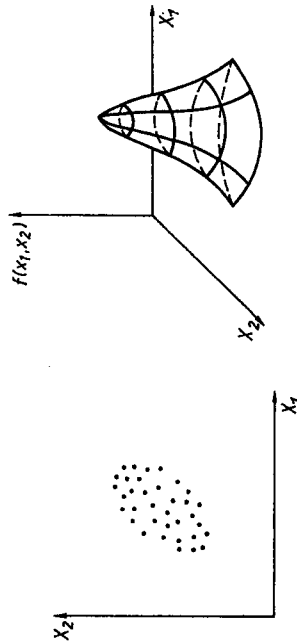


Bild 2.5
Zweidimensionale stetige Verteilung

Die m -dimensionale Zufallsgröße bzw. der Zufallsvektor ergibt sich aus den Werten von m gleichzeitig auftretenden Zufallsgrößen (X_1, \dots, X_m) in einem m -dimensionalen euklidischen Raum. Die entsprechenden Verteilungen werden als m -dimensionale Verteilung bezeichnet. Wie im eindimensionalen Fall wird zwischen stetigen und diskreten Zufallsgrößen unterschieden. Im Rahmen dieses Buches werden nur zweidimensionale Zufallsgrößen (Bild 2.5) betrachtet, da die für sie geltenden Beziehungen leicht auf m -dimensionale Zufallsgrößen übertragen werden können.

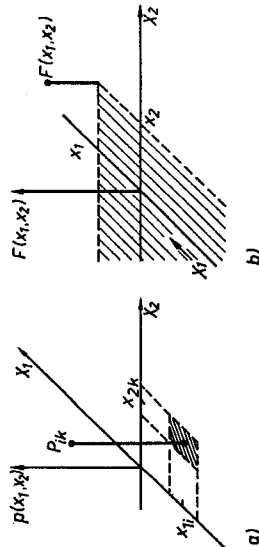


Bild 2.6
Kenngröße: Verbundwahrscheinlichkeit a) und Verteilungsfunktion b) einer zweidimensionalen diskreten Zufallsgröße

Werden die Wertepaare x_{1i}, x_{2k} mit $i, k = 1, 2, \dots$ einer zweidimensionalen diskreten Zufallsgröße (X_1, X_2) und die entsprechenden Verbundwahrscheinlichkeiten

$$P(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2k}) = p_{ik} \quad (2.17)$$

ermittelt (Bild 2.6a), so hat die Verteilungstabelle, die diskrete zweidimensionale Verteilung, die in Tafel 2.4 angegebene Form.

Die diskrete zweidimensionale Verteilungsfunktion lautet entsprechend Gl. (2.17):

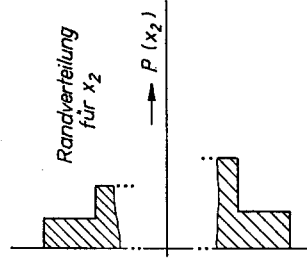
$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l p_{ik} \quad (2.18)$$

mit $i = 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, l$ (Bild 2.6b).

Aus der Verteilungstabelle können mittels Gl. (2.19) die Verteilungen der einzelnen Zufallsgrößen X_1 und X_2 , die diskreten Randverteilungen, berechnet werden (Tafel 2.4).

| | | | |
|----------------------|----------|----------|----------|
| $X_1 \backslash X_2$ | x_{11} | \dots | x_{1l} |
| x_{21} | p_{11} | \dots | p_{1l} |
| \vdots | \vdots | \ddots | \vdots |
| x_{2m} | p_{m1} | \dots | p_{ml} |

Tafel 2.4
Verteilungstabelle und Randverteilung für die diskrete Zufallsgröße X_2



Es gilt

– für die Randverteilung von X_1

$$p(x_{1i}) = \sum_{k=1}^l p(x_{1i}, x_{2k}) \text{ mit } i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.19)$$

– für die Randverteilung von X_2

$$p(x_{2k}) = \sum_{i=1}^r p(x_{2k}, x_{1i}) \text{ mit } k = 1, 2, \dots, l.$$

Wird die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Wertes x_{1i} der Zufallsgröße X_1 unter der Bedingung gesucht, daß die Zufallsgröße X_2 den Wert x_{2k} angenommen hat, so ist der Wert

$$P(X_1 = x_{1i} | X_2 = x_{2k}) = \frac{P(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2k})}{P(X_2 = x_{2k})} = p(x_{1i} | x_{2k}) \quad (2.20)$$

als bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

In Analogie zur Beschreibung eindimensionaler stetiger Zufallsgrößen gilt für die zweidimensionale stetige Verteilung (sichte) (s. Bild 2.4)

$$f(X_1, X_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2.21)$$

Die zweidimensionale stetige Verteilungsfunktion kann nach der Vorschrift

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.22)$$

ermittelt werden.

Als Randverteilungen der stetigen Zufallsgrößen X_1 und X_2 ergeben sich die Randdichten zu

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \quad \text{für } X_1, \\ f(x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \quad \text{für } X_2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.2.2.2. Kenngrößen zweidimensionaler Zufallsgrößen

Wesentliche Kenngrößen zweidimensionaler Zufallsgrößen und ihrer Verteilungen sind die Erwartungswerte, die Kovarianzen und der Korrelationskoeffizient.

Erwartungswerte $E\{\dots\}$

Zwischen den Erwartungswerten der Zufallsgrößen X_1 und X_2 bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} E\{X_1 + X_2\} &= E\{X_1\} + E\{X_2\} \\ E\{\alpha X_1 + \beta X_2\} &= \alpha E\{X_1\} + \beta E\{X_2\} \\ E\{X_1 X_2\} &= E\{X_1\} E\{X_2\} \quad \text{für } X_1 \text{ und } X_2 \text{ unabhängig.} \end{aligned}$$

Varianzen $E\{(\dots)^2\}$

Für die Varianz der Summe der Zufallsgrößen X_1 und X_2 gilt

$$E\{(X_1 + X_2)^2\} = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + 2 \text{cov}\{X_1, X_2\}$$

für X_1 und X_2 abhängig

$$\text{mit } \text{cov}\{X_1, X_2\} = E\{(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\},$$

$$E\{(X_1 + X_2)^2\} = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2$$

für X_1 und X_2 unabhängig.

Kovarianzen, Korrelationskoeffizienten

Sind X_1 und X_2 zwei beliebige Zufallsgrößen, so wird der Ausdruck

$$\text{cov}\{X_1, X_2\} = E\{(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\} \quad (2.24)$$

als *Kovarianz* von X_1 und X_2 bezeichnet. Die Kovarianz ist ein Maß für den mittleren linearen statistischen Zusammenhang zweier Zufallsgrößen. Für ihren Wertebereich gilt

$$-\infty \leq \text{cov}\{X_1, X_2\} \leq +\infty.$$

Ist der Wert der Kovarianz null, hängen X_1 und X_2 linear nicht voneinander ab, d. h., sie sind unabhängig. Das Vorzeichen dieser Kenngröße gibt die Richtung des Zusammenhangs an. Wenn z. B. X_1 wächst und X_2 abnimmt, folgt $\text{cov}\{X_1, X_2\} < 0$.

Die auftretenden Kovarianzen werden in der Kovarianzmatrix $\text{COV}\{X_1, X_2\}$ zusammengefaßt zu

$$\text{COV}\{X_1, X_2\} = \begin{bmatrix} \text{cov}\{X_1, X_1\} & \text{cov}\{X_1, X_2\} \\ \text{cov}\{X_2, X_1\} & \text{cov}\{X_2, X_2\} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

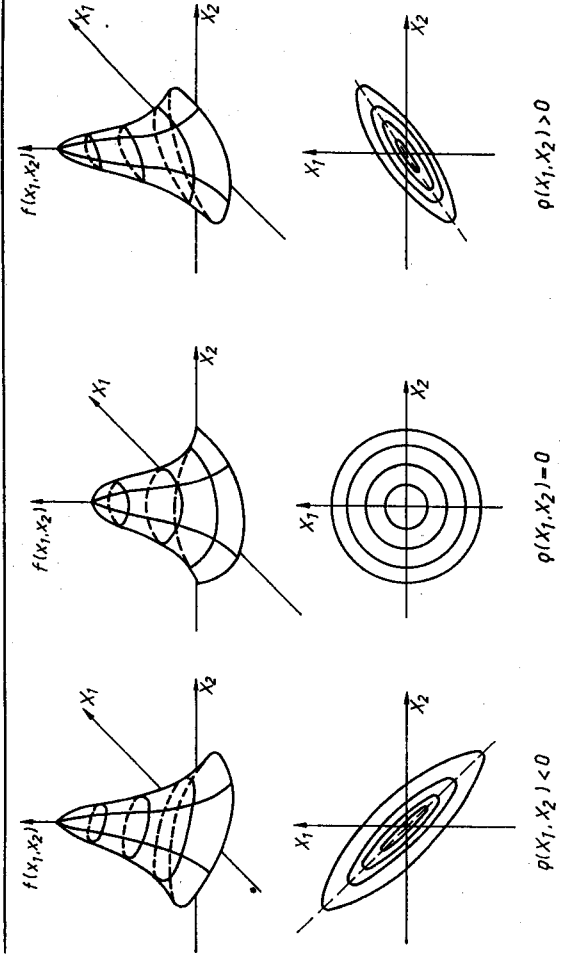
Sie ist immer eine symmetrische Matrix, deren Diagonalelemente die Varianzen der einzelnen Zufallsgrößen darstellen.

Um den Wertebereich der Kovarianz von der Dimension der Zufallsgrößen unabhängig zu machen, wurde der *Korrelationskoeffizient* $\rho(X_1, X_2)$.

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}\{X_1, X_2\}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \quad (2.26)$$

mit dem Wertebereich $-1 \leq \rho(X_1, X_2) \leq +1$ eingeführt.

Tafel 2.5. Stetige zweidimensionale Verteilungen und Wert der Korrelationskoeffizienten



In Tafel 2.5 sind typische Formen einer zweidimensionalen Verteilung und des Korrelationskoeffizienten dargestellt. Als Information enthält er

- die Richtung des Zusammenhangs im Vorzeichen
- die Stärke der Bündelung der Verteilung der Zufallsgrößen um eine Gerade.

Der Korrelationskoeffizient $\rho(X_1, X_2)$ ist eine wichtige Kenngröße für den mittleren linearen statistischen Zusammenhang zweier Zufallsgrößen. Er wird auch als totaler oder einfacher Korrelationskoeffizient bezeichnet.

Vom Korrelationskoeffizienten wird das Bestimmtheitsmaß

$$B(X_1, X_2) = \rho^2(X_1, X_2) \quad (2.27)$$

abgeleitet. Für seinen Wertebereich gilt

$$0 \leq B(X_1, X_2) \leq 1.$$

Wird der statistische Zusammenhang zwischen zwei Zufallsgrößen X_1 und X_2 gesucht, wenn gleichzeitig die Zufallsgrößen X_3, \dots, X_m auftreten, ist entsprechend Bild 2.7 der „echte“ Zusammenhang zwischen X_1 und X_2 zu ermitteln. Der Einfluß über alle anderen Größen wird beseitigt, indem die Zufallsgrößen X_3, \dots, X_m konstant gehalten, d. h. Kennwerte von bedingten m -dimensionalen Verteilungen verwendet werden. Der so ermittelte Koeffizient wird als *partielle Korrelationskoeffizient* $\varrho(X_1, X_2/X_3, \dots, X_m)$ bezeichnet. Er ist durch Gl. (2.28)

$$\varrho(X_1, X_2/X_3, \dots, X_m) = \frac{\text{COV}\{X_1, X_2/X_3, \dots, X_m\}}{\sigma_{X_1/X_2, \dots, X_m} \sigma_{X_2/X_1, X_3, \dots, X_m}}, \quad (2.28)$$

sein Wertebereich durch

$$-1 \leq \varrho(X_1, X_2/X_3, \dots, X_m) \leq +1$$

gegeben. Unter Verwendung der Elemente c_{ij} und c_{ij} der Inversen der Kovarianzmatrix Gl. (2.25)

$$C(X_1, \dots, X_m) = \text{COV}\{X_1, X_2, \dots, X_m\}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{1m} \\ c_{m1} & c_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

kann der partielle Korrelationskoeffizient nach der Vorschrift

$$\varrho(X_i, X_j/\dots) = -\frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} \quad (2.30)$$

ermittelt werden.

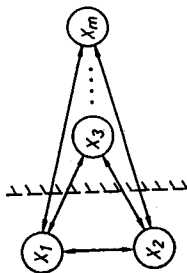


Bild 2.7
Mögliche Zusammenhänge
der Zufallsgröße $X_1 \dots X_m$

Das *partielle Bestimmtheitsmaß* ist dann gegeben als

$$B(X_i, X_j/\dots) = \varrho^2(X_i, X_j/\dots).$$

Den Zusammenhang zwischen einer Zufallsgröße X_1 und einer Gruppe von Zufallsgrößen $X_2 \dots X_m$ gibt der *multiple Korrelationskoeffizient* $\varrho(X_1; X_2 \dots X_m)$ an. Er wird nach der Beziehung

$$\varrho(X_1; X_2 \dots X_m) = +\sqrt{1 - \frac{\sigma_{X_1/X_2, \dots, X_m}^2}{\sigma_{X_1}^2}} \quad (2.31)$$

ermittelt. Der Wertebereich ist

$$0 \leq \varrho(X_1; X_2 \dots X_m) \leq 1.$$

In Gl. (2.31) bedeutet $\sigma_{X_1/X_2, \dots, X_m}^2$ die Varianz von X_1 in der bedingten Verteilung $X_1/X_2, \dots, X_m$ und $\sigma_{X_1}^2$ die Varianz von X_1 . Unter Verwendung der Elemente der inversen Kovarianzmatrix kann die multiple Korrelation entsprechend

$$\varrho(X_i; X_1 \dots X_m) = +\sqrt{1 - \frac{1}{c_{ii}^2 c_{ii}}} \quad (2.32)$$

ermittelt werden.

Das *multiple Bestimmtheitsmaß* ist gleich dem Quadrat des multiplen Korrelationskoeffizienten

$$B(X_1; X_1 \dots X_m) = \varrho^2(X_1; X_1 \dots X_m).$$

Für einen m -dimensionalen Zufallsvektor erhält man bei Ermittlung aller Zusammenhänge die *Korrelationsmatrix* R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_{12} & \dots & \varrho_{1m} \\ \varrho_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Die Matrix der totalen und partiellen Korrelationskoeffizienten wird u. a. zur Ermittlung der Modellstruktur verwendet.

2.3. Elemente der mathematischen Statistik

2.3.1. Ausgewählte Stichprobenfunktionen und ihre Verteilungen

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird von der vollständigen Information über die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der betrachteten Zufallsgrößen ausgegangen. Bei den Methoden der Statistik wird angenommen, daß keine oder nur eine unvollständige Information über die Verteilungen oder deren Parameter vorliegen. Aus einer Menge von n Realisierungen aus der Grundgesamtheit, die als *konkrete Stichprobe* vom Umfang n bezeichnet wird, wird die *Stichprobenfunktion*

$$\varphi = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.34)$$

gebildet. Bekannte wichtige Stichprobenfunktionen sind

$$\varphi_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \quad (\text{Stichprobenmittel}),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2 \quad (\text{Stichprobenvarianz}).$$

Die Stichprobenfunktionen sind ebenfalls Zufallsgrößen, weil die konkrete Stichprobe Zufallsgrößen entnommen wird. Damit haben die Stichprobenfunktionen Verteilungen, die als *Stichprobenverteilungen* bezeichnet werden.

Wenn die Stichprobe einer normalverteilten Zufallsgröße, deren Werte außerdem unabhängig voneinander sind, entnommen wird, ist die Verteilung des Stichprobenmittels \bar{x} eine Normalverteilung mit den Parametern

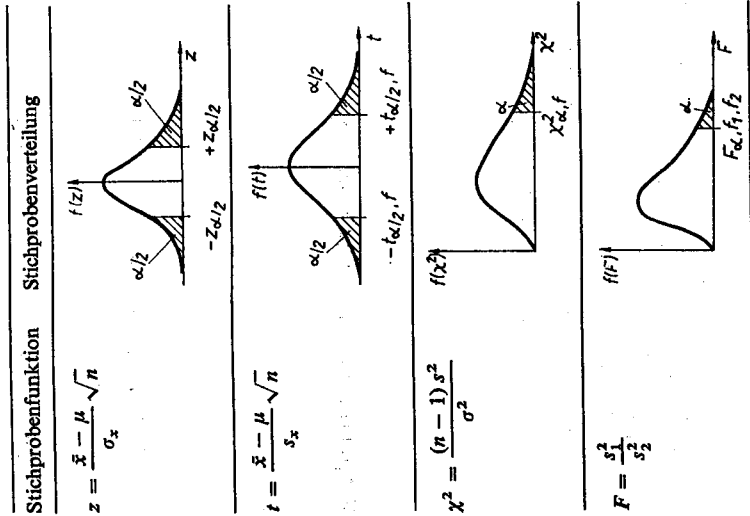
$$E\{\bar{x}\} = \mu \quad \text{und} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{n}.$$

Häufig wird die normierte Stichprobenfunktion

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_x} \sqrt{n} \quad (2.35)$$

verwendet, die ebenfalls normalverteilt (Tafel 2.6) mit den Parametern $E\{z\} = 0$ und $\sigma_z = 1$ ist.

Tafel 2.6
Ausgewählte Stichprobenfunktionen
und ihre Verteilungen



In Tafel A.1 des Anhangs sind ausgewählte Werte der normierten Normalverteilung, aus denen bei Vorgabe der Werte von α die Größen $z_{\alpha/2}$ zu entnehmen sind, dargestellt. Die in die Stichprobenverteilung eingetragenen Vertrauensgrenzen $-z_{\alpha/2}$ und $+z_{\alpha/2}$ ergeben sich aus der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $P = 1 - \alpha$ für das mögliche Eintreten von μ in diesem Bereich (Konfidenzintervall). Die Größe α wird als *Irrtumswahrscheinlichkeit* bezeichnet. Damit gilt

$$P(\bar{x} - \Delta x < \mu < \bar{x} + \Delta x) = P(|x - \mu| < \Delta x) = 1 - \alpha. \quad (2.36)$$

Ist die Varianz σ_x^2 nicht bekannt und muß sie durch die Varianz der Stichprobenwerte s_x^2 ersetzt werden, ergibt sich aus Gl. (2.35) die Stichprobenfunktion

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x} \sqrt{n}. \quad (2.37)$$

Die Stichprobenfunktion t unterliegt für eine Stichprobe aus einer normalverteilten Zufallsgröße einer *Student-Verteilung/t-Verteilung* (s. Tafel 2.6). In Tafel A.2 des Anhangs sind die Werte der t -Verteilung als Funktion der Irrtumswahrscheinlichkeit α und des Freiheitsgrads $f = n - 1$ aufgetragen. Als normierte Stichprobenfunktion für die Varianz wird

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad (2.38)$$

verwendet. Die Verteilung der Zufallsgröße χ^2 ist die *Chi-Quadrat-Verteilung*/ χ^2 -Verteilung (s. Tafel 2.6). Ihre Werte sind in Abhängigkeit von der Irrtumswahrscheinlichkeit α und dem Freiheitsgrad $f = n - 1$ in Tafel A.3 dargestellt.

Als zweite Stichprobenverteilung, die auf der Streuung von Stichproben basiert, ist die *Fishersche Verteilung/f-Verteilung* entwickelt worden. Werden von zwei unabhängigen normalverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2 Stichproben im Umfang n_1 und n_2 mit den Streuungen s_1^2 und s_2^2 entnommen, so hat die Stichprobenfunktion

$$F = \frac{s_1^2/s_2^2}{s_1^2} \text{ mit } s_1^2 > s_2^2 \quad (2.39)$$

eine *F-Verteilung* mit den Freiheitsgraden $f_1 = n_1 - 1$ und $f_2 = n_2 - 1$ (s. Tafel 2.6). Ausgewählte Werte der Verteilung sind für die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ in Tafel A.4 dargestellt.

Auf die Anwendung der genannten Stichprobenverteilungen zur Überprüfung von Hypothesen und zur Ableitung von Konfidenzintervallen wird in den Abschnitten 2.3.2 und 2.3.3. näher eingegangen.

2.3.2. Empirische Ermittlung von Verteilungen und Kenngrößen von Zufallsgrößen

In diesem Abschnitt soll auf Probleme der empirischen Ermittlung von Verteilungen und Kenngrößen von Zufallsgrößen eingegangen werden. Es wird vorausgesetzt, daß für

a) diskrete Zufallsgrößen die Realisierungen

$$\{x_{11}, \dots, x_{1n}; x_{21}, \dots, x_{2n}; \dots\},$$

b) stetige Zufallsgrößen die Realisierungen über ein Beobachtungsintervall

$$-T_0 \leq t \leq +T_0$$

vorliegen.

Kenngrößen/Momente

Auf der Basis dieser Beobachtungen (Stichprobe) können die in Tafel 2.7 angegebenen Kenngrößen und Momente eindimensionaler Zufallsgrößen ermittelt werden.

Tafel 2.7. Empirische Kenngrößen und Momente eindimensionaler Zufallsgrößen

| Kenngröße | Diskrete Zufallsgröße | Stetige Zufallsgröße |
|-------------------------------|--|---|
| Variationsbreite R | $R = x(t)_{\max} - x(t)_{\min}$ | |
| Variationskoeffizient V | $V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$ | |
| Mittelwert \bar{x} | $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ | $\bar{x} = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) dt$ |
| Quadr. Mittelwert \bar{x}^2 | $\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ | $\bar{x}^2 = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t)^2 dt$ |
| Varianz/Streuung s^2 | $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ | $s^2 = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} [x(t) - \bar{x}]^2 dt$ |

Verteilung/Verteilungsfunktion

Die empirische Verteilungsdichte $f(x)$ einer stetigen Zufallsgröße kann auf der Grundlage der Bestimmung der Auftretenswahrscheinlichkeit der Zufallsgröße

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) \tag{2.40}$$

im Bereich Δx über die Beziehung

$$f(x) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \tag{2.41}$$

ermittelt werden; s. Gl. (2.8). Über eine Bewertung des Amplitudenfensters Δx (Bild 2.8) mit der Funktion

$$B(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq x(t) < x + \Delta x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.42}$$

wird die Auftretenswahrscheinlichkeit im Bereich Δx bestimmt aus

$$E\{B(t)\} = P\{x \leq x(t) < x + \Delta x\} \approx \Delta F(x). \tag{2.43}$$

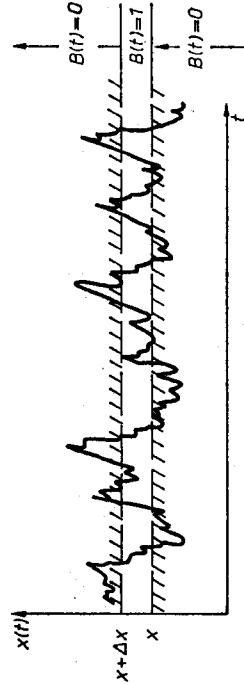


Bild 2.8
Signalverlauf
und seine Bewertung
zur Ermittlung
der stetigen
Verteilungsdichte

Mit Gl. (2.41) ergibt sich aus Gl. (2.43) die Ermittlungsvorschrift für die empirische Verteilungsdichte $f(x)$ für das Amplitudenfenster Δx zu

$$f(x) = \frac{E\{B(t)\}}{\Delta x}. \tag{2.44}$$

Die Rechenschaltung für einen Analogrechner (ohne Phasendrehung der Elemente) und die Signalverläufe sind im Bild 2.9 dargestellt. Sie dient im Rahmen dieses Buches mehr zum Verständnis der Verteilungsdichte $f(x)$ als zu ihrem echten Ermittlung, da die analoge Rechentechnik kaum für diesen Zweck eingesetzt wird.

Die empirische diskrete Verteilung kann auf der Grundlage der Stichprobe auf zwei Wegen ermittelt werden.

Weg 1. Exakte Ermittlung der Häufigkeitsverteilung in folgenden Schritten:

- Zuordnung der n_i zu den x_i
 - Berechnung der $H_R(x_i) = n_i/n$
 - Auftragen der $H_R(x_i)$ über x .
- Weg 2. Näherungsweise Ermittlung der Häufigkeitsverteilung in folgenden Schritten:
- Bestimmung der Klassenanzahl n_k ,

a) $n_k = 1 + 3,2 \lg n$
 b) $n_k = \sqrt{n}$ (2.45)

- Bestimmung der Klassenbreite

$$\Delta = \frac{x(t) \max - x(t) \min}{n_k}$$

- Ermittlung der Anzahl der Beobachtungen n_m , die zur m -ten Klasse gehören,
- Berechnung der Häufigkeiten $H_{m,m} = n_m/n$,
- Ermittlung des Mittelpunktes zweier benachbarter Klassen

$$x_m^* = \frac{x_{m-1} + x_m}{2},$$

- Auftragen der $H_{m,m}$ über x_m^*

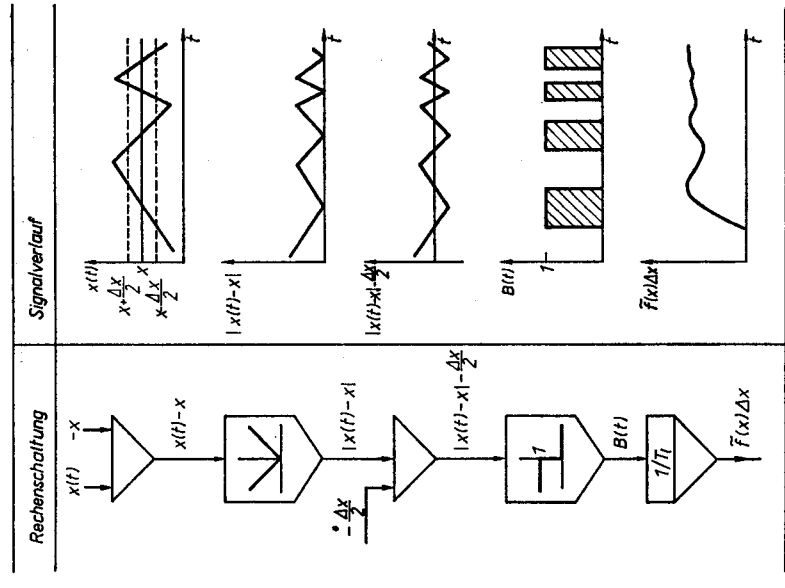


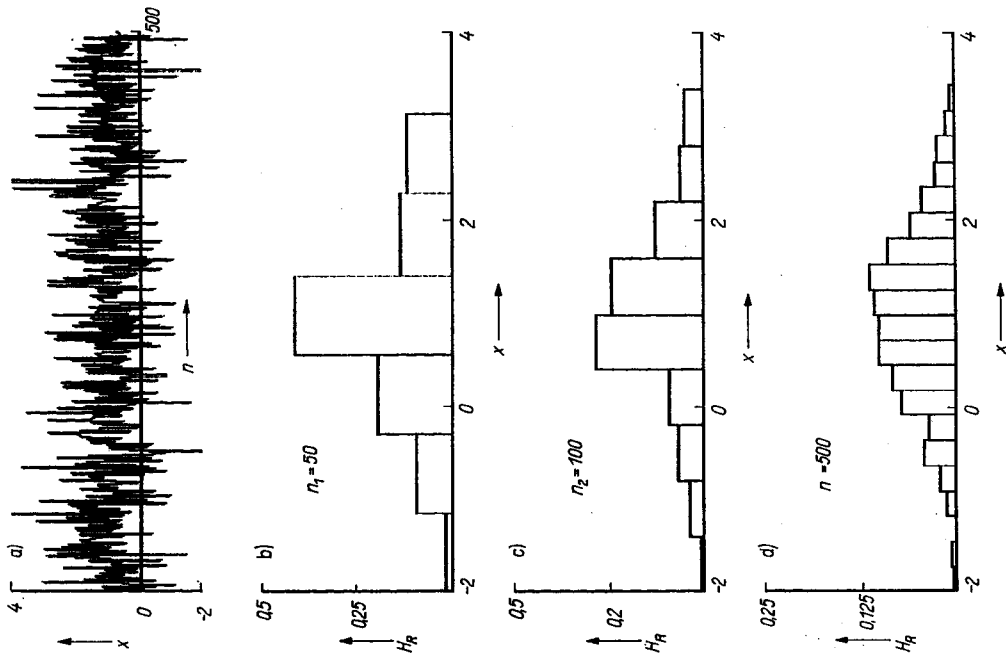
Bild 2.9
Analogrechenschaltung
und Signalverlauf zur Ermittlung
der stetigen Verteilungsdichte

Die näherungsweise Ermittlung der Häufigkeitsverteilung ist vor allem bei geringem Stichprobenumfang und/oder für die notwendigen Grobabschätzungen sinnvoll. Die in Gl. (2.45) angegebenen Beziehungen zur Bestimmung der Klassenanzahl sind heuristisch gefunden worden und gehen davon aus, daß die Anzahl der Klassen mindestens 1 ist (d. h. Gleichverteilung) sowie mit Zunahme der Beobachtungen nicht mehr proportional zunimmt.

Im Beispiel 2.1 ist die näherungsweise Ermittlung der Verteilung einer normalverteilten Zufallsgröße als Funktion des Stichprobenumfangs dargestellt.

| | |
|--------------|--|
| Beispiel 2.1 | Empirische Bestimmung der Verteilung einer normalverteilten Zufallsgröße |
|--------------|--|

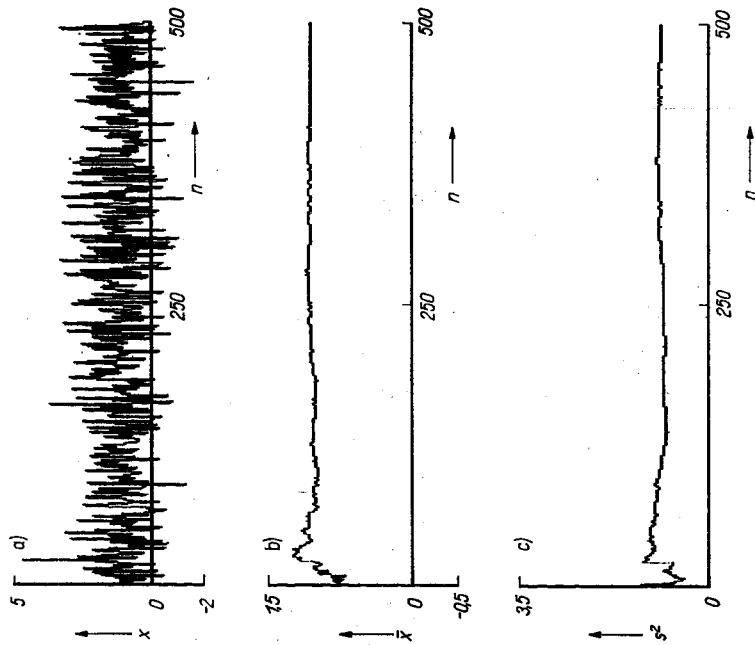
Gegeben: $X \cong NV(1, 1)$, unkorreliert, $n_{\max} = 500$ Beobachtungen.
Gesucht: Empirische Verteilungen für die Stichprobenumfänge $n_1 = 50, n_2 = 100, n_3 = 500$ auf der Grundlage der Klassenanzahl $n_k = \sqrt{n}$.
Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 2.1.



Die Ergebnisse zeigen, daß
 1. das Verteilungsgesetz erst mit wachsender Zahl von Beobachtungen erkennbar ist,
 2. die näherungsweise Bestimmung eine sehr leistungsfähige Methode darstellt.

| | |
|--------------|---|
| Beispiel 2.2 | Empirische Bestimmung der Momente einer normalverteilten Zufallsgröße |
|--------------|---|

Gegeben: $X \cong NV(1, 1)$, unkorreliert, $n_{\max} = 500$ Beobachtungen.
Gesucht: Konvergenzverhalten der empirischen Momente \bar{x} und s^2 in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n .
Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 2.2.



Die dargestellten Resultate zeigen, daß

1. die Güte der Schätzung der Momente stark vom Stichprobenumfang abhängt,
2. für hinreichend große Stichproben die empirischen Momente der Stichprobe sich gut den Momenten der Grundgesamtheit nähern.

Das Konvergenzverhalten der Momente \bar{x} und s^2 bei ihrer empirischen Ermittlung in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang ist im Beispiel 2.2 aufgezeigt.
 Die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}(x)$ einer stetigen Zufallsgröße wird auf der Grundlage der Beobachtungen im Intervall $-T_0 \leq t \leq +T_0$ nach der Vorschrift

$$\hat{F}(x) \approx P \{x(t) < x\} = \int_{-\infty}^x f(z) dz \quad (2.46)$$

realisiert. Über eine Bewertungsfunktion $B(t)$ mit den Eigenschaften

$$B(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x(t) < x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird der Amplitudenbereich $-\infty < x(t) < x$ aus der Zufallsgröße $x(t)$ herausgeschnitten (Bild 2.10). Die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}(x)$ kann dann aus der Mittelwertbildung der Bewertungsfunktion $B(t)$ nach Gl. (2.47) zu

$$E\{B(t)\} = P\{x(t) < x\} \approx \hat{F}(x) \quad (2.47)$$

bestimmt werden.

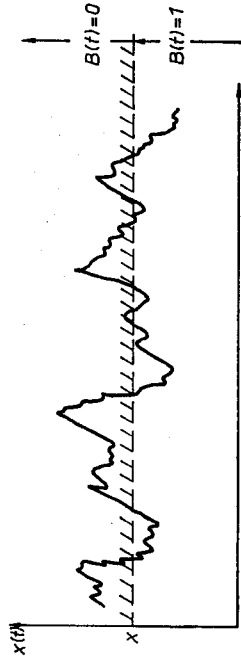


Bild 2.10
Signalverlauf
und seine Bewertung
zur Ermittlung
der stetigen
Verteilungsfunktion

Die Rechenschaltung für einen Analogrechner (ohne Phasendrehung der Elemente um 180°C) und die entsprechenden Signalverläufe sind im Bild 2.11 dargestellt.

Die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}(x)$ einer diskreten Zufallsgröße ergibt sich aus der Häufigkeitsverteilung durch die Beziehung

$$\hat{F}(x) = \sum H_T(x_i), \quad x_i < x. \quad (2.48)$$

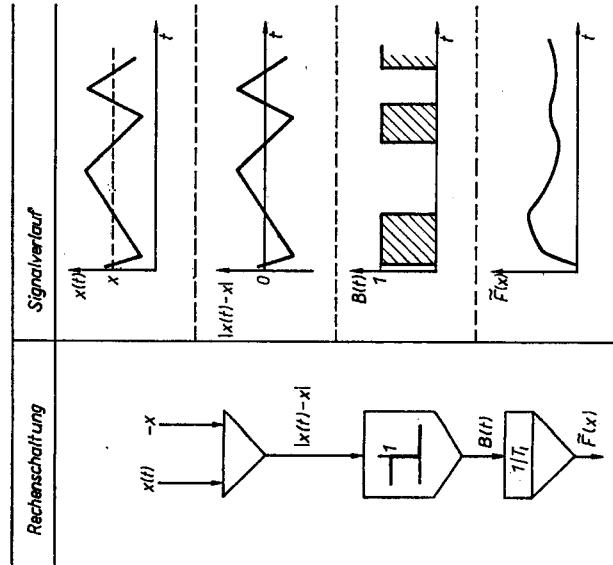


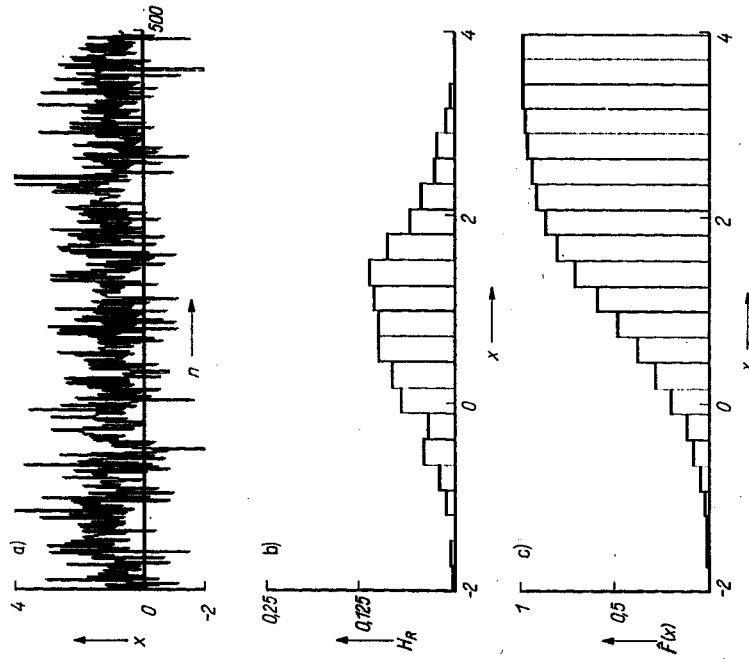
Bild 2.11
Analogrechenschaltung
und Signalverlauf
zur Ermittlung
der stetigen
Verteilungsfunktion

Beispiel 2.3 Empirische Ermittlung der Verteilung und der Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße

Gegeben: $X \in NV(1, 1)$, unkorreliert, $n_{\max} = 500$ Beobachtungen.

Gesucht: Empirische Verteilung und Verteilungsfunktion für $n = 500$ und die Klassenanzahl $n_k = \sqrt{n}$.

Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 2.3.



Die Berechnungen zeigen, daß

1. das Verteilungsgesetz sehr gut erkennbar ist,
2. die Verteilungsfunktion auch unter Verwendung des Näherungsverfahrens gut aus der empirischen Verteilungsfunktion ermittelt werden kann.

Für eine normalverteilte Zufallsgröße ist im Beispiel 2.3 die empirische Verteilung und ihre Verteilungsfunktion dargestellt.

Korrelationskoeffizienten

Für den einfachen empirischen Korrelationskoeffizienten erhält man entsprechend Gl. (2.26) für den Stichprobenumfang n die Beziehung

$$\hat{\rho}(X_1, X_2) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}} \quad (2.49)$$

Das Bestimmtheitsmaß ergibt sich dann aus Gl. (2.49) zu

$$\hat{B}(X_1, X_2) = \hat{\rho}^2(X_1, X_2). \quad (2.50)$$

Unter Verwendung der inversen empirischen Kovarianzmatrix entsprechend Gl. (2.29)

$$\hat{C}(X_1, X_2, \dots, X_m) = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \dots & \hat{c}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{c}_{m1} & \dots & \hat{c}_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

gilt für den empirischen partiellen Korrelationskoeffizienten entsprechend Gl. (2.30)

$$\hat{\rho}(X_i, X_j, \dots) = -\frac{\hat{c}_{ij}}{\sqrt{\hat{c}_{ii} \hat{c}_{jj}}} \quad (2.52)$$

In Analogie zu Gl. (2.32) gilt für den empirischen multiplen Korrelationskoeffizienten

$$\hat{\rho}(X_i; X_1 \dots X_m) = +\sqrt{1 - \frac{1}{s_i^2 \hat{c}_{ii}}} \quad (2.53)$$

Die empirische Korrelationsmatrix \hat{R} ergibt sich bei einem Stichprobenumfang von n aus den Korrelationskoeffizienten - Gl. (2.49) oder Gl. (2.52) - zu

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_{12} & \dots & \hat{\rho}_{1m} \\ \hat{\rho}_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \hat{\rho}_{m1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Die Signalverläufe von drei korrelierten Zufallsgrößen und die aus einer Stichprobe von $n = 500$ berechneten einfachen und partiellen Korrelationskoeffizienten sind im Beispiel 2.4 für einen Testfall dargestellt.

Auf der Grundlage der aus der Stichprobe erhaltenen Information in Form der empirischen Kenngrößen und Verteilungen muß nun ein Weg gefunden werden, Aussagen über das Gesamtverhalten der Zufallsgrößen abzuleiten. Dabei sind grundsätzlich die folgenden Aufgabenstellungen möglich:

1. Zu prüfen ist, ob Annahmen/Hypothesen über den Typ oder die Momente der Verteilung der Grundgesamtheit mit der aus der Stichprobe entnommenen Information vereinbar sind - *Prüfen von Hypothesen*.
2. Für einen a priori bekannten Verteilungstyp der Grundgesamtheit sind auf der Grundlage der konkreten Stichprobe Bereiche (Konfidenzintervalle) für die unbekanntesten Momente dieser Verteilung zu schätzen - *Schätzen von Bereichen der Momente der Grundgesamtheit*.

Empirische Berechnung von Korrelationskoeffizienten

Beispiel 2.4

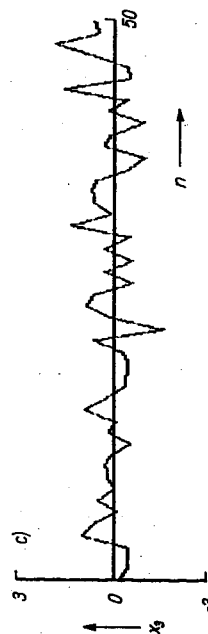
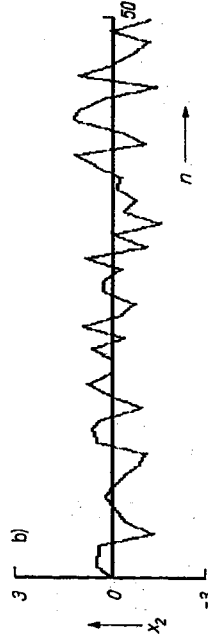
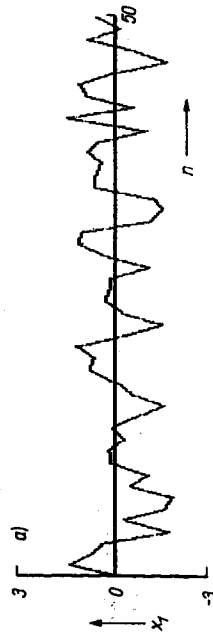
Gegeben:

$$\begin{aligned} X_1 &\cong NV(0, 1), \text{ unkorreliert,} \\ X_2 &= -0,8X_1 + 0,2 \{NV(0, 1)\}, \\ X_3 &= +0,3X_1 - 0,3X_2 + 0,4 \{NV(0, 1)\}, \\ n_{\max} &= 500 \text{ Beobachtungen.} \end{aligned}$$

Gesucht: Einfache und partielle Korrelationskoeffizienten und die Signalverläufe von X_1, X_2 und X_3 .

Ergebnis:

1. Signalverläufe der Zufallsgrößen
Siehe Bild zu Beispiel 2.4.



2. Matrizen der Korrelationskoeffizienten

- Matrix der einfachen Korrelationskoeffizienten,

| | X_1 | X_2 | X_3 |
|-------|-------|--------|--------|
| X_1 | 1 | -0,962 | 0,774 |
| X_2 | | 1 | -0,770 |
| X_3 | | | 1 |

- Matrix der partiellen Korrelationskoeffizienten.

| | X_1 | X_2 | X_3 |
|-------|-------|--------|--------|
| X_1 | 1 | -0,925 | 0,172 |
| X_2 | | 1 | -0,130 |
| X_3 | | | 1 |

| | |
|-----------------|---|
| Beispiel 2.4 | Empirische Berechnung von Korrelationskoeffizienten |
|-----------------|---|

Der Testfall zeigt, daß

1. die einfachen Korrelationskoeffizienten Zusammenhänge teilweise sehr verfälscht darstellen können (z.B. X_1 , X_2 oder X_2 , X_3),
2. die partiellen Korrelationskoeffizienten den Anteil des Einflusses anderer Zufallsgrößen sehr gut nachbilden (sowohl die Richtung als auch die Stärke des Zusammenhangs sind deutlich erkennbar),
3. die Richtung des Zusammenhangs teilweise auch schon aus dem Verlauf der Signale erkannt werden kann.
4. Die Korrelationskoeffizienten sind mit 95% gesichert, da der kritische Korrelationskoeffizient, siehe Anhang A.6, den Wert 0,088 besitzt, d.h., die linearen Zusammenhänge werden alle wiedererkannt.

In den folgenden Abschnitten werden ausgewählte Prüf- und Schätzverfahren für normalverteilte Zufallsgrößen vorgestellt. Auf verteilungsfreie Verfahren muß aus Platzgründen verzichtet werden.

2.3.3. Statistische Prüfverfahren

Die aus der Grundgesamtheit entnommene konkrete Stichprobe enthält bekanntlich unvollständige Informationen über die Verteilung der Grundgesamtheit und über ihre Momente. Diese unvollständigen Informationen werden nun benutzt, um in Verbindung mit einer gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit α eine Entscheidung über statistische Hypothesen H zur Verteilung oder deren Momente zu treffen. Die Prüfung der Hypothesen wird mittels *statistischer Prüfverfahren*, auch *statistische Tests* genannt, durchgeführt. Dabei wird die Hypothese H als *Nullhypothese* H_0 bezeichnet, wenn weitere Hypothesen, die *Alternativhypothesen* genannt werden, aufgestellt werden können. Für die Entscheidung über die Nullhypothese H_0 werden die normierten Stichprobenfunktionen Gl. (2.35) und Gl. (2.37) bis (2.39) aus Abschnitt 2.3.1 mit jeweils eingesetzter Hypothese verwendet. Die sich dann ergebenden Zufallsgrößen werden als *Prüfgrößen* bzw. *Testgrößen* (z , t , χ^2 , F) bezeichnet. Die Prüfung der Hypothese H_0 für eine Stichprobenfunktion kann nach folgendem allgemeinem Schema erfolgen:

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit α
3. Ermittlung des Ablehnungsbereichs für die Nullhypothese für α (s. Tafel 2.6, Bilder 2.12 bis 2.14)
4. Berechnung der Prüfgröße auf der Grundlage der Stichprobe
5. Entscheidung über Nullhypothese H_0 durch Vergleich der Prüfgröße mit den Werten des Ablehnungsbereichs.

Es gibt sehr viele Möglichkeiten zur Festlegung eines Ablehnungsbereichs (kritischer Bereich) bei einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit. Für die Praxis haben sich die sog. zweiseitige und die einseitige Fragestellung als wichtig erwiesen. Bei einer zweiseitigen Fragestellung wird davon ausgegangen, daß der kritische Bereich für die Hypothese H_0 mit jeweils einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha/2$ ermittelt wird. Im Bild 2.12 ist dies für eine Testgröße $NV(0; 1)$ dargestellt. Bei einer einseitigen Fragestellung wird der kritische Bereich für eine symmetrisch verteilte Prüfgröße auf der linken oder rechten

Seite mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α betrachtet. Dieser Sachverhalt wird im Bild 2.13 gezeigt.

Im folgenden werden wichtige Prüfverfahren für die Momente Erwartungswert und Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit vorgestellt.

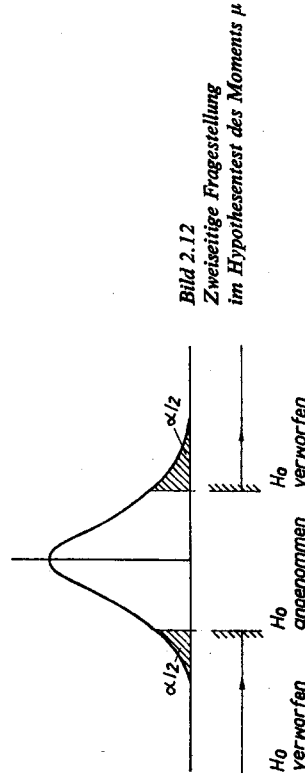


Bild 2.12
Zweiseitige Fragestellung
im Hypothesentest des Moments μ

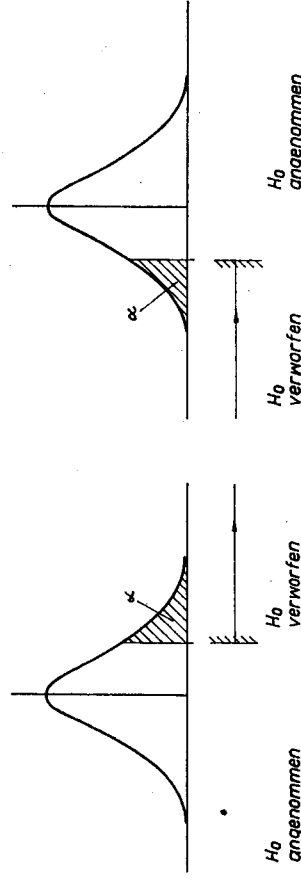


Bild 2.13. Einseitige Fragestellungen im Hypothesentest des Moments μ

Prüfung des Erwartungswerts μ bei bekannter Varianz σ^2 der Grundgesamtheit

Bei diesem Test soll geprüft werden, ob der unbekannte Erwartungswert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz σ^2 einen bestimmten Wert μ_0 besitzt. Der Test (z -Test) erfolgt entsprechend der allgemeinen Strategie in folgenden Schritten:

1. Aufstellen der Hypothese $H_0: \mu = \mu_0$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit α
3. Berechnung der Prüfgröße aus Gl. (2.35)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \quad (2.55)$$

4. Ermittlung der Grenzen $\pm z_{\alpha/2}$ des kritischen Bereichs aus der Normalverteilung (Tafel A1)
5. Entscheidung

– zweiseitige Fragestellung

$$|z| \geq z_{\alpha/2} \quad H_0 \text{ wird abgelehnt}$$

$$|z| < z_{\alpha/2} \quad H_0 \text{ wird angenommen}$$

- einseitige Fragestellung

- $z \geq z_\alpha$ bzw. $z \leq -z_\alpha$ H_0 wird abgelehnt
 $z < z_\alpha$ bzw. $z > -z_\alpha$ H_0 wird angenommen.

Wird die Hypothese H_0 angenommen, bedeutet dies, daß die Abweichung zwischen dem Stichprobenmittelwert \bar{x} und der Hypothese $H_0: \mu = \mu_0$ nur zufällig ist. Im anderen Fall ist die auftretende Abweichung signifikant.

Prüfung des Erwartungswerts μ bei unbekannter Varianz σ^2 der Grundgesamtheit

Geprüft werden soll, ob der unbekannt erwartungswert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz σ^2 einen bestimmten Wert μ_0 besitzt. Unbekannt sind damit die Kenngrößen μ und σ^2 . Der Test (t -Test) für diesen Fall erfolgt in folgenden Schritten:

1. Aufstellen der Hypothese $H_0: \mu = \mu_0$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit α
3. Berechnung der Prüfgröße aus Gl. (2.37)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} \quad (2.56)$$

4. Ermittlung des kritischen Bereichs mit seinen Grenzen $\pm t_{\alpha/2, f}$ aus der Student-Verteilung (Tafel A.2)
5. Entscheidung

- zweiseitige Fragestellung

- $|t| \geq t_{\alpha/2, f}$ H_0 wird abgelehnt
 $|t| < t_{\alpha/2, f}$ H_0 wird angenommen
 - einseitige Fragestellung
 $t \geq t_{\alpha, f}$ bzw. $t \leq -t_{\alpha, f}$ H_0 wird abgelehnt
 $t < t_{\alpha, f}$ bzw. $t > -t_{\alpha, f}$ H_0 wird angenommen.

Prüfung der Varianz σ^2

Bei diesem Test soll geprüft werden, ob die unbekannt Varianz σ^2 einer normalverteilten Grundgesamtheit einen bestimmten Wert σ_0^2 besitzt. Als Stichprobenfunktion wird die Größe χ^2 von Gl. (2.38) verwendet. Da die χ^2 -Verteilung (s. Tafel 2.6) eine einseitige Verteilung ist, kann eine zweiseitige Fragestellung nicht ohne eine Umformung des Testes beantwortet werden. Grundlage der zweiseitigen Betrachtung ist die Verteilung der Irrtumswahrscheinlichkeit zu je der Hälfte in den Bereich kleinerer und größerer Varianzen (Bild 2.14). Folglich gilt mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\alpha/2: \quad \sigma^2 > (n-1) s^2 / \chi_{\alpha/2, f}^2$$

$$1 - \alpha/2: \quad \sigma^2 > (n-1) s^2 / \chi_{1-\alpha/2, f}^2$$

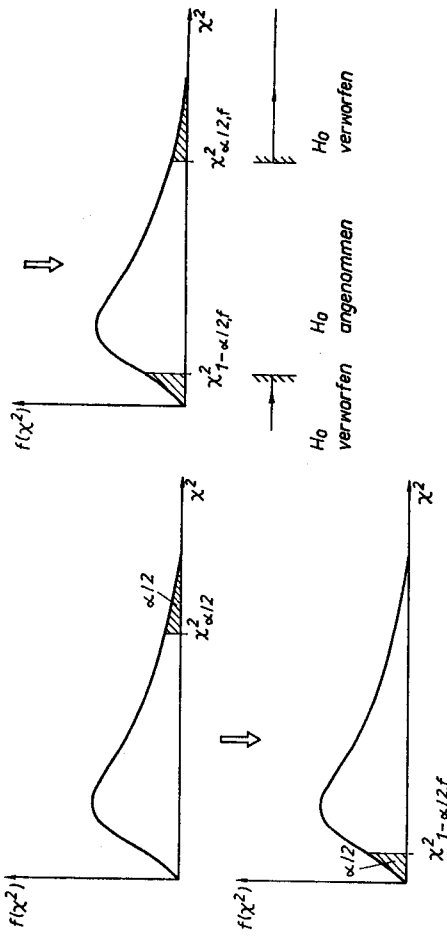


Bild 2.14. Einseitige und zweiseitige Fragestellung im Hypothesentest des Moments σ^2

Für den Bereich, in dem die Hypothese H_0 bei einer zweiseitigen Fragestellung angenommen wird, gilt dann

$$\chi_{1-\alpha/2, f}^2 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2, f}^2. \quad (2.57)$$

Der gesamte Test (χ^2 -Test) kann in folgenden Schritten vorgenommen werden:

1. Aufstellen der Hypothese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit α
3. Berechnung der Prüfgröße χ^2 aus Gl. (2.38)

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \quad (2.58)$$

4. Ermittlung der Testwerte $\chi_{\alpha, f}^2$ bzw. $\chi_{1-\alpha/2, f}^2$ und $\chi_{\alpha/2, f}^2$ aus der χ^2 -Verteilung (siehe Tafel A.3)

5. Entscheidung

- zweiseitige Fragestellung

$$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2, f}^2 \quad \text{und} \quad \chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2, f}^2 \quad H_0 \text{ wird abgelehnt}$$

$$\chi_{1-\alpha/2, f}^2 < \chi^2 < \chi_{\alpha/2, f}^2 \quad H_0 \text{ wird angenommen}$$

- einseitige Fragestellung:

$$\chi^2 \geq \chi_{\alpha, f}^2 \quad H_0 \text{ wird abgelehnt}$$

$$\chi^2 < \chi_{\alpha, f}^2 \quad H_0 \text{ wird angenommen.}$$

Prüfung der Gleichheit zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten X_1 und X_2

Zu prüfen ist, ob die Varianz σ_1^2 einer normalverteilten Grundgesamtheit X_1 gleich der Varianz σ_2^2 einer normalverteilten Grundgesamtheit X_2 ist.

5. Entscheidung

$$|t| \geq t_{\alpha/2, f} \quad H_0 \text{ wird abgelehnt}$$

$$|t| < t_{\alpha/2, f} \quad H_0 \text{ wird angenommen.}$$

Aus der Beziehung $|t| = t_{\alpha/2, f}$ kann für eine vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit α und einen Freiheitsgrad $f = m - 2$ der *kritische Korrelationskoeffizient* $\rho(X_1, X_2)/\text{krit}$ ermittelt werden, für den die Nullhypothese gerade abgelehnt wird. In Tafel A.6 ist für ein α von 1 und 5% für verschiedene Freiheitsgrade dieser kritische Korrelationskoeffizient dargestellt. Der empirische Korrelationskoeffizient $\hat{\rho}(X_1, X_2)$ ist statistisch ungleich null, wenn

$$|\hat{\rho}(X_1, X_2)| > \rho(X_1, X_2)/\text{krit.} \quad (2.63)$$

2.3.4. Schätzung von Konfidenzintervallen

Bei der Schätzung eines Intervalls mit den Grenzen G_u und G_o ($G_u < G_o$) für den unbekannt Parameter der Grundgesamtheit (μ oder σ^2) auf der Grundlage einer Stichprobe wird davon ausgegangen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der unbekannt Parameter in diesem Bereich

$$P(G_u < \mu, \sigma^2 < G_o) = 1 - \alpha \quad (2.64)$$

ist. Die Werte G_u und G_o werden als *Konfidenzgrenzen* (Vertrauensgrenzen), der Bereich G_u, G_o als *Konfidenzintervall* (Vertrauensintervall) und α als Irrtumswahrscheinlichkeit bezeichnet. Auf der Basis der in den Abschnitten 2.3.2 und 2.3.3 vereinbarten normierten Stichprobenfunktionen und festgelegten Bereiche für die Annahme der Nullhypothese werden für die beiden Parameter μ und σ^2 die Konfidenzintervalle ermittelt.

Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ^2

Ausgangspunkt für die Ableitung des Konfidenzintervalls für μ ist der Bereich für die Annahme der Hypothese $H_0: \mu = \mu_0$ (s. Abschn. 2.3.3)

$$-\frac{z_{\alpha/2}}{\sigma} \sqrt{n} < + z_{\alpha/2} \sqrt{n} \quad (2.65)$$

Aus Gl. (2.65) erhält man durch Umstellen das Konfidenzintervall für den Parameter μ zu

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.66)$$

Damit wird das Konfidenzintervall kleiner, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit größer gewählt bzw. die Anzahl der Beobachtungen vergrößert wird.

Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ^2

Für die Ableitung des Konfidenzintervalls für μ bei unbekannter Varianz der Grundgesamtheit σ^2 wird von dem Bereich der Annahme der Nullhypothese $H_0: \mu = \mu_0$ (s. Abschn. 2.3.3) des *t*-Testes ausgegangen. Für ihn gilt

$$-t_{\alpha/2, f} < \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} < + t_{\alpha/2, f} \quad (2.67)$$

2. Beschreibung des Amplitudenmerhaltens von Signalen

Der Test (*F*-Test) erfolgt in den Schritten:

1. Aufstellen der Hypothese $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit α
3. Auf der Basis von n_1 Beobachtungen von X_1 und n_2 Beobachtungen von X_2 kann die Prüfgröße *F* aus Gl. (2.39) zu

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (2.59)$$

berechnet werden.

4. Ermittlung der Grenze F_{α, f_1, f_2} aus der Fisher-Verteilung (s. Tafeln A.4 und A.5)

5. Entscheidung

$$F \geq F_{\alpha, f_1, f_2} \quad H_0 \text{ wird abgelehnt}$$

$$F < F_{\alpha, f_1, f_2} \quad H_0 \text{ wird angenommen.}$$

Prüfung der Korrelationskoeffizienten

Um den linearen statistischen Zusammenhang zwischen Zufallsgrößen auf der Grundlage der empirisch ermittelten Korrelationskoeffizienten zu prüfen, wird als Hypothese H_0 für den Korrelationskoeffizienten der Grundgesamtheit $H_0: \rho = 0$ aufgestellt. Unter Berücksichtigung der bereits bekannten Testgröße für den Erwartungswert μ aus Gl. (2.37) gilt für diesen Test folgendes Vorgehen:

1. Aufstellen der Hypothese $H_0: \rho = 0$
2. Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit α
3. Berechnung der Prüfgröße *t* als *t*-Test
 - a) Einfacher Korrelationskoeffizient
Analog zu Gl. (2.37) gilt

$$t = \frac{\hat{\rho}(X_1, X_2) - \rho(X_1, X_2)}{s_{\hat{\rho}}} \quad (2.60)$$

Mit

$$s_{\hat{\rho}}^2 = \frac{1}{(n-2)} (1 - \hat{\rho}^2(X_1, X_2)) \quad \text{für } \rho(X_1, X_2) = 0$$

geht Gl. (2.60) über in

$$t = \frac{\hat{\rho}(X_1, X_2)}{\sqrt{1 - \hat{\rho}^2(X_1, X_2)}} \sqrt{n-2} \quad (2.61)$$

b) Partiieller Korrelationskoeffizient

Für den partiellen Korrelationskoeffizienten gilt in Analogie zu Gl. (2.61) mit der Anzahl der ausgeschlossenen Zufallsgrößen $s = m - 2$

$$t = \frac{\hat{\rho}(X_i, X_j \dots)}{\sqrt{1 - \hat{\rho}^2(X_i, X_j \dots)}} \sqrt{n - (2 + s)} \quad (2.62)$$

4. Ermittlung des Wertes $t_{\alpha/2, f}$ aus der Student-Verteilung mit $f = n - 2$ für a) und $f = n - (2 + s)$ für b) (s. Tafel A.2)

Aus Gl. (2.67) erhält man das Konfidenzintervall für μ zu

$$\bar{x} - t_{\alpha/2, f} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2, f} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (2.68)$$

Bei gleichem Stichprobenumfang n und gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit α ist das Konfidenzintervall von Gl. (2.68) größer als das von Gl. (2.66).

Konfidenzintervall für σ^2

Aus dem Gültigkeitsbereich für die Hypothese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ entsprechend Gl. (2.58)

$$\chi^2_{1-\alpha/2, f} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2, f}$$

ergibt sich das Konfidenzintervall von σ^2 zu

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2, f}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, f}} \quad (2.69)$$

Umfangreiche weiterführende Betrachtungen zu allen angeschnittenen Fragen sind in [2.1 bis 2.12] enthalten.

2.4. Übungsaufgaben zum Abschnitt 2

Aufgabe 2.1

Gegeben ist die im Bild 2.15 dargestellte Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße X . Lösen Sie folgende Teilaufgaben:

- a) Beschreiben Sie analytisch die Verteilungsfunktion, und berechnen Sie die Verteilungsdichte!
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert!
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Wert der Zufallsgröße im Intervall $[0; 3]$?

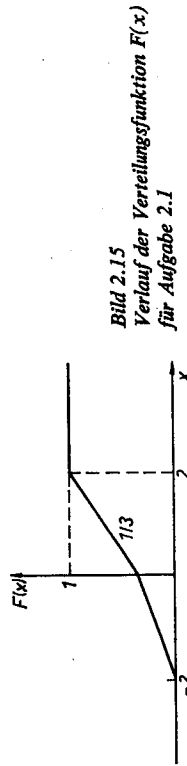


Bild 2.15
Verlauf der Verteilungsfunktion $F(x)$
für Aufgabe 2.1

Aufgabe 2.2

Bei einem Spiel werden zwei Würfel zugleich geworfen und die Augenzahl zu einer diskreten Zufallszahl x addiert.

- a) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilung und Verteilungsfunktion!
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert!
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen die für jeweils einen Wert summierten Augenzahlen x in dem Intervall $[6; 12]$?

Aufgabe 2.3

Gegeben sind die in Tafel 2.8 angegebenen Stichproben von drei stetigen Zufallsgrößen.

- a) Bestimmen Sie aufgrund einer Klasseneinteilung für jede Stichprobe die empirische Verteilung; skizzieren Sie diese, und vergleichen Sie sie mit bekannten Verteilungsgesetzen!

b) Berechnen Sie ausgehend von den empirisch ermittelten Verteilungen die Momente Mittelwert, Streuung und Schiefe, und vergleichen Sie diese für die erste Stichprobe mit den aus den Stichprobenwerten direkt bestimmten (exakten) Momenten!

Tafel 2.8. Stichproben von drei stetigen Zufallsgrößen

| Auswahl 1 | -1,26 | 0,12 | 0,24 | -0,50 | 0,91 | -0,21 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,00 | -1,26 | 0,12 | 0,24 | -0,50 | 0,91 | -0,21 |
| -2,25 | -0,25 | -0,79 | 0,24 | -0,60 | -1,19 | 1,74 |
| 0,28 | -0,45 | 0,41 | -0,05 | -0,48 | -0,11 | 3,36 |
| 0,76 | 1,40 | 0,33 | -0,04 | -1,09 | -0,52 | 0,37 |
| 2,38 | 0,43 | 0,02 | -2,07 | -1,51 | -0,73 | |
| -0,18 | -0,28 | 0,61 | -0,50 | -1,71 | -0,09 | |
| Auswahl 2 | 0,70 | 0,20 | 0,79 | 0,97 | 0,12 | 0,34 |
| 0,53 | 0,44 | 0,36 | 0,79 | 0,82 | 0,67 | 0,15 |
| 0,69 | 0,87 | 0,36 | 0,56 | 0,93 | 0,03 | 0,01 |
| 0,77 | 0,27 | 0,31 | 0,79 | 0,61 | 0,00 | 0,94 |
| 0,05 | 0,26 | 0,56 | 0,92 | 0,80 | 0,29 | |
| 0,65 | 0,51 | 0,98 | 0,96 | 0,86 | 0,60 | |
| Auswahl 3 | 40 | 20 | 42 | 72 | 28 | 106 |
| 199 | 260 | 17 | 16 | 35 | 96 | 23 |
| 31 | 22 | 45 | 300 | 3 | 145 | 24 |
| 370 | 155 | 42 | 86 | 58 | 44 | 190 |
| 85 | 92 | 61 | 38 | 192 | 20 | |
| 134, | 13 | 13 | 70 | 110 | 78 | |

Aufgabe 2.4

Das Lackmaß einer Beschichtungsanlage in einer Fertigungszelle der Mikroelektronik habe den Erwartungswert $\mu = 8 \mu\text{m}$ und die Streuung $\sigma^2 = 0,4 (\mu\text{m})^2$. Eine Überprüfung der Anlage durch 150 Proben ergab ein mittleres Lackmaß von $\bar{x} = 8,3 \mu\text{m}$. Ist diese Abweichung vom Erwartungswert als zufällig oder als signifikant bei einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ zu bezeichnen?

Aufgabe 2.5

Bei der Qualitätskontrolle an 15 Werkstücken werden mittels zweier verschiedener Längenmeßgeräte, einem mechanischen (I) und einem optischen (II), die in Tafel 2.9 angegebenen Abweichungen (in μm) vom vorgegebenen Sollmaß ermittelt. Treffen Sie eine Aussage, ob sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,01$ die beiden Geräte hinsichtlich der Meßgenauigkeit wesentlich voneinander unterscheiden!

Tafel 2.9. Abweichungen der Länge von Werkstücken in μm

| Werkstück | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Gerät I | 70 | 70 | 60 | 70 | 60 | 80 | 70 | 70 | 70 | 70 | 70 | 50 | 70 | 80 | 60 |
| Gerät II | 80 | 70 | 70 | 60 | 70 | 70 | 80 | 70 | 60 | 80 | 70 | 70 | 80 | 70 | 80 |

Aufgabe 2.6

Der Hersteller einer Steuereinrichtung für die Innentemperatur von Gewächshäusern behauptet, daß durch seine Einrichtung ein Temperatur Sollwert von 24°C mit einer Streuung von $\sigma^2 = 0,25 (^\circ\text{C})^2$ gehalten wird.

70 2. Beschreibung des Amplitudenverhaltens von Signalen

Ist diese Behauptung des Herstellers mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ aufgrund der in Tafel 2.10 dargestellten Messungen noch aufrechtzuerhalten?

Tafel 2.10. Messungen der Innentemperatur eines Gewächshauses

| Messungen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Innentemperatur °C | 24,6 | 23,4 | 24,6 | 24,1 | 23,7 | 23,8 | 24,1 | 24,0 | 23,5 | 24,2 |

Aufgabe 2.7

Der Sauerstoffgehalt eines Gewässers wurde mit zwei verschiedenen Methoden (O_2 und O_2') bestimmt (s. Tafel 2.11). Prüfen Sie die Hypothese, daß sich die Streuungen der Meßwerte beider Methoden nur zufällig unterscheiden (mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$)!

Tafel 2.11. Meßergebnisse des Sauerstoffgehalts eines Gewässers

| | | | | | | | | |
|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| O_2 in mg/l | 5,5 | 5,0 | 5,3 | 5,6 | 5,8 | | | |
| O_2' in mg/l | 5,9 | 4,5 | 5,2 | 4,3 | 5,0 | 5,4 | 5,3 | 4,8 |

Aufgabe 2.8

Aus 11 Belastungstests einer männlichen Person mit einem Fahrradergometer bei einer Belastung von 90 W wurde eine mittlere Herzfrequenz von $\bar{x} = 155 \text{ min}^{-1}$ und eine Streuung $s^2 = 12,3 (\text{min}^{-1})^2$ ermittelt. Bestimmen Sie für den Erwartungswert der Herzfrequenz den 95-%-Vertrauensbereich!

Aufgabe 2.9

Aus einer Stichprobe von 20 Posten einer Fertigungszelle der Mikroelektronik wurde eine Ausbeute an funktionstüchtigen Chips mit einem Mittelwert von $\bar{x} = 14,3\%$ und einer Streuung von $s^2 = 1,8 (\%)^2$ ermittelt.

Bestimmen Sie das Konfidenzintervall der Streuung für die Ausbeute mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,1!$

Aufgabe 2.10

Gegeben sind die in Tafel 2.12 dargestellten Werte einer zweidimensionalen Zufallsgröße.

- Bestimmen Sie auf der Grundlage der Klasseneinteilung die Verbundwahrscheinlichkeitswerte!
- Berechnen Sie die Randverteilungen, und stellen Sie die Randverteilungen grafisch dar! Schließen Sie auf die Art der Verteilung!
- Berechnen Sie ausgehend von der Klasseneinteilung den totalen Korrelationskoeffizienten $\hat{\rho}_{xy}$; interpretieren Sie das Ergebnis anhand der zweidimensionalen Verteilung!

Aufgabe 2.11

Berechnen Sie den totalen Korrelationskoeffizienten für den Zusammenhang $y = x^2$, und diskutieren Sie das Ergebnis!

Die Werte für x werden wie folgt vorgegeben:

- $x = -2, -1, 1, 2$
- $x = -1, 0, 1, 2$
- $x = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 2.12

Die in Tafel 2.13 dargestellten Werte einer zweidimensionalen Zufallsgröße wurden gemessen. Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten, und überprüfen Sie, ob dieser Wert statistisch gesichert ist!

Der kritische Korrelationskoeffizient für $n = 7$, $\alpha = 5\%$ lautet $r_{\text{crit}} = 0,666$ (s. Tafel A.6).

Tafel 2.12

Meßwerte einer zweidimensionalen Zufallsgröße

| x_i | y_i | x_i | y_i |
|-------|-------|-------|-------|
| 0,35 | 0,97 | 0,35 | 1,86 |
| 1,24 | 0,12 | 1,58 | 0,76 |
| 2,21 | 3,17 | -1,67 | 0,85 |
| 0,47 | -0,83 | 0,55 | 0,76 |
| 1,99 | 2,45 | 0,31 | 0,97 |
| 2,34 | 3,24 | 2,88 | 3,63 |
| -0,22 | 1,73 | 1,33 | 1,86 |
| 0,95 | 1,05 | 1,25 | 2,53 |
| 0,66 | -0,56 | 0,97 | 2,66 |
| 0,28 | 0,87 | 1,95 | 2,55 |
| 1,43 | 1,95 | -0,35 | -0,18 |
| -1,03 | -0,88 | 1,41 | 2,37 |
| -0,42 | -1,17 | -0,26 | -0,66 |
| -0,51 | 0,03 | 0,15 | 0,80 |
| 2,85 | 3,12 | 2,15 | 2,54 |
| 3,43 | 3,28 | 0,64 | 1,56 |
| 1,37 | 3,22 | -0,41 | 0,05 |
| 1,25 | 3,25 | 1,20 | 1,84 |
| 0,44 | -0,10 | 1,33 | 2,45 |
| 0,52 | -0,15 | 0,52 | -0,12 |

Aufgabe 2.13

Als Merkmal für die Güte x eines fließenden Gewässers dient der Sauerstoffanteil im Wasser. Folgende Faktoren wirken auf die Wasserqualität ein:

- u_1 biochemischer Sauerstoffbedarf
- u_2 Wassertemperatur
- u_3 Durchfluß
- u_4 NO_3 -Verbindungen
- u_5 NH_4 -Verbindungen
- u_6 Permanganatverbrauch.

Aus 67 Beobachtungen über einen längeren Zeitraum wurden die in Tafel 2.14 partiellen Korrelationskoeffizienten berechnet.

Gesucht ist die Matrix der signifikanten Korrelationskoeffizienten für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,1$ bzw. $\alpha = 0,01!$

Tafel 2.14. Ermittelte Korrelationskoeffizienten

| | u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6 | x |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| u_1 | 1 | | | | | | |
| u_2 | 0,358 | 1 | | | | | |
| u_3 | 0,052 | 0,033 | 1 | | | | |
| u_4 | -0,050 | -0,221 | -0,136 | 1 | | | |
| u_5 | 0,236 | -0,318 | -0,072 | -0,012 | 1 | | |
| u_6 | 0,046 | 0,144 | -0,079 | -0,016 | 0,015 | 1 | |
| x | 0,447 | -0,729 | 0,077 | 0,083 | -0,374 | -0,058 | 1 |

3. Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Signalen

Bei der Lösung vieler Diagnose-, Überwachungs-, Steuerungs- und Vorhersageaufgaben ist es notwendig, den zeitlichen Ablauf eines Signals zu beschreiben. Hierzu dienen sowohl zeitliche als auch spektrale Kennfunktionen. Als Signal wird der zeitliche Verlauf einer physikalischen Größe angesehen, wenn dieser Verlauf mindestens einen Parameter aufweist, der die zu signalisierende Größe abbildet [3.2, 3.3] (s. auch TGL 14.591). In Abhängigkeit davon, ob die Beschreibung als Funktion der Zeit t oder der Frequenz ω erfolgt, wird von der Beschreibung im *Zeitbereich* oder im *Frequenzbereich* gesprochen. Die Werte der das Signal kennzeichnenden Parameter (z. B. Amplituden- oder Frequenzwerte) zu verschiedenen Zeiten werden auch als Signalwerte bezeichnet. Werden die Signalwerte für eine digitale Verarbeitung durch Anpassungs-, Umsetz- und Formierungsglieder kodiert, bezeichnet man sie als Daten [3.2]. Häufig werden jedoch im Sprachgebrauch auch die erfaßten Signalwerte als Daten bezeichnet. Eine weitere wichtige Untergliederung der Signalbeschreibungen ergibt sich, wenn die Reproduzierbarkeit des Signals betrachtet wird. Läßt sich der zeitliche Verlauf des Signals reproduzieren und exakt vorhersagen, wird von *deterministischen Signalen* (s. Abschn. 3.1), im anderen Fall von *nichtdeterministischen/stochastischen Signalen* (s. Abschn. 3.2) gesprochen. Nach diesen Gesichtspunkten sind die folgenden Abschnitte aufgebaut. Neben einer Einführung und einem Überblick sollen sie dazu dienen, aus der Vielfalt der Modelle für den jeweiligen Anwendungsfall das nach Eigenschaften geeignetste Modell auswählen zu können.

3.1. Grundlagen der Beschreibung deterministischer Signale

In der Systemtheorie haben deterministische Signale eine große Bedeutung als

1. Grundbausteine beliebiger Signalverläufe und als
2. Testsignale der experimentellen Prozeßanalyse.

Die vorgestellten elementaren deterministischen Signalmodelle schließen an die Ausführungen in den Lehrbüchern von *Reinisch* [1.2, 3.1], *Günther* [3.2], *Isermann* [1.44], *Strobel* [1.46] und *Eykhoft* [1.47] an. In ihnen sind auch weiterführende Betrachtungen enthalten.

3.1.1. Modelle im Zeitbereich

3.1.1.1. Beschreibung kontinuierlicher Signale

Grundsätzlich kann ein deterministisches Signal $x(t)$ gekennzeichnet werden durch den zeitlichen Verlauf

$$x = x(t) \text{ für } -\infty < t < +\infty. \quad (3.1)$$

In einigen Fällen ist es möglich, das Signal $x(t)$ innerhalb des betrachteten Zeitintervalls geschlossen analytisch zu beschreiben.

Typisch sind folgende Fälle:

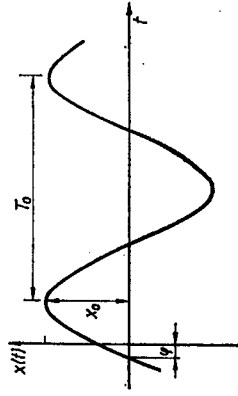
Harmonische Signale

- in der trigonometrischen Darstellung (Bild 3.1)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ für } -\infty < t < +\infty; \quad (3.2)$$

$\omega_1 = 2\pi/T_1$
 T_1 Periode des Signals
 φ_1 Phase;

Signalverlauf



Amplitudenspektrum

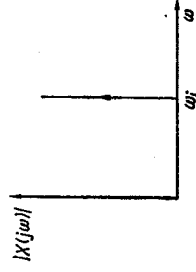


Bild 3.1
 Harmonisches Signal und sein Amplitudenspektrum

$|X(j\omega)|$ Betrag der komplexen Größe $X(j\omega)$, bezeichnet als Amplitudendichtespektrum; s. Abschnitt 3.1.2

- in der komplexen Darstellung bei Verwendung der Eulerschen Beziehungen

$$\hat{x}(t) = x_0 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} = \hat{x}_0 e^{j\omega_1 t} \quad (3.3)$$

mit $\hat{x}_0 = x_0 e^{j\varphi_1}$.

Exponentielle Signale

- aperiodisch exponentieller Verlauf (Bild 3.2)

$$x(t) = x_0 e^{-t/T} \text{ für } 0 \leq t < +\infty; \quad (3.4)$$

- periodisch exponentieller Verlauf (Bild 3.3)

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0 e^{j\omega t} e^{\delta t} \text{ für } 0 \leq t < +\infty \text{ mit } \delta \neq 0. \quad (3.5)$$



Bild 3.2. Verlauf eines aperiodischen exponentiellen Signals

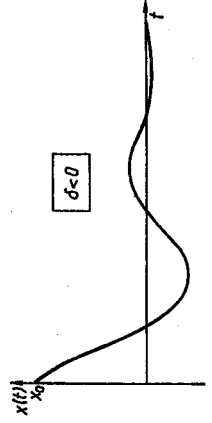


Bild 3.3
 Mögliche Verläufe eines exponentiellen Signals mit periodischer Komponente

Periodische Signale

Jedes periodische Signal $x(t)$ mit der Periode T_0 kann durch eine Fourier-Reihe der Form

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \cos(i\omega_0 t) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i \sin(i\omega_0 t), \tag{3.6}$$

$\omega_0 = 2\pi/T_0$ Frequenz der Grundwelle, beschrieben werden (Bild 3.4).

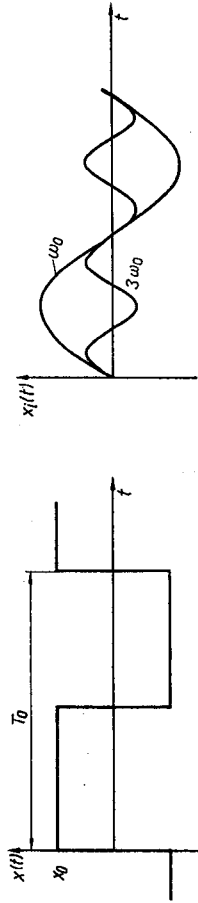


Bild 3.4. Grundkonzept der Zerlegung periodischer Signale in Teilschwingungen $x_1(t)$

Die Amplitudenwerte a_i und b_i werden nach folgenden Vorschriften berechnet:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) \cos(i\omega_0 t) dt \\ b_i &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) \sin(i\omega_0 t) dt \\ a_0 &= \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) dt. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Für einige typische periodische Signale sind in Tafel 3.1 die Fourier-Koeffizienten dargestellt. Werden die jeweils gleichfrequenten cos- und sin-Glieder von Gl. (3.6) zu je einer harmonischen komplexen Schwingung zusammengefaßt, erhält man als Signalmodell

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i e^{i(i\omega_0)t}. \tag{3.8}$$

Tafel 3.1. Ausgewählte Signalerläufe und ihre Fourier-Reihen-Entwicklungen

| Signalverlauf | Fourier-Reihen-Entwicklung |
|---------------|--|
| | $x(t) = \frac{4x_0}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$ |
| | $x(t) = \frac{8x_0}{\pi^2} \left[\frac{1}{1} \sin \omega_0 t - \frac{\sin 3\omega_0 t}{3^2} + \frac{\sin 5\omega_0 t}{5^2} + \dots \right]$ |
| | $x(t) = \frac{x_0}{2} + \frac{2x_0}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$ |

In diesem Modell sind die c_i die komplexen Fourier-Koeffizienten, die aus der Beziehung

$$c_i = \frac{1}{2} (a_i - jb_i) = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) e^{-i(i\omega_0)t} dt \tag{3.9}$$

ermittelt werden. Für $i = 0$ gilt analog zu Gl. (3.7) $c_0 = a_0/2 = \bar{x}$ und $b_0 = 0$.

Aperiodische Signale

Neben dem in Gl. (3.4) beschriebenen exponentiellen aperiodischen Signal sind die in Tafel 3.2 dargestellten Signale von großer Bedeutung für die experimentelle Prozeßanalyse. Wesentlich ist, daß die analytische Beschreibung häufig aufgrund der Unstetigkeiten nur stückweise erfolgen kann. So gilt für

- die Sprungfunktion

$$x(t) = x_0 \sigma(t) \tag{3.10}$$

mit der Einheitssprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Tafel 3.2. Typische elementare Signale und ihre Amplitudenspektren

| Signalverlauf | Amplitudenspektrum |
|---------------|--|
| | $ X(j\omega) = \frac{x_0}{\omega}$ |
| | $ X(j\omega) = x_0 T^* \left \frac{\sin \frac{\omega T^*}{2}}{\frac{\omega T^*}{2}} \right $ |
| | $ X(j\omega) = x_0 T^*$ mit $x_0 \rightarrow \infty$ $T^* \rightarrow 0$ |
| | $ X(j\omega) = \frac{x_0}{\omega^2 T^*}$ |

den Rechteckimpuls

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > T \\ x_0 & \text{für } 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.11)$$

den Dirac-Impuls

$$x(t) = \delta(t) \quad (3.12)$$

mit

$$\delta(t) = 0 \text{ für } t \neq 0; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

die Rampenfunktion

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ at & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

3.1.1.2. Beschreibung abgetasteter kontinuierlicher Signale

Ein abgetastetes Signal $x^*(t)$ erhält man aus einem kontinuierlichen Signal $x(t)$ durch eine Abtastung zu den Zeitpunkten $t_k; k = 0, 1, 2, \dots$ (Bild 3.5). In sehr vielen Fällen wird davon ausgegangen, daß die Abtastung der Signale zu äquidistanten Zeitpunkten mit einer Abtastperiode T erfolgt. Diese Annahme gilt für alle Betrachtungen in diesem Buch. Das abgetastete Signal kann durch eine Folge von gewichteten Dirac-Impulsen beschrieben werden. Sie hat die Form

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t - T) + \dots$$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

bzw.

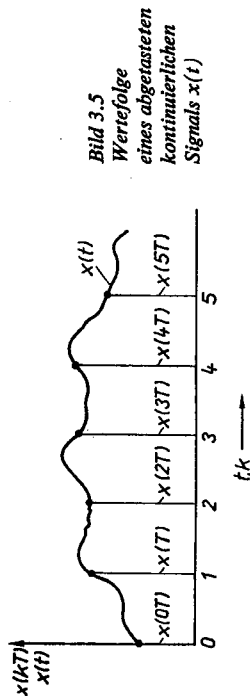


Bild 3.5 Wertefolge eines abgetasteten kontinuierlichen Signals $x(t)$

In dieser Modellvorstellung wird der Abtaster als Modulator betrachtet, bei dem $x(t)$ das modulierende Signal und die Dirac-Impuls-Folge der Träger der Information ist. Die Fläche der gewichteten Dirac-Impulse ist gleich dem Wert des Signals $x(t)$ zu den Tastpunkten $t = kT$.

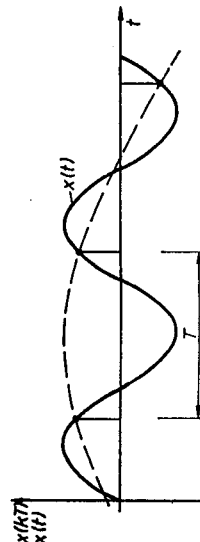


Bild 3.6 Einfluß der Tastperiode auf die Abbildung des Signals $x(t)$

Die Genauigkeit, mit der $x^*(t)$ das kontinuierliche Signal $x(t)$ repräsentiert, erhöht sich mit kleiner werdender Abtastzeit T . Eine Beziehung zur Festlegung der Abtastzeit T ist durch das Abtasttheorem von Shannon

$$T \leq 1/2f_{\max} \quad (3.15)$$

gegeben. In Gl. (3.15) ist f_{\max} die höchste im Signal $x(t)$ enthaltene Frequenz einer Teil-schwingung. Ist die Abtastperiode T größer als der in Gl. (3.15) angegebene Wert, ist das Signal $x(t)$ aus dem abgetasteten Signal nicht mehr exakt reproduzierbar (s. Bild 3.6).

3.1.2. Modelle im Frequenzbereich

3.1.2.1. Beschreibung kontinuierlicher Signale

Beschreibung harmonischer Signale. Ausgangspunkt für die Beschreibung harmonischer Schwingungen im Frequenzbereich sind die Gln. (3.2) und (3.3), die das Signal im Zeitbereich beschreiben. Der Übergang zur Darstellung im Frequenzbereich erfolgt dadurch, daß die Parameter der Amplitude x_0 und der Phase φ in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω dargestellt werden. Damit hat die harmonische Schwingung ein Spektrum mit je einer einzigen Spektrallinie im Amplituden- und im Phasenspektrum (s. Bild 3.1).

Aus der komplexen Darstellung des Signals von Gl. (3.3) erhält man den Real- und Imaginärteil zu

$$\dot{x}(t) = \text{Re} \{ \dot{x}(t) \} + j \text{Im} \{ \dot{x}(t) \}. \quad (3.16)$$

Damit ergibt sich die Amplitude zu

$$|\dot{x}_0| = \sqrt{\text{Re}^2 \{ \dot{x}_0 \} + \text{Im}^2 \{ \dot{x}_0 \}} \quad (3.17)$$

und die Phase zu

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im} \{ \dot{x}_0 \}}{\text{Re} \{ \dot{x}_0 \}}. \quad (3.18)$$

Das Amplituden- und Phasenspektrum entsteht, wenn mehrere Frequenzen ω_i vorliegen. Beschreibung durch das Fourier-Integral. Wird von einem periodischen Signalverlauf, der durch die Fourier-Reihe von Gl. (3.8) ausreichend beschrieben wird, zu einem nicht-periodischen Signal (d.h. $T_0 \rightarrow \infty$) übergegangen, gewinnt man eine Darstellung, die als Fourier-Integral bezeichnet wird. Damit geht die Gleichung der Fourier-Koeffizienten (3.9), sofern das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.19)$$

ist, in das Fourier-Integral über. Es gilt dann für das komplexe Signal

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.20)$$

Das in Gl. (3.20) dargestellte Integral wird auch als Fourier-Transformation des Signals $x(t)$ bezeichnet und symbolisch durch die Form

$$X(j\omega) = \mathfrak{F} \{ x(t) \} \quad (3.21)$$

beschrieben.

Für den zeitlichen Verlauf des Signals gilt analog zur Beschreibung der Fourier-Reihe Gl. (3.8)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d(j\omega). \quad (3.22)$$

Da die Fourier-Transformierte von $x(t)$ eine komplexe Funktion mit

$$X(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

ist, erhält man das Amplitudenspektrum als

$$|X(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \quad (3.23)$$

und das Phasenspektrum durch die Beziehung

$$\varphi(\omega) = \arctan V(\omega)/U(\omega). \quad (3.24)$$

In Tafel 3.2 und Bild 3.1 sind für ausgewählte Signaltypen die Amplitudenspektren dargestellt. Sie geben eine sehr gute Information über die Amplituden der einzelnen periodischen Komponenten des Gesamtsignals. Deutlich wird bei der Verwendung dieser Signale als Testsignale, daß eine einzelne periodische Schwingung Systeme nur an der Stelle ω , erregt und mit Ausnahme der Nadelfunktion alle Amplitudenspektren mit zunehmender Frequenz abnehmen. Damit werden hochfrequente Bereiche von Systemen nicht ausreichend erregt, und die Genauigkeit der diesen Bereich beschreibenden Parameter nimmt ab (s. Abschn. 4).

Beschreibung durch das Laplace-Integral. Die für die Anwendung der Fourier-Transformation von Gl. (3.19) notwendige Bedingung ist bei beliebigen instabilen Signalverläufen – s. Bild 3.2 und Gl. (3.5) – nicht mehr erfüllt. Durch die Modifizierung der periodischen Signale von Gl. (3.3) mit dem Faktor $e^{-\delta t}$ entsprechend Gl. (3.5) ergibt sich das Fourier-Integral zu

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\delta + j\omega)t} dt. \quad (3.25)$$

Führt man die komplexe Frequenz

$$p = \delta + j\omega \quad (3.26)$$

ein, so erhält man das *Laplace-Integral* zu

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (3.27)$$

Für das Umkehrintegral gilt analog zu Gl. (3.22)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X(p) e^{pt} dp. \quad (3.28)$$

Das in Gl. (3.27) dargestellte Integral wird auch als *Laplace-Transformation* des Signals $x(t)$ bezeichnet und symbolisch durch den Ausdruck

$$X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} \quad (3.29)$$

beschrieben.

3.1.2.2. Beschreibung abgetasteter kontinuierlicher Signale

Eine Beschreibung diskontinuierlicher Signale erhält man durch die Anwendung der Laplace-Transformation auf die in Gl. (3.14) angegebene Wertefolge. Da die Laplace-Transformierte des Dirac-Impulses $\delta(t)$ zum Zeitpunkt $(t - kT)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - kT)\} = e^{-pkT} \quad (3.30)$$

ist, erhält man für die Wertefolge im Frequenzbereich

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = X^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-pkT}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

Die in Gl. (3.31) dargestellte Beziehung wird als einseitige diskrete Laplace-Transformation bezeichnet.

Wird eine weitere Variablentransformation mit

$$z = e^{pT} \quad (3.32)$$

vorgenommen, erhält man die einseitige *z-Transformierte* der Wertefolge zu

$$Z\{x^*(t)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Ausführliche und weiterführende Betrachtungen zu dieser Beschreibungsform sind in [1.2, 3.3] enthalten.

Für nach Gl. (3.14) beschränkte Signale geht die Fourier-Transformierte von Gl. (3.20) für das kontinuierliche Signal im abgetasteten Fall in die *diskrete Fourier-Transformierte*

$$X^*(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) e^{-j\omega kT}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.34)$$

über. Wenn eine endliche Beobachtungszeit von $2T_0$ mit $2n$ Beobachtungen angenommen wird, erhält man für die diskrete Fourier-Transformierte von Gl. (3.34)

$$X^*(j\omega) = \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) e^{-j(\omega kT/n)} \quad (3.35)$$

mit $t = kT$, $\omega = m\omega_0 = m2\pi/2nT = m\pi/nT$, $T_0 = nT$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, m = 1, 2, \dots, n$;

$\omega_0 = 2\pi/2T_0$ Grundwelle des Signals im Beobachtungszeitraum.

Für die Rücktransformation gilt

$$x(kT) = \frac{1}{2n} \sum_{m=-n}^{+n} X^*(j\omega) e^{j(\omega kT/n)}. \quad (3.36)$$

3.2. Grundlagen der Beschreibung stochastischer Signale

3.2.1. Grundbegriffe

Die bisherigen Beschreibungen des dynamischen Verhaltens von Signalen beziehen sich nur auf Signale, deren zeitlicher Verlauf eindeutig analytisch formulierbar ist. In sehr vielen Aufgaben spielen Zufallsgrößen x eine wichtige Rolle, deren Werte Funktionen

der Zeit sind. Man bezeichnet Zufallsgrößen $x(t)$ mit dieser Eigenschaft als zufällige oder stochastische Funktionen. Sie sind als Realisierungen eines *stochastischen Prozesses* anzusehen. Der zeitliche Verlauf eines solchen Signals ist nicht reproduzierbar, und sein weiterer Verlauf kann nicht eindeutig aus der zurückliegenden Zeit ermittelt werden. Im Bild 3.7 sind mögliche Signalverläufe einer Zufallsfunktion dargestellt.



Bild 3.7
Mögliche Verläufe
eines stochastischen Signals

Für die praktische Anwendung von Beschreibungsformen von stochastischen Prozessen sind die Begriffe der *Stationarität* und *Ergodizität* von zentraler Bedeutung.

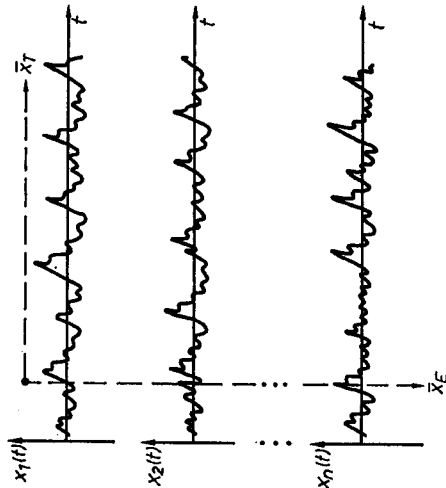


Bild 3.8
Aufzeichnungen eines Ensembles
eines stochastischen Prozesses

Als stationär wird ein stochastischer Prozeß bezeichnet, wenn seine statistischen Eigenschaften unabhängig von jeder zeitlichen Verschiebung T sind. Damit gilt für die Verteilungsdichtefunktionen

$$f(x, t) = f(x, t + \tau) = f(x). \tag{3.37}$$

Als ergodisch (wegunabhängig) wird ein stochastischer Prozeß dann bezeichnet, wenn der Mittelwert \bar{x}_E über das Ensemble (d. h. n Realisierungen des Zufallsprozesses) mit dem zeitlichen Mittelwert \bar{x}_R einer beliebig ausgewählten Realisierung des Ensembles übereinstimmt (Bild 3.8), wenn also gilt

$$\bar{x}_E = \bar{x}_R. \tag{3.38}$$

Jeder ergodische Prozeß ist stationär; die Umkehrung gilt nicht. Während die Eigenschaft der Stationarität praktisch gut nachgewiesen werden kann, ist die Bedingung der Ergodizität aufgrund des häufig fehlenden Ensembles schwierig.

3.2.2. Beschreibung stochastischer Signale im Zeitbereich

Neben den Kenngrößen Erwartungswert und Streuung für das stochastische Signal $x(t)$ – s. Gl. (2.11) und (2.14) – hat die Beschreibung des dynamischen Verhaltens eine große Bedeutung. Sie erfolgt im Zeitbereich durch die Korrelationsfunktionen.

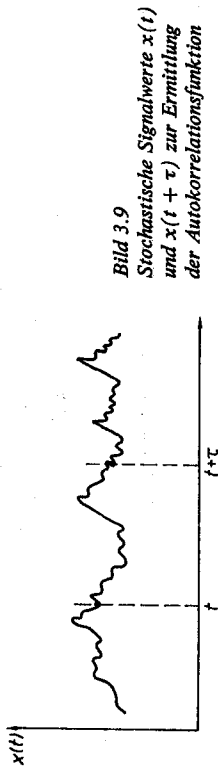


Bild 3.9
Stochastische Signalwerte $x(t)$
und $x(t + \tau)$ zur Ermittlung
der Autokorrelationsfunktion

3.2.2.1. Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$

Wird von dem in Bild 3.9 gegebenen stetigen stochastischen Signal $x(t)$ ausgegangen, so wird durch die *Autokorrelationsfunktion* $R_{xx}(\tau)$ der mittlere lineare statistische Zusammenhang der Zufallsgröße $x(t)$ zu den Zeitpunkten t und $t + \tau$ beschrieben. Allgemein beruht ihre Berechnung auf der Kovarianz – s. Gl. (2.24) –, und es gilt

$$R_{xx}(\tau) = E \{x(t) x(t + \tau)\}. \tag{3.39}$$

Für eine ergodische Zufallsgröße kann das Ensemblemittel durch den zeitlichen Mittelwert ersetzt werden. Damit gelten die folgenden Berechnungsvorschriften:

- stetige stochastische Signale

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t) x(t + \tau) dt, \tag{3.40}$$

- diskrete stochastische Signale (n Beobachtungen)

a) für periodische stochastische Signale

$$R_{xx}(mT) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(kT) x[(k + m)T] \tag{3.41}$$

mit $\tau = mT$, $t = kT$, nT Periode, $m = 0, 1, 2, \dots, l, l < n$,

b) für nichtperiodische stochastische Signale

$$R_{xx}(mT) = \frac{1}{n - m} \sum_{k=1}^{n-m} x(kT) x[(k + m)T]. \tag{3.42}$$

Die Autokorrelationsfunktion auf den Mittelwert normierter Signale wird als Autokovarianzfunktion bezeichnet.

Die Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ besitzt folgende wichtige Eigenschaften:

1. Die Autokorrelationsfunktion ist eine gerade Funktion:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau). \tag{3.43}$$

2. Der Anfangswert der Autokorrelationsfunktion ist gleich der mittleren Signalleistung:

$$R_{xx}(0) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x^2(t) dt \geq |R_{xx}(\tau)|. \quad (3.44)$$

3. Eine periodische Komponente in $x(t)$ mit der Periode T_1 ergibt eine periodische Komponente mit der Periode T_1 in $R_{xx}(\tau)$; die Phaseninformation geht verloren.
 4. Die Autokorrelationsfunktion einer konstanten Größe bzw. des Gleichanteils eines Signals ist gleich dem Quadrat des Mittelwerts des Signals:

$$R_{xx}(\tau) = \bar{x}^2. \quad (3.45)$$

5. Wenn ein stochastisches Signal einen konstanten Anteil hat,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) \neq 0,$$

gilt für die Streuung des Signals

$$\sigma_x^2 = R_{xx}(0) - R_{xx}(\infty). \quad (3.46)$$

6. Sind im stochastischen Signal keine periodische Komponente und kein Gleichanteil enthalten, geht der innere stochastische Zusammenhang für $\tau \rightarrow \infty$ verloren:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = 0. \quad (3.47)$$

Zum besseren Verständnis sind in Tafel 3.3 die zeitlichen Verläufe von typischen Signalen und ihre Autokorrelationsfunktionen dargestellt. Diese Autokorrelationsfunktionen

Tafel 3.3. Signalverläufe und ihre Autokorrelationsfunktionen/Leistungsdichtespektren

| Signalverlauf | Autokorrelationsfunktion | Leistungsdichtespektrum |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------|
| $x(t)$ weißes Rauschen x | $R_{xx}(\tau)$ | $S_{xx}(\omega)$ |
| $x(t)$ farbiges Rauschen x | $R_{xx}(\tau)$ | $S_{xx}(\omega)$ |
| $x(t)$ | $R_{xx}(\tau)$ | $S_{xx}(\omega)$ |
| $x(t)$ | $R_{xx}(\tau)$ | $S_{xx}(\omega)$ |

werden besonders zur Deutung innerer Zusammenhänge von Signalen, zur Ermittlung von Autoleistungsdichtespektren (s. Abschn. 3.2.3) und zur Ermittlung von Systemmodellen (s. Abschn. 3.2.4) verwendet.

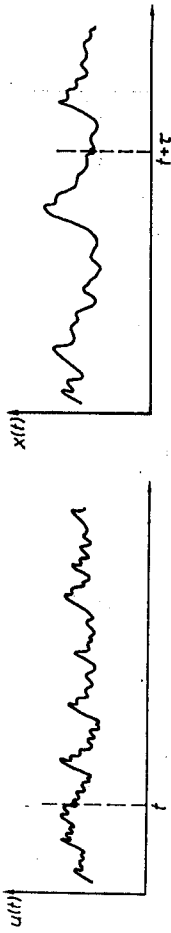


Bild 3.10. Stochastische Signalwerte $u(t)$ und $x(t + \tau)$ zur Ermittlung der Kreuzkorrelationsfunktion

3.2.2.2. Kreuzkorrelationsfunktion $R_{ux}(\tau)$

Die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{ux}(\tau)$ ist ein Maß für den mittleren linearen statistischen Zusammenhang zwischen den stochastischen Signalen $u(t)$ und $x(t)$ mit der Zeitverschiebung τ (Bild 3.10). Als allgemeine Berechnungsvorschrift gilt analog zu Gl. (3.39):

$$R_{ux}(\tau) = E \{ u(t) x(t + \tau) \}. \quad (3.48)$$

Damit erhält man folgende Beziehungen:

– für stetige stochastische Signale

$$R_{ux}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} u(t) x(t + \tau) dt \quad (3.49)$$

– für diskrete stochastische Signale

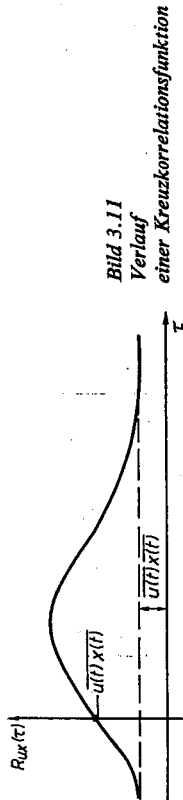
$$R_{ux}(mT) = \frac{1}{n - m} \sum_{k=1}^{n-m} u(kT) x[(k + m)T]. \quad (3.50)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{ux}(\tau)$ hat folgende wichtige Eigenschaften:

1. Sie ist keine gerade Funktion, denn es gilt $R_{ux}(\tau) = R_{xu}(-\tau)$. (3.51)
2. Sind die Signale $u(t)$ und $x(t)$ stochastisch unabhängig und besitzen sie keine konstanten oder periodischen Anteile, so ist $R_{ux}(\tau) = 0$ für alle τ . (3.52)
3. Die Kreuzkorrelationsfunktion für $\tau = 0$ ist $R_{ux}(0) = \overline{u(t) x(t)}$. (3.53)
4. Für $\tau \rightarrow \infty$ ergibt sich die Kreuzkorrelationsfunktion zu $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{ux}(\tau) = \overline{u(t)} \overline{x(t)}$. (3.54)
5. Bei der Überlagerung zweier Signale $x(t) = u(t) + z(t)$ gilt $R_{xx}(\tau) = R_{uu}(\tau) + R_{zz}(\tau) + R_{uz}(\tau) + R_{zu}(\tau)$. (3.55)

Einige dieser Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion sind im Bild 3.11 dargestellt. Die Kreuzkorrelationsfunktionen werden u. a. benutzt für die Ermittlung von zeitlichen Zusammenhängen zwischen zwei Signalen, zur Ermittlung von Kreuzleistungsdichte-

spektralen (s. Abschn. 3.2.3) und zur Bestimmung von Systemmodellen (s. Abschn. 3.2.4). Ebenso vorteilhaft ist ihre Anwendung als Meßverfahren zum Nachweis periodischer Signalkomponenten oder zur elektrischen Leistungsmessung [3.3 bis 3.5].

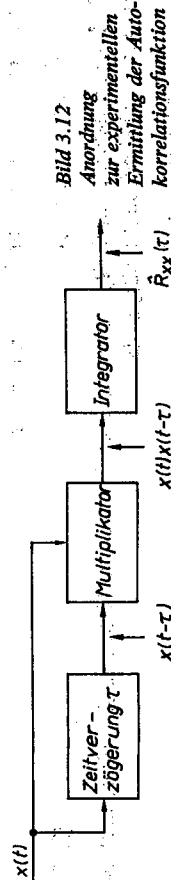


3.2.2.3. Experimentelle Ermittlung von Korrelationsfunktionen

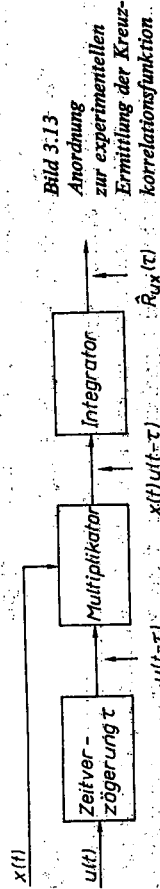
Die Ermittlung der Korrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau)$ und $R_{ux}(\tau)$ von stetigen stochastischen Signalen kann nach dem in den Bildern 3.12 und 3.13 dargestellten Schema erfolgen. In den Anordnungen sind die Gln. (3.40) und (3.49) realisiert worden, wobei für verschiedene τ -Werte die Korrelationsfunktionen über die Beobachtungszeit T_0 ermittelt werden. Die auf diesem Schema basierenden Geräte werden als *Korrelatoren* bezeichnet. Eine eingehende Darstellung verschiedener mechanischer, fotoelektrischer, magnetischer und elektronischer Korrelatoren sowie eine eingehende Fehlerbetrachtung der ermittelten Korrelationsfunktionen sind in [3.6] enthalten. Bei dieser an Bedeutung verlierenden Gruppe von Methoden wird die Genauigkeit der Berechnung neben dem Einfluß der Gerätekomponenten (Multiplikations-, Integrations-, Zeitverschiebungsfehler) wesentlich vom Verhältnis von Beobachtungszeit T_0 zur gewählten Zeitverschiebung bestimmt. Je größer das Verhältnis ist, um so genauer wird die Korrelationsfunktion bestimmt. Eine allgemeine Beziehung besteht nicht. Die Berechnung für einen τ -Wert wird nach Voranschlag von [3.6] beendet, wenn folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|\hat{R}(\tau, T_m) - \hat{R}(\tau, T_n)| < \epsilon \quad \text{mit} \quad T_m < T_n; \quad (3.56)$$

ϵ Abbruchgrenze, z. B. $\epsilon = 0,05\hat{R}(0)$.

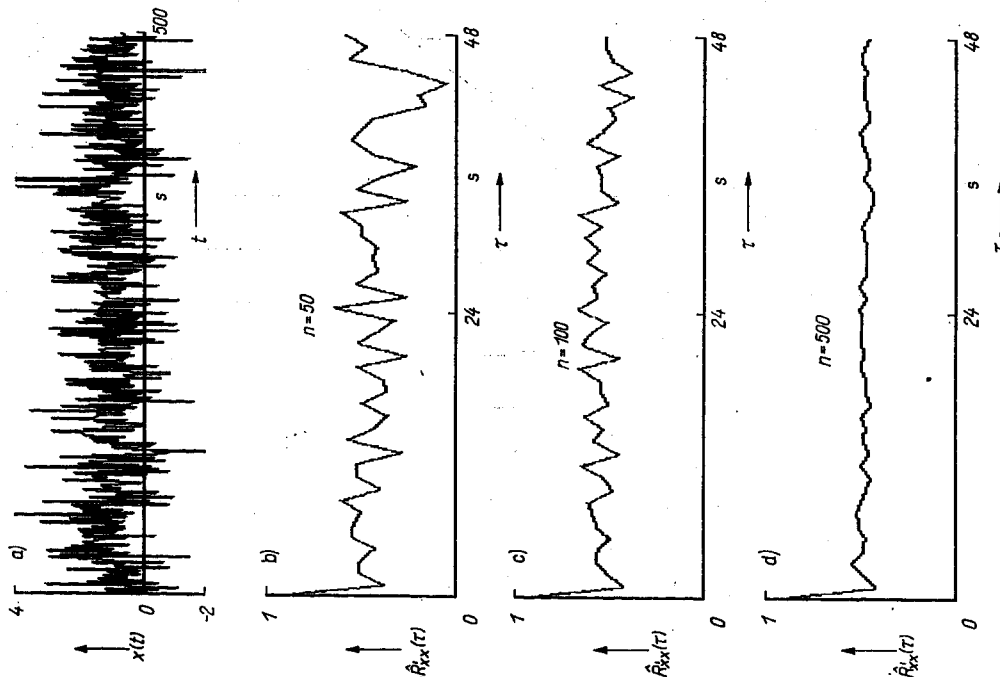


Die Ermittlung der Korrelationsfunktion auf der Grundlage der diskreten Werte eines stochastischen Signals über das Beobachtungsintervall T_0 ($T_0 = nT$) erfolgt nach den Beziehungen in den Gln. (3.41) bis (3.43) mittels eines Digitalrechners. Diese „digitalen Korrelatoren“ haben die gerätetechnischen Fehlermöglichkeiten der „analogen Korrelatoren“ nicht. Neben dem Einfluß der Beobachtungszeit T_0 und der Verschiebung τ beeinflußt die Wahl der Tasterperiode T die Genauigkeit der Korrelationsfunktion. Als



Beispiel 3.1 Einfluß der Beobachtungsanzahl auf die Güte der berechneten Korrelationsfunktion $\hat{R}'_{xx}(\tau)$

Gegeben: $x(t)$ weißes Rauschen; NV (1, 1), Abtastzeit $T = 1$ s, $n = 50, 100, 500$ Beobachtungen.
Gesucht: Verlauf der Korrelationsfunktion für eine feste Korrelationstiefe und verschiedene Beobachtungsanzahl.
Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 3.1.



Die Ergebnisse zeigen, daß 1. die Streuung der Werte der Korrelationsfunktion mit Zunahme der Korrelationstiefe zunimmt ($n = 50$).

Beispiel 3.1 Einfluß der Beobachtungszahl auf die Güte der berechneten Korrelationsfunktion $\hat{R}_{xx}(\tau)$

- die Streuung der Werte der Korrelationsfunktion mit der Zunahme an Beobachtungen abnimmt ($n = 50, 100, 500$),
- bereits für $n = 500$ sehr gut zu erkennen ist, daß das Signal aus einem Gleichanteil und einer zufälligen Komponente, die weißes Rauschen ist, besteht.

Anmerkung:

Alle Berechnungen der Beispiele wurden in zeitdiskreter Form realisiert. Die in den Tastpunkten kT exakt ermittelten Funktionswerte wurden zur übersichtlicheren Darstellung durch Geraden verbunden. Um die Anzahl der Symbole und Formelzeichen nicht noch weiter zu erhöhen, werden für diese Verläufe auch die Symbole der kontinuierlichen Beschreibung verwendet.

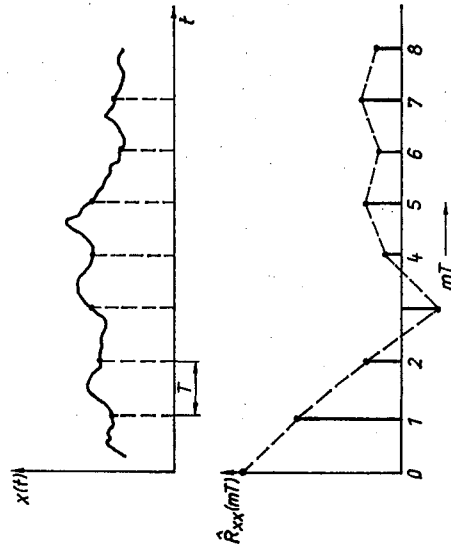


Bild 3.14 Abgetastete Signalwerte und die berechneten Stützstellen der Autokorrelationsfunktion

Ergebnis erhält man im Abstand der Verschiebung mT die Stützstellen der Korrelationsfunktion (Bild 3.14).

Die Abschätzung der Signifikanz, d.h. $R_{xx}(\tau) \neq 0$, der empirisch ermittelten $\hat{R}_{xx}(\tau)$ auf der Grundlage der Annahme von unabhängigen Beobachtungen des stochastischen Signals kann erfolgen nach [3.19] bei $n - m$ Produkten in den Gln. (3.41) und (3.42) mit einem Risiko von $\alpha = 5\%$ nach der Vorschrift

$$\hat{R}'_{xx}(\tau) \begin{cases} = 0 & \text{für } -\frac{2}{\sqrt{n-m}} \leq \hat{R}_{xx}(\tau) \leq +\frac{2}{\sqrt{n-m}} \\ \neq 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.57)$$

mit

$$\hat{R}'_{xx}(\tau) = \frac{\hat{R}_{xx}(\tau)}{\hat{R}_{xx}(0)}$$

Im Bild 3.15 ist die Vorgehensweise für ein typisches Beispiel dargestellt. Die Werte der berechneten normierten Autokorrelationsfunktion $\hat{R}'_{xx}(\tau)$, die außerhalb des Toleranzbereichs liegen, sind statistisch gesichert, d.h. ungleich null. Es ist ferner zu erkennen,

Beispiel 3.2 Ermittlung der Korrelationsfunktion $\hat{R}_{xx}(\tau)$ und des Leistungsdichtespektrums $\hat{S}_{xx}(\omega)$

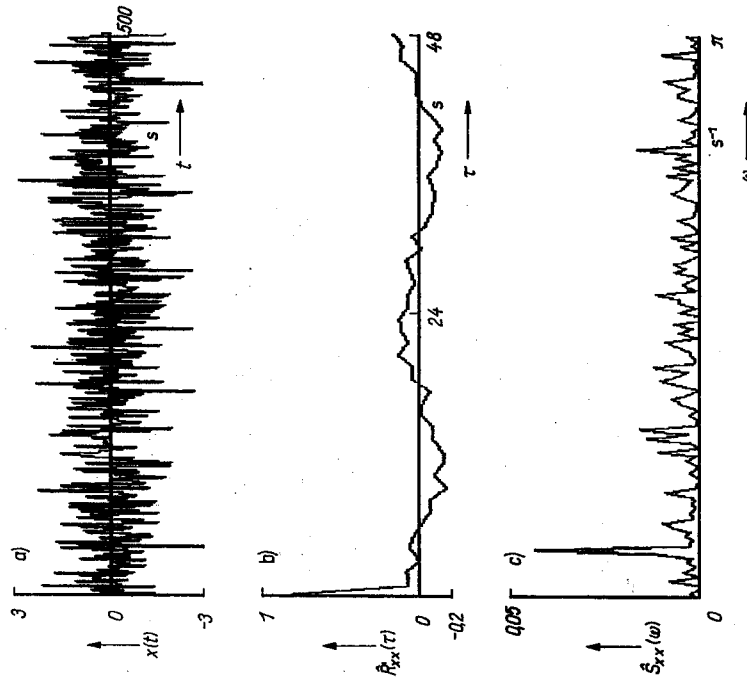
Gegeben:

$$x(t) = x'(t) + 0,5 \sin \frac{2\pi}{24} t,$$

$x'(t)$ weißes Rauschen, NV (0, 1),
Abtastzeit $T = 1$ s,
Beobachtungen: 500.

Gesucht: Verlauf der Korrelationsfunktion $\hat{R}'_{xx}(\tau)$ und des Leistungsdichtespektrums $\hat{S}_{xx}(\omega)$.

Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 3.2.



Die dargestellten Funktionen zeigen, daß das Signal $x(t)$

- keinen Gleichanteil hat,
- eine periodische Komponente besitzt, was sowohl im Verlauf von $\hat{R}'_{xx}(mT)$ und noch deutlicher im Leistungsdichtespektrum $\hat{S}_{xx}(\omega)$ zu erkennen ist,
- eine zufällige Komponente enthält, die als nahezu weißes Rauschen gedeutet werden kann.

daß mit Abnahme der Anzahl der Produkte in den Gln. (3.41) und (3.42) bei fester Beobachtungsanzahl n und zunehmender Korrelationstiefe mT die Signifikanzwerte für $\hat{R}'_{xx}(\tau)$ zunehmen. Weiterführende Betrachtungen zur Größe des statistischen Fehlers normierter Autokorrelationsfunktionen sind unter Annahme verschiedener Voraussetzungen an das stochastische Signal in [3.7] enthalten.

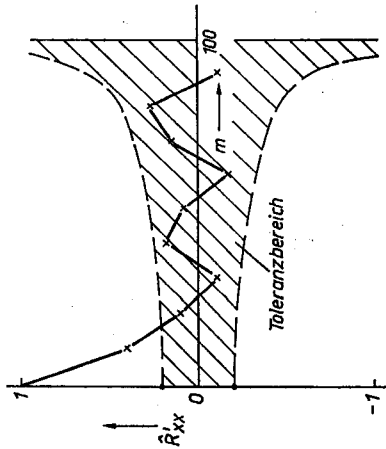


Bild 3.15
Verlauf des nichtsignifikanten Bereichs
einer Autokorrelationsfunktion
($\alpha = 5\%$, $n = 100$)

Im Beispiel 3.1 ist für ein stochastisches Signal der Einfluß der verwendeten Beobachtungszahl auf die Güte der geschätzten Korrelationsfunktion $\hat{R}'_{xx}(mT)$ dargestellt. Ist in einem Signal eine periodische Komponente enthalten, wie im Beispiel 3.2, besitzt auch die aus einer Stichprobe berechnete Korrelationsfunktion $\hat{R}'_{xx}(mT)$ eine periodische Komponente. (Das im Beispiel 3.2 dargestellte Leistungsdichtespektrum $S_{xx}(\omega)$ wird im Abschnitt 3.2.3.1 behandelt.)

3.2.3. Beschreibung stochastischer Signale im Frequenzbereich/Leistungsdichtespektren

Wie bei den determinierten Signalen ist auch bei stochastischen Signalen die Verteilung der Leistung über die Frequenz ω zur Lösung vielfältiger Diagnose-, Überwachungs-, Steuer- und Vorhersageaufgaben von großem Interesse. Im Gegensatz zu dem im Abschnitt 3.1.2 vorgestellten Amplitudenspektrum $|X(j\omega)|$ wird eine Kenngröße – das *Leistungsspektrum* $S(\omega)$ – gesucht, das die mittlere Leistung des Signals in einem Frequenzbereich beschreibt. In Analogie zu den Korrelationsfunktionen wird die mittlere Leistung als Funktion der Frequenz ω eines Signals in Form des Autoleistungsdichtespektrums und die mittlere Leistung zweier Signale als Funktion der Frequenz ω in Form des Kreuzleistungsdichtespektrums beschrieben.

3.2.3.1. Autoleistungsdichtespektrum $S_{xx}(\omega)$

Bei der Ableitung der Beziehungen für das *Autoleistungsdichtespektrum* wird von einem Teilvorgang $x_{T_0}(t)$ des stochastischen Signals $x(t)$ ausgegangen, das das komplexe Amplitudenspektrum für ein zeitlich nicht begrenztes Signal nicht existiert. Entsprechend Bild 3.16 gilt für den Teilvorgang $x_{T_0}(t)$:

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } -T_0 \leq t \leq +T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.58)$$

Die mittlere Leistung für den Teilvorgang $x_{T_0}(t)$ ergibt sich damit zu

$$\overline{x_{T_0}^2(t)} = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x_{T_0}^2(t) dt. \quad (3.59)$$

Wird ein stationäres stochastisches Signal $x(t)$ angenommen, ergibt sich die Gesamtleistung im Zeitbereich durch Grenzwertbildung entsprechend Gl. (3.60) zu

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x_{T_0}^2(t) dt. \quad (3.60)$$

Da die mittlere Gesamtleistung des Signals im Zeit- und Frequenzbereich gleich sein muß, kann mittels der Fourier-Transformation – Gln. (3.20) und (3.22) – eine Umformung von Gl. (3.60) in eine Form erfolgen, die den Leistungsanteil einzelner Frequenzen darstellt. Aus Gl. (3.60) ergibt sich damit

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x_{T_0}(t) \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X_{T_0}(j\omega) e^{j\omega t} d(j\omega) \right] dt. \quad (3.61)$$

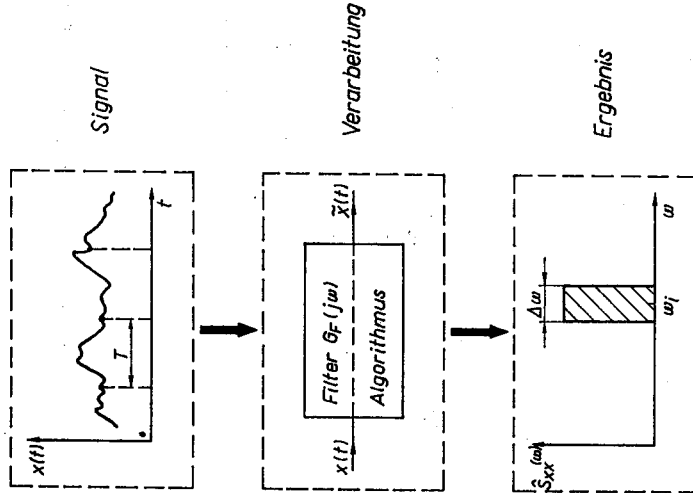


Bild 3.16
Prinzip der Ermittlung
von Leistungsdichtespektren

Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält man

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X_{T_0}(j\omega) \int_{-T_0}^{+T_0} x_{T_0}(t) e^{j\omega t} dt d(j\omega). \quad (3.62)$$

Unter Verwendung der Beziehungen für die Fourier-Transformation und für komplexe Größen ergibt sich aus Gl. (3.62)

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} |X_{T_0}(j\omega)|^2 d(j\omega). \quad (3.63)$$

Durch das Vertauschen der Grenzwertbildung und der Integration erhält man einen Ausdruck, der nur von der Frequenz ω abhängt. Es gilt dann:

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{|X_{T_0}(j\omega)|^2}{2T_0} d(j\omega). \quad (3.64)$$

Der Ausdruck

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{|X_{T_0}(j\omega)|^2}{2T_0} = S_{xx}(\omega) \quad (3.65)$$

stellt ein Maß für die mittlere Leistung einer Teilschwingung des stochastischen Signals der Frequenz ω dar. Sie wird als *Autoleistungsdichtespektrum* bezeichnet. Mit dieser Vereinbarung findet man für die Gesamtleistung des Signals im Zeitbereich entsprechend Gl. (3.64)

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} S_{xx}(\omega) d(j\omega). \quad (3.66)$$

Da das Autoleistungsdichtespektrum immer eine reelle Größe ist, gilt für Frequenzen im Bereich $0 \leq \omega \leq \infty$

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega. \quad (3.67)$$

Gl. (3.67) wird als *Parsevalsche Gleichung* bezeichnet. Sie hat große Bedeutung für den Entwurf von stochastisch gestörten Steuerungen.

Wesentliche Eigenschaften des Autoleistungsdichtespektrums sind folgende:

1. Es gilt $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$, d. h., es liegt eine gerade Funktion vor.
2. Das Autoleistungsdichtespektrum ist immer eine reelle Größe, und es gilt

$$S_{xx}(\omega) \geq 0.$$

In Tafel 3.3 sind die Spektren für einige typische stochastische Signale dargestellt. Während das „weiße Rauschen“ alle Frequenzen mit gleicher Leistung enthält, besitzt ein harmonisches Signal ein Spektrum in Form einer impulsförmigen Spektrallinie bei der Frequenz ω_1 .

3.2.3.2. Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{ux}(\omega)$

Ergibt sich eine Leistung aus dem Produkt zweier stochastischer Signale (z. B. Strom und Spannung, Drehzahl und Drehmoment, Kraft und Geschwindigkeit), so können analog zu Abschnitt 3.2.3.1 die Teilvorgänge $u_{T_0}(t)$ und $x_{T_0}(t)$ mit den Eigenschaften

$$u_{T_0}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } -T_0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.68)$$

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } -T_0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Ausgangspunkte verwendet werden. Für den zeitlichen Mittelwert des Produkts der stationären Signale ergibt sich dann

$$\overline{u(t)x(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} u_{T_0}(t)x_{T_0}(t) dt. \quad (3.69)$$

Mit der Anwendung der Fourier-Transformation und einigen Umformungen wie im Abschnitt 3.2.3.1 geht Gl. (3.69) in den Ausdruck

$$\overline{u(t)x(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{U_{T_0}(j\omega)X_{T_0}(-j\omega)}{2T_0} d(j\omega) \quad (3.70)$$

über. In Gl. (3.70) wird der Ausdruck

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{U_{T_0}(j\omega)X_{T_0}(-j\omega)}{2T_0} = S_{ux}(\omega) \quad (3.71)$$

als *Kreuzleistungsdichtespektrum* bezeichnet. Mit dieser Definition geht Gl. (3.70) über in die Form

$$\overline{u(t)x(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} S_{ux}(\omega) d(j\omega). \quad (3.72)$$

Das Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{ux}(\omega)$ hat folgende wichtige Eigenschaften:

1. Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist in der Regel eine komplexe Größe.
2. Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist keine gerade Funktion; denn es gilt

$$S_{ux}(\omega) = S_{ux}^*(-\omega).$$

3. Bei der Überlagerung zweier Signale $x(t) = u(t) + z(t)$ gilt

$$S_{xx}(\omega) = S_{uu}(\omega) + S_{zz}(\omega) + S_{uz}(\omega) + S_{zu}(\omega).$$

Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist für die Analyse von Signalübertragungen und Systembeschreibungen im Frequenzbereich von besonderer Bedeutung (s. Abschn. 3.2.4).

3.2.3.3. Experimentelle Bestimmung von Leistungsdichtespektren

Die Ermittlung von Leistungsdichte ist eine der schwierigsten Aufgaben der Signalanalyse. In der Literatur wurde eine Vielzahl von Verfahren vorgestellt, wobei häufig Aussagen über ihren zweckmäßigen Einsatz fehlen [3.4, 3.7 bis 3.11]. Im Rahmen dieses Buches sollen ausgewählte Grundprinzipien vorgestellt werden, die die Basis leistungstarker rechnergestützter Verfahren sind.

Alle Verfahren beruhen auf der Messung (kontinuierlich/diskontinuierlich) des stochastischen Signals und der anschließenden Selektion der Leistungsanteile bestimmter Frequenzen ω_1 (bzw. Frequenzbereiche $\Delta\omega_1$) aus dem Signal durch Filterverfahren oder Algorithmen. Für ein kontinuierliches stochastisches Signal ist das Konzept im Bild 3.16 dargestellt.

Die Verfahren werden im folgenden unterschieden in *direkte Verfahren*, bei denen das Leistungsdichtespektrum direkt aus dem Signal geschätzt wird, und in *indirekte Verfahren*, bei denen das Leistungsdichtespektrum aus dem Signal über die Ermittlung von Korrelationsfunktionen und deren Fourier-Transformation berechnet wird. Den Schwerpunkt bildet hier außerdem die diskontinuierliche Betrachtungsweise, weil der Digitalrechner gegenüber analogen Geräten wesentlich leistungsfähiger ist.

Direkte Verfahren

Zu den klassischen direkten Verfahren gehören das Suchfilterverfahren und das Suchfrequenzverfahren. Beide Verfahren wurden auf der Basis von analogen Geräten entwickelt.

Das Suchfilterverfahren, dessen Prinzip im Bild 3.17 dargestellt ist, geht davon aus, daß durch ein analoges Bandpaßfilter aus dem stochastischen Signal $x(t)$ für eine Frequenz ω , der Leistungsanteil in einem schmalen Bereich $\Delta\omega$, um die Mittelfrequenz ω , herausgefiltert wird. Aus dem gefilterten Signalanteil $\bar{x}(t, \omega)$ wird durch eine Quadrier-einheit und einen Integrator eine Schätzung für das Autoleistungsdichtespektrum nach der Beziehung

$$S_{xx}(\omega) = \frac{\bar{x}^2(t, \omega)}{\Delta\omega} \quad (3.73)$$

ermittelt. Für eine unendlich große Beobachtungszeit T_0 erhält man das exakte Autoleistungsdichtespektrum zu

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \bar{x}^2(t, \omega) dt. \quad (3.74)$$

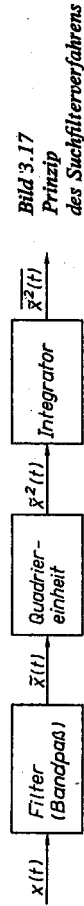


Bild 3.17
Prinzip
des Suchfilterverfahrens

Das Hauptproblem dieser Methode ist die Realisierung der Filtercharakteristik. Für den idealen Bandpaß gelten entsprechend Bild 3.18 folgende Übertragungseigenschaften:

$$|G_F(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega < \omega_u, \quad \omega > \omega_o \\ 1 & \text{für } \omega_u \leq \omega \leq \omega_o \end{cases} \quad (3.75)$$

$$\Delta\omega = \omega_o - \omega_u \rightarrow 0. \quad (3.76)$$

Die analoge Realisierung des Bandpasses bereitet u. a. große Schwierigkeiten aufgrund einer zu geringen Steilheit des Filters, besonders im tiefen Frequenzbereich, und der notwendigen Gleichheit zweier Filter bei der Ermittlung des Kreuzleistungsdichtespektrums. Aus diesen Gründen wurden die analogen durch digitale Filter ersetzt (s. Abschn. 3.4).

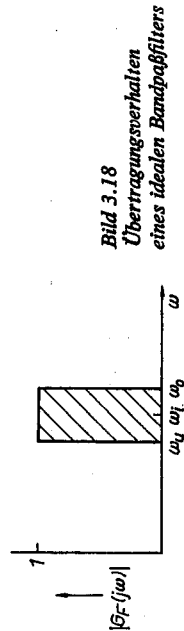


Bild 3.18
Übertragungsverhalten
eines idealen Bandpaßfilters

Unabhängig von der Realisierung des Filters ist der Einfluß der Beobachtungszeit T_0 und der Bandbreite $\Delta\omega$ auf die Genauigkeit der Schätzung. Allgemein gilt, daß das Spektrum um so genauer ermittelt wird, je größer T_0 und je kleiner $\Delta\omega$ ist. Bei kleinerem $\Delta\omega$, d. h. bei größerer Anzahl von Frequenzbändern, muß bei gleicher Schätzgüte die Beobachtungszeit T_0 vergrößert werden. Eine Abschätzung für das Vertrauensintervall

des Spektrums $\Delta S_{xx,\alpha}$ in dB wurde von Blackman und Tukey [3.11] angegeben in Form der Beziehung

$$\Delta S_{xx,\alpha} = K (n/m^* - 0,883)^{-1/2}; \quad (3.77)$$

| | |
|----------|-------------------------|
| n | Zahl der Abtastwerte |
| m^* | Zahl der Frequenzbänder |
| α | 20 10 4 2 |
| K | 11,2 14,1 17,7 20,5 |

Damit wird deutlich, daß das Toleranzband $\Delta S_{xx,\alpha}$ mit Zunahme der Sicherheit größer wird und mit Zunahme des Wertes von n/m^* abnimmt. Der mit Gl. (3.77) berechnete Toleranzbereich enthält mit dem angegebenen Risiko α den tatsächlichen Wert des Spektrums (Bild 3.19).

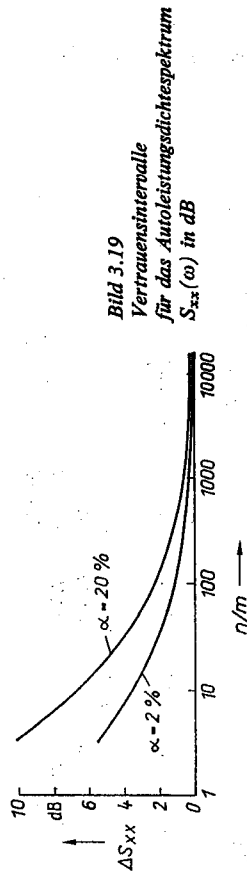


Bild 3.19
Vertrauensintervalle
für das Autoleistungsdichtespektrum
 $S_{xx}(\omega)$ in dB

Das Suchfrequenzverfahren hat sich in der Analogtechnik gegenüber dem Suchfilterverfahren aufgrund seiner höheren Leistungsfähigkeit durchgesetzt. Bei diesem Verfahren wird der Leistungsanteil der Frequenz ω , mit Hilfe eines Suchsignals der Form

$$x_s(t; \omega) = a_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.78)$$

unter Verwendung des Prinzips der Kreuzkorrelation für $\tau = 0$ (s. Abschn. 3.2.2.2) aus dem stochastischen Signal $x(t)$ ermittelt. Entsprechend Gl. (3.49) gilt für das geschätzte Spektrum:

$$\hat{S}_{xx}(\omega) \approx \overline{x(t) x_s(t, \omega)} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) x_s(t, \omega) dt. \quad (3.79)$$

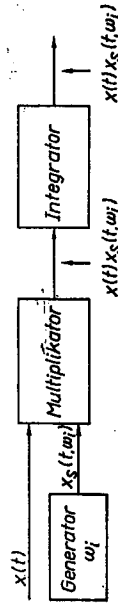


Bild 3.20. Prinzip des Suchfrequenzverfahrens

Durch die Kreuzkorrelation wird für genügend große T_0 aus dem Signal $x(t)$ nur der Anteil herausgefiltert, der mit dem Suchsignal $x_s(t, \omega)$ identisch ist. Damit wird ein „ideales Bandpaßfilter“ realisiert, und die Auflösung des Frequenzbereichs in Teilschnitte sowie der mögliche Frequenzbereich hängen nur von der Leistungsfähigkeit des Suchsignalgenerators und des Integrators ab. Die allgemeine Prinzipskizze ist im Bild 3.20 dargestellt. Zur Multiplikation und Integration dienen häufig Wattmeter [1.46].

Stehen in einem Zeitintervall $-T_0 \leq t \leq +T_0$ insgesamt $2n$ Beobachtungen von $x(t)$ mit der Abtastperiode T (Bild 3.21) zur Verfügung, kann eine Schätzung des Autoleistungsdichtespektrums auf der Grundlage der Berechnung der Fourier-Koeffizienten erfolgen.

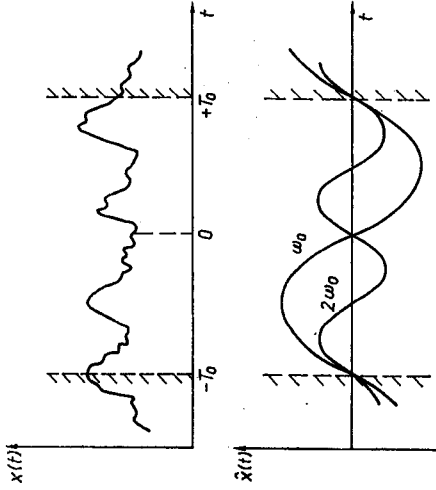


Bild 3.21
Betrachteter Signalverlauf für die Schätzung
des Autoleistungsdichtespektrums
aus den Fourier-Koeffizienten

Entsprechend Gl. (3.34) gilt für die diskrete Fourier-Transformierte im beobachteten Zeitbereich

$$X^*(jm\omega_0) = \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) e^{-j(m\omega_0 kT)} \tag{3.80}$$

mit

$$t = kT, \quad \omega_m = m\omega_0 = n\pi/nT, \quad T_0 = nT,$$

$$k = 0, +1, +2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, n;$$

$\omega_0 = 2\pi/2T_0$ Grundwelle des Signals.

Damit wird davon ausgegangen, daß das Signal im Zeitraum $-T_0, +T_0$ in

- die Grundwelle mit der Frequenz ω_0
 - Oberwellen mit den Frequenzen $m\omega_0$; $m = \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n$
- zerlegt wird und die Leistungsanteile nur in diesen Stützstellen vorhanden sind. Die obere Grenze wird durch das Abtasttheorem festgelegt, da $\omega_{\max} = 2\pi/2T = \pi/T$ ist. Das Gesamtspektrum liegt dann zwischen $\omega_n = 2\pi/2T_0 = \pi/T_0$ und $\omega_0 = \pi/T$. Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich analog Gl. (3.9) zu

$$c_m = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) e^{-j(m\omega_0 kT)}. \tag{3.81}$$

Mit

$$c_m = \frac{1}{2} (a_m - jb_m) \tag{3.82}$$

und

$$a_m = \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) \cos(m\omega_0 kT)$$

$$b_m = \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) \sin(m\omega_0 kT) \tag{3.83}$$

$$a_0 = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT)$$

folgt für die diskrete Fourier-Transformierte

$$X^*(jm\omega_0) = 2nc_m = n(a_m - jb_m). \tag{3.84}$$

Um nun das Leistungsdichtespektrum zu ermitteln, wird von der mittleren Leistung

$$\overline{x^2(kT)} = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} x(kT) x(kT) \tag{3.85}$$

ausgegangen. Durch Einsetzen der Ausdrücke von Gl. (3.36) und nach einiger Umformung erhält man

$$\overline{x^2(kT)} = \sum_{m=-n}^{+n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X^*(jm\omega_0)|^2}{4n^2}. \tag{3.86}$$

Der Leistungsanteil einer Teilschwingung ω_m kann damit durch die Beziehung

$$S_{x^*x^*}(m\omega_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X^*(jm\omega_0)|^2}{4n^2} \tag{3.87}$$

ausgedrückt werden. Die Parsevalsche Beziehung für abgetastete stochastische Signale hat damit analog zu Gl. (3.67) die Gestalt

$$\overline{x^2(kT)} = \sum_{m=-n}^{+n} S_{x^*x^*}(m\omega_0). \tag{3.88}$$

Die geschätzte Leistung einer Frequenz ergibt sich aus den Gl. (3.87) und (3.88) zu

$$S_{x^*x^*}(m\omega_0) = \frac{1}{4} (a_m^2 + b_m^2). \tag{3.89}$$

Das Leistungsdichtespektrum kann dargestellt werden in Abhängigkeit von

- der Frequenz f :

$$\frac{1}{2nT} \leq f_m \leq \frac{1}{2T},$$

- der Kreisfrequenz ω :

$$\frac{\pi}{nT} \leq \omega_m \leq \frac{\pi}{T},$$

- der normierten Kreisfrequenz ω^* :

$$0 \leq \omega_m^* \leq \pi$$

mit

$$\omega_m^* = \frac{\pi m}{n}; \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Das vorgestellte direkte Verfahren hat den Vorteil der einfachen Handhabung und den Nachteil, daß nur der Leistungsanteil spezieller Frequenzen in den Stützstellen ω_m ermittelt wird. Die Genauigkeit der Schätzung nimmt mit Zunahme der Beobachtungszeit und mit Abnahme der Tastperiode T zu.

Im Beispiel 3.2 (s. Abschn. 3.2.2.3) ist für ein Signal, das aus einer stochastischen und einer periodischen Komponente besteht, das Autoleistungsspektrum nach dieser Methode ermittelt und interpretiert worden.

Indirekte Verfahren

Eine der leistungsstärksten indirekten Methoden ist die Schätzung von Leistungsdichtespektren durch die Fourier-Transformation der entsprechenden Korrelationsfunktionen, d. h. durch Anwendung der Wiener-Chintschinschen Beziehungen. Die grundsätzlichen Schritte dieser Methode sind im Bild 3.22 dargestellt. Folgende einzelne Schritte sind notwendig:

1. Ermittlung der Stützstellen der Korrelationsfunktionen $R_{xx}(mT)$ und $R_{ux}(mT)$ aus den abgetasteten Signalwerten $x(iT)$ und $u(iT)$ entsprechend den Gln. (3.42) und (3.50).
2. Reduzierung des Einflusses der Streuung der Stützstellen der Korrelationsfunktionen für zunehmende Korrelationsstiefe mT durch eine Wichtung der Korrelationsfunktionen mit einer Wichtungsfunktion $w^*(mT)$.

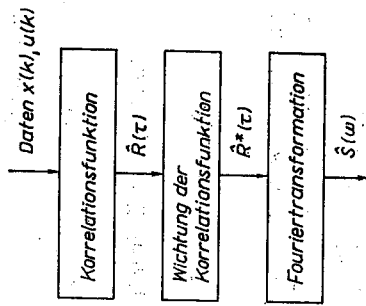


Bild 3.22
Stufen zur Ermittlung von Leistungsdichtespektren

Das Ziel besteht darin, für die Berechnung der Leistungsdichtespektren die Stützstellen der Korrelationsfunktionen bevorzugt zu verwenden, die statistisch am sichersten sind (s. Abschn. 3.2.2.3). In der Literatur [3.10, 3.11] werden eine Vielzahl von Wichtungsfunktionen angegeben. Bewährt haben sich die in Tafel 3.4 angegebenen. Für alle Wichtungsfunktionen gilt, daß sie Filtereigenschaften besitzen; sie werden deshalb auch als „Fensterfunktionen“ bezeichnet. Die Länge des Intervalls mT , in der die Wichtungsfunktion $w^*(mT) > 0$ ist, bestimmt die Glättung des Spektrums.

Tafel 3.4. Ausgewählte Wichtungsfunktionen für Korrelationsfunktionen

| | |
|----------|--|
| Bartlett | $w^*(mT) = (1 - mT/mT)$ für $m \leq m'$ |
| Tukey | $w^*(mT) = \frac{1}{2} (1 + \cos \pi mT/mT)$ für $m \leq m'$ |
| Parzen | $w^*(mT) = \begin{cases} 1 - \frac{6(mT)^2}{(mT')^2} \left[1 - \frac{mT}{mT'} \right] & \text{für } 0 \leq m < \frac{m'}{2} \\ 2 - \left(1 - \frac{mT}{mT'} \right)^3 & \text{für } \frac{m'}{2} \leq m \leq m' \end{cases}$ |

Stehen $(n - 1)$ Stützstellen einer Korrelationsfunktion bei n Beobachtungen der Signale zur Verfügung, ist die Länge des Wichtungsintervalls zweckmäßig zwischen

$$0,2n \leq m' \leq 0,4n \tag{3.90}$$

zu wählen. Für den Bereich $m > m'$ gilt immer $w^*(mT) = 0$. Die Vorgehensweise ist für die Wichtung einer Autokorrelationsfunktion $\hat{R}_{xx}(mT)$ nach Bartlett im Bild 3.23

dargestellt. Damit gilt für die gewichteten Korrelationsfunktionen analog den Gln. (3.42) und (3.50)

$$\hat{R}_{xx}^*(mT) = \frac{1}{n - m} \sum_{k=1}^{n-m} w^*(mT) x(kT) x[(k + m)T] \tag{3.91}$$

$$\hat{R}_{ux}^*(mT) = \frac{1}{n - m} \sum_{k=1}^{n-m} w^*(mT) u(kT) x[(k + m)T] \tag{3.92}$$

mit $m = 0, 1, 2, \dots, m'$.

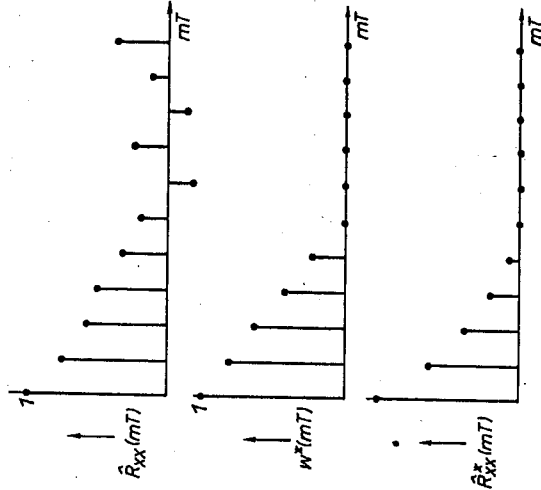


Bild 3.23
Einfluß der Wichtungsfunktion $w^*(mT)$ auf die Korrelationsfunktion ($m' = 5$ Bartlett-Wichtung)

3. Ermittlung der Leistungsdichtespektren aus den gewichteten (gestutzten) Korrelationsfunktionen auf Grundlage der Beziehungen der Gl. (3.77) im Abschnitt 3.2.3.3. Für den diskontinuierlichen Fall gilt

$$S_{xx}^*(\omega_i) = T \left[\hat{R}_{xx}^*(0) + 2 \sum_{m=1}^{m'} \hat{R}_{xx}^*(mT) \cos \frac{mT\omega_i}{m'} \right]$$

$$S_{ux}^*(\omega_i) = T \sum_{m=-m'}^{+m'} \left(\hat{R}_{ux}^*(mT) \cos \frac{mT\omega_i}{m'} - j \hat{R}_{ux}^*(mT) \sin \frac{mT\omega_i}{m'} \right)$$

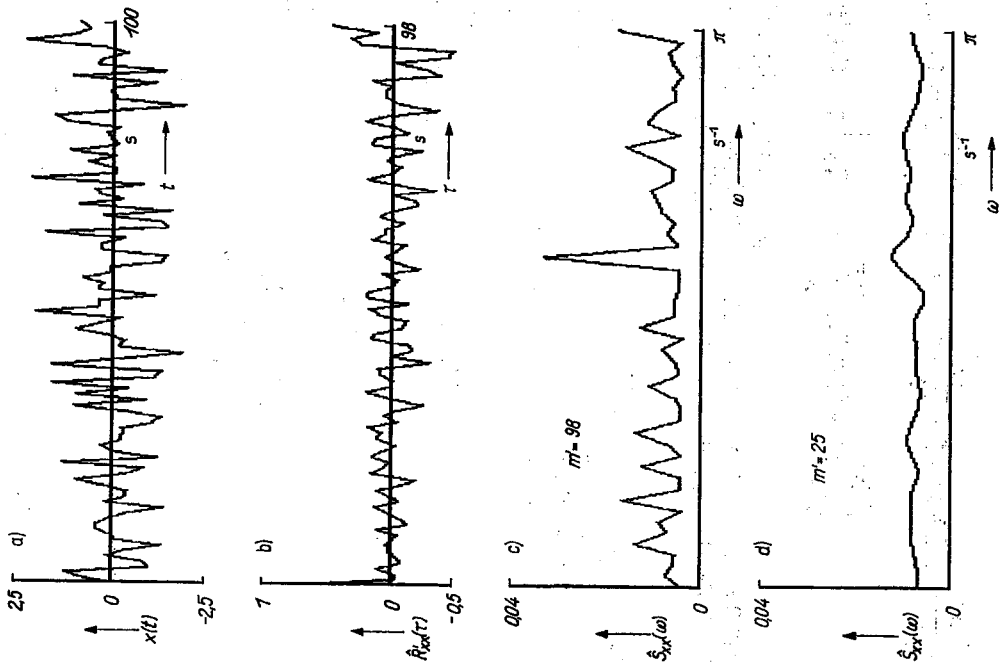
mit

$$\omega_i = \frac{i\pi}{m'T}; \quad i = 0, 1, \dots, m'. \tag{3.93}$$

Aus den Gln. (3.91) und (3.92) wird u. a. deutlich, daß mit der Festlegung des Parameters m' der Wichtungsfunktionen $w^*(mT)$ auch die Zahl der Frequenzbänder im Bereich $\omega = 0$ bis $\omega = \pi/T$ festgelegt wird. Wenn n Beobachtungen mit der Tast-

Beispiel 3.3 Einfluß der Wichtung der Korrelationsfunktion $\hat{R}_{xx}(\tau)$ auf die Gestalt des Autoleistungsspektrums $S_{xx}(\omega)$

Gegeben: $x(t)$ weißes Rauschen, NV (0, 1), Beobachtungen: 100, Abtastzeit $T = 1$ s.
Gesucht: Verlauf der Autoleistungsdichtespektren $\hat{S}_{xx}(\omega_i)$ in Abhängigkeit von der Länge des Wichtungsintervalls; Wichtungsart nach Parzen.
Ergebnis: Siehe Bild zu Beispiel 3.3.



Die dargestellten Ergebnisse zeigen, daß 1. die Werte der berechneten Korrelationsfunktion $\hat{R}_{xx}(mT)$ mit größer werdender Korrelationstiefe mehr streuen, weil die Anzahl der für die Mittelung notwendigen Produkte in der Berechnungsvorschrift abnimmt, 2. die Datenwichtung zur Glättung des Spektrums führt und in diesem Testfall für eine Länge des Wichtungsintervalls von $mT = 25$ s zu erkennen ist, daß das zu analysierende Signal die Eigenschaft des weißen Rauschens aufweist.

periode T vorliegen, kann die notwendige maximale Korrelationsstiefe m' aus dem Verhältnis

$$m' = \omega_{\max} / \Delta\omega \quad \text{mit} \quad \omega_{\max} = \pi/T; \quad (3.94)$$

$\Delta\omega$ gewählte Frequenzbandbreite

ermittelt werden. Um eine ausreichende statistische Sicherheit zu erreichen, muß das Verhältnis n/m' entsprechend Gl. (3.90) möglichst groß sein. Der Einfluß der Wichtung der Korrelationsfunktion auf den Verlauf des Autoleistungsdichtespektrums ist im Beispiel 3.3 dargestellt.

Für die Schätzung des Autoleistungsspektrums stehen neben den genannten Verfahren noch die Möglichkeiten der Anwendung des Verfahrens der schnellen Fourier-Transformation [3.11, 3.12], die den numerischen Aufwand der Fourier-Analyse von Gl. (3.83) wesentlich reduziert, sowie die Ermittlung aus den stochastischen Signalmodellen zur Verfügung (s. Abschn. 3.3).

3.2.3.4. Beziehungen zwischen Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren

Die Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren beschreiben stochastische Signale durch Mittelwerte, die innere Gesetzmäßigkeiten im Zeit- und Frequenzbereich ausdrücken. Es ist zu erwarten, daß zwischen beiden Beschreibungsformen ein Zusammenhang besteht, der dem von deterministischen Signalen entspricht. Als Beispiel soll der Zusammenhang zwischen der Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dem Autoleistungsdichtespektrum $S_{xx}(\omega)$ hier ausführlicher abgeleitet werden. Ausgangspunkt ist die in Gl. (3.65) abgeleitete Beziehung für $S_{xx}(\omega)$:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{X_T(j\omega) X_T^*(-j\omega)}{2T_0} \quad (3.95)$$

Setzt man in Gl. (3.95) die Fourier-Transformierten mit den unabhängigen Integrationsvariablen t_1 und t_2 ein, so erhält man

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-T_0}^{+T_0} x(t_2) e^{j\omega t_2} dt_2. \quad (3.96)$$

Interpretiert man die Integrale als Grenzwerte von Summen und führt zunächst die Integration über t_2 (mit $\tau = t_2 - t_1 = \text{const}$) und dann mit $dt_1 = d\tau$ über t_1 aus, so folgt

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} x(t_2) x(t_2 + \tau) dt_2 e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.97)$$

Durch Einsetzen der bekannten Beziehung für die Autokorrelationsfunktion erhält man als endgültige Beziehung den Ausdruck

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.98)$$

Mit Gl. (3.98) wird deutlich, daß der Zusammenhang zwischen den Leistungsdichtespektren und den Korrelationsfunktionen durch die Fourier-Transformation gegeben ist